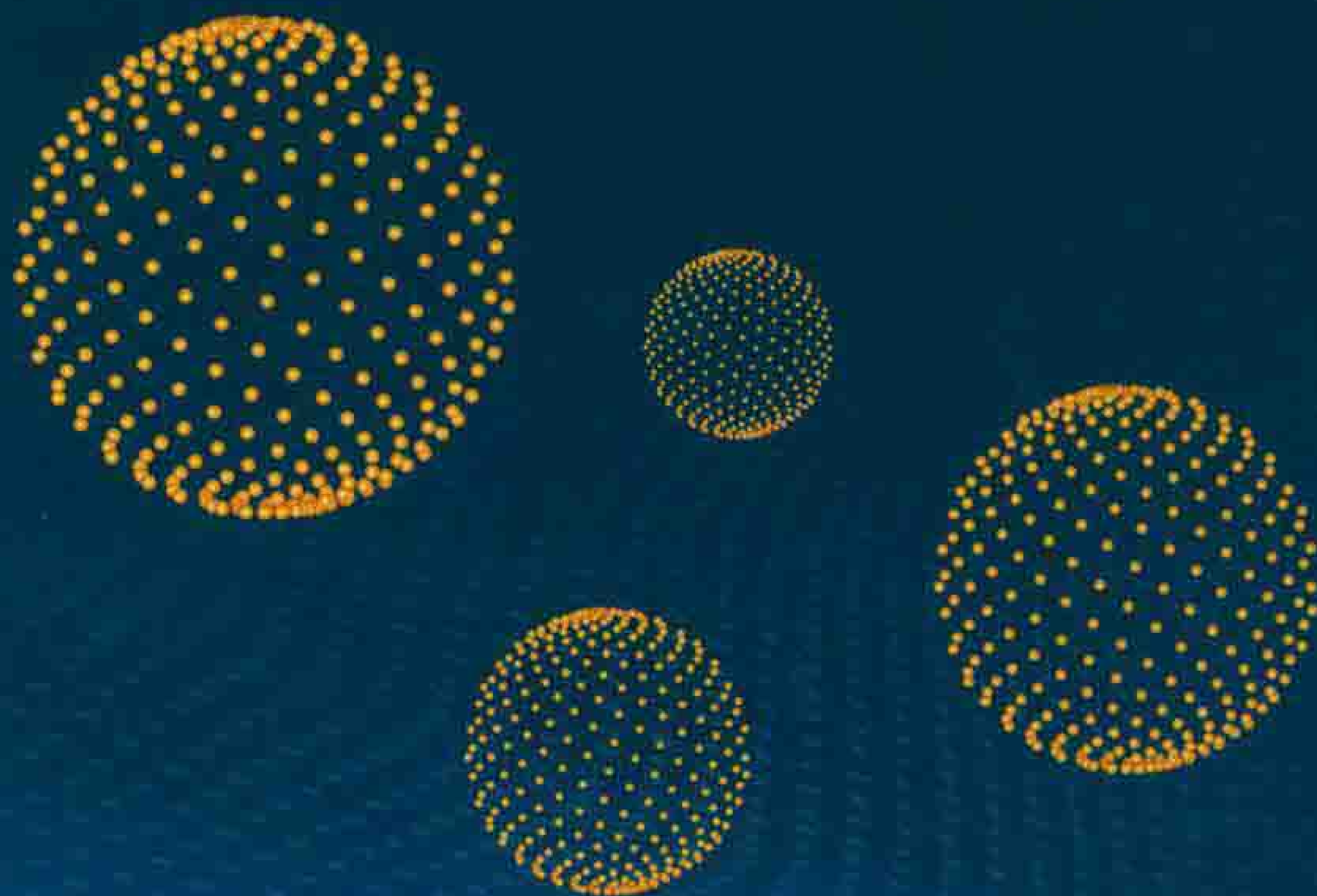
数学化的场论：球面世界的哲学

（第二版）

第三卷

任　伟　王　梅◎著





科学出版社

(TN-1576.01)

数学化的场论：球面世界的哲学

（第二版）

第三卷



科学出版社互联网入口

信息技术分社：010-64011835 销售：010-64031535
E-mail: it@mail.sciencep.com
销售分类建议：电子/电磁场

www.sciencep.com



定 价：118.00 元

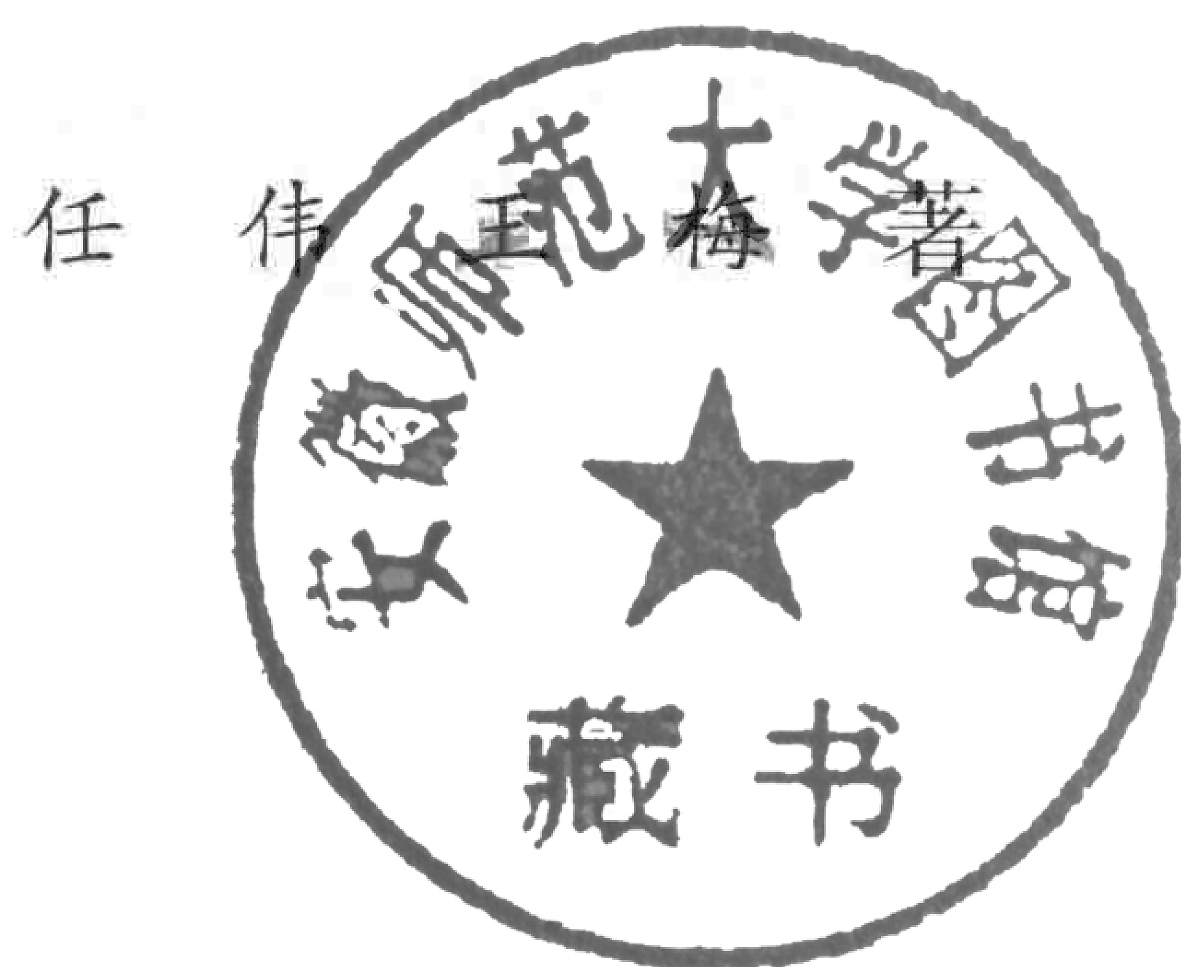
上海理工大学资助出版

数学化的场论：球面世界的哲学

（第二版）

第三卷

任　伟　王　梅　著



科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是作者多年研究成果的总结，也是研究过程的报道和研究方法的展现。仅就篇幅而论，自然科学内容居多；但就内在精神而论，本书可作为一本哲学书来读。本书将电磁场理论的核心概念用于研究人类，用数学化的场（而不是实证意义上的场）穿透主体间性的哲学难题，引导读者进入球面世界的哲学。旨在让读者成为哲学的人而不是科技的某种人。作者对每章的简要点评远比每章的知识本身重要。

本书可供电磁理论、人类思想史、哲学、语言学、宇宙学、数学物理、微波遥感、微波声学等专业的科技人员、研究生、本科生阅读和参考。

图书在版编目(CIP)数据

数学化的场论：球面世界的哲学. 第三卷/任伟，王梅著. —2版. —北京：科学出版社，2017. 6

ISBN 978-7-03-053148-3

Ⅰ. ①数… Ⅱ. ①任… ②王… Ⅲ. ①电磁场-场论 Ⅳ. ①O441. 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2017)第 128096 号

责任编辑：余 丁 / 责任校对：郭瑞芝

责任印制：张 倩 / 封面设计：蓝 正

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2013 年 8 月科学出版社第一版

2017 年 6 月第 二 版 开本：787×1092 1/16

2017 年 6 月第二次印刷 印张：20

字数：443 000

定价：118.00 元

怀着敬意与感激谨将此书献给我们的父亲和母亲

作者学术成果



数学上

创立有界均匀各向异性介质的波函数理论；

创立无界均匀各向异性介质的并矢格林函数理论；

揭示哲学上意志论的数学结构；

证明时间的奔腾向前与时间的永恒轮回的定量关系，解答不同时强制同时何以可能的问题。

哲学上

完成对费尔巴哈、黑格尔在辩证法上的超越，用二维数字信号处理的方法给出辩证法的当代定型；

回答海德格尔“为什么在者在而无却不在？”的提问，完备了笛卡儿和康德没有完成的二元论哲学；

建立既与物理学不矛盾又与经济学一致的价值论；

用数学化的场结合物理学上的多重散射理论解决主体间性难题；

用完备二元论统一了本体论和认识论。

物理学上

建立作者的时空相对论，完成对牛顿和爱因斯坦的否定之否定；

给出相对论性量子力学狄拉克方程解的诠释；

开启电磁场和引力场统一场论的规范场路径；

在牛顿用向径，黎曼和爱因斯坦用速度构造力学体系的基础上，用加速度作为出发点构建力学体系，因此库仑定律和牛顿万有引力定律可以统一为匀加速运动；

发现第四守恒定律并给出惯性系的自恰定义和根源。

宇宙学上

将量子力学中量子化概念用于天体运动研究；

给出太阳系的五个自旋不同的方程；

探索光的加速度，在常识理解的零加速度的基础上，提出光的加速度为光速的平方的算符理解和光的加速度在数值上等于光速的对偶空间理解。

电磁学上

通过电偶极子的考察建立空间相对论和时间相对论；

通过对高斯定理的30年研究，打通了量子力学、电动力学、相对论和规范场论；

开创时域压电学研究；

证明地球引力场中电磁场的三个矢量位分量和一个标量位分量等于作者的统一场论中的二个电磁位加二个引力位，俗称3+1=2+2的问题，以此为基础，研究宇宙微波背景辐射下的有源电磁场理论。

语言学上

发现语言与言语有与Maxwell方程中电场和磁场相似的时变规律；

用意义和音响形象重写二元论的意识哲学;

通过对语言中句段关系和联想关系的研究,开启哲学的纤维丛时代,并推动能指和所指代表的泛函分析时代和分析哲学代表的函数论时代;

提出语言学的实践论,用无声的话语作为完备二元语言学实践论的第四个元素。

思想上

第一次定义了绝对静止(=绝对运动);

在哥白尼原著中找到自旋的思想萌芽,通过现象学提纯实现了自旋的哥白尼革命;

在宠加莱猜想的物理对应研究中,提出时空并不代表宇宙的思想;

用分析力学上的 Hamilton-Jacobi 体系重审一切科学与哲学,揭示了世界的显隐运作,完成生存论存在论的信息化重铸。



任伟夫妻和马君岭夫妻 2009 年于加拿大



任伟一家 2012 年于加拿大



任伟夫妻 2015 年于加拿大



王梅母女于四川省眉山市



余子勤、任伟、李志刚于四川省仁寿一中

作者手迹

如果我是哲学家，
我将带着使命：
追问人生意义，
关注人类命运，
反思现实社会，
构建理想乐园。
那将注定此生负重前行，
我知道那是多么曲折而漫长。

如果我不是哲学家，
而只是拥有善良而敏感的心灵，
我将不用追思事物本质，
更不用赋予生活另外的意义，
而是简单、透彻、快乐的迎接生活的给予。
无论是幸福或苦难，
只要是真实的，我将全部接受。
那该多好！

——王梅

第二版前言

本书第二版的第一卷至第三卷是任伟和王梅共同策划、共同起草、共同修改、共同校对、共同定稿的。在三卷手稿即将交付出版之际，我们享受着艺术性的愉悦和发自内心的幸福。第二版计划共七卷，其余四卷将在后期出版，第一卷至第三卷采用相同的前言和导论。

正如第一版第十章指出的，我在写下“数学化的场论：球面世界的哲学”这一标题的时候，并不知道宇宙的形状是四维空间中三维球面；同样，即使在第一版出版之后，我也不知道电磁场理论本身还有待进一步数学化。难道这不令人感到惊奇（西方哲学家有言：哲学始于惊奇）和神秘吗?！特别是2015年春节，我回到仁寿一中拜访高中物理老师李志刚先生和余子勤校长。李老师已九十高龄，还坚持一定要看我写的第二版，当时我认为第二版的面世至少是十年以后的事。如有神助，第二版前三卷居然能在2016年年底完成，显然这只有我自己的努力是不可能的。一切的荣耀都来自于大自然而归于大自然。

2016年暑假，我在科学研究遇到瓶颈之际，终于苦尽甘来，发现了自旋为2的电磁场的数学结构，两周以后又进一步发现了对自旋为2的电磁场进行量子化的方法。尽管这些优雅而简洁的工作留待第二版的第四卷至第七卷中才能展现，我仍然在无比敬畏大自然的必然性（也就是斯宾诺莎的神）的同时感到自己是多么的幸运。感谢哺育我的祖国和人民，感谢养育和教育我的父母，感谢我的爱人对写作本书的支持。感谢方华书记和吴信宝书记对我的理解、鼓励、支持和帮助。感谢尧军和张萌同学对我的友谊，感谢马兴启兄弟般的情谊。

本书第一版由于篇幅的限制，只是提纲式地呈现了初步的哲学探讨，为此我感到深深的遗憾。在第一版大量的自然科学研究基础上，第二版增加了十章哲学内容，这就较为详尽地阐释了我建构的哲学体系；展示了我多年来在哲学方面的沉思以及与前人哲学思想的关联和创新。第二版第一卷中自然科学方面的内容主要来自我的博士论文及博士后工作总结；第二卷中自然科学方面的主要内容是有关格林函数及时域压电学方面的研究工作；第三卷中自然科学方面的主要内容是我创立的均匀各向异性介质波函数理论。各卷均有哲学内容渗透，这样分卷的好处是便于读者阅读和理解。第二版的出版初步形成了任伟哲学的雏形，旨在让更多学理工科的人能从中寻找到自然科学与哲学的切入点，并将哲学的思维方式和更哲学的视野用于自然科学的研究和学习。同时，哲学既来源于生活又投入生活，但愿每个人在哲学光芒的照耀下能拥有更美好和更有意义的人生。很多写得好的篇章和段落使我感到欣慰，所喜的是第二版是我谱写的自然科学和哲学的交响乐，二者在时间哲学中欢快地奏鸣时间与电磁场理论的神曲。但也确实有些章节还待今后机缘进一步完善和补充，因与上海理工大学的工作合同要求必须在2016年年底前交稿而不可能现在进一步锤炼，恳请读者谅解。第一版中的一些明显错误已在第二版中更正。

第二版前三卷由上海理工大学资助出版。特别感谢刘平副校长、庄松林院士，以及张

大伟、杨永才、陈海瑾、朱莉、张学典、卢莎、刘伟、邵晶婉、孟德华、潘涛等领导对本人科研工作的支持和帮助。感谢曹宏明、毕聪、郭东升、张志勇、郭旗、潘锦、王清源、佘卫龙、覃新川、彭润玲、朱灿等朋友的鼓励。

人生是欢乐的涌泉,偶尔也有深沉的悲痛。但痛苦是欢乐的源泉,我们又何必因痛苦而悲伤。让我们带着历史理性的使命感和责任感,以斯宾诺莎为榜样,诗性地栖居在大地上。

限于作者的学识和水平,书中不足之处在所难免,欢迎读者批评指正。

作　者

2016 年 10 月 9 日于四川眉山

第一版前言

本书是作者主持的两个国家自然科学基金项目(编号60471011,60872091)的成果总结,受到国家自然科学基金的支持和杭州电子科技大学的资助。在此特别感谢杭州电子科技大学历届各级领导方华、叶明、薛安克、费君清、孙玲玲、朱泽飞、郭林松、余建森、吕金海、陈光亭、邵根富、田野、严义、刘敬彪、鲁剑伟、黄良、胡建萍、官伯然和秦会斌等的指导和帮助。

本书第九章和第十章较好地反映了作者的研究兴趣和研究现状。书中有少量内容的重复主要是为了研究型章节的相对独立性(self-contained),也可以说是为了每章的自足性。重复并不是完全无用的,至少容易加深读者对有关内容的理解和掌握,正好比一首歌曲往往有些不同时的重复,交响乐更有同时的重复,而且,有的读者只是选择性地看书中某一章甚至某一节,自足性就十分重要。所以,我没有刻意避免重复。

第一章,传输线的函数变换解,是博士论文的工作,师从林为干院士,体现了很好的师传。林为干院士在保角变换方面做了很多研究工作,我在他那里学保角变换的确是事半功倍的。

第二章,导电柱体的低频散射是对林为干院士和潘威炎老师早年工作的改进,方法还是保角变换。

第三章,椭圆直波导理论也是林为干院士擅长的领域,对我来说则是完成了几何各向异性区域内波动方程的数学结构的认识,为我日后的突破性原创工作奠定了思想基础。

第四章,条带散射研究。林为干院士在我一上博士时就叫我关注时域微波的问题。当时人年轻,有点不听老人言,一切以自己的兴趣为转移,在快毕业的时候勉强开始了一点工作,没法写进博士论文。但是听了一些有用的课,如聂在平、阮颖铮老师的几何绕射理论和复射线理论。还听了冯志超老师的光学原理,卢亚雄老师的激光原理,谢汉德老师的高等量子力学。博士期间通读了吴大猷的《理论物理》(七卷集),基本框架能够背诵,为我日后的物理学研究打下了良好的基础。在此,特别感谢我妈妈从小给我思想的自由。一个人的博士经历无疑是重要的,本科学习也很重要。要特别感谢本科阶段的杨义先、张连文、张志勇、杨耀武和向中贵同学,以及成孝予、赵家升、冯潮清、何云娇和任丽君老师。

博士毕业以后,出国前,应用已故华罗庚教授在《数论导引》前言中介绍的方法(从这里可看出本科数学教育的痕迹),系统地研究已故的美国麻省理工学院教授J. A. Kong及其学生的工作,这是第五～七章的工作,对我的学术水平有很大提升。直接的好处是1994年Vasu. V. Varadan教授邀请我到美国宾夕法尼亚州州立大学访问。Vasu. V. Varadan教授对我当时的工作充分肯定,认为是与国际研究潮流齐头并进的。我从Vasu. V. Varadan教授那里学到了研究物理的方法,她告诉我Maxwell方程不要了,我们另搞一套。她是美国芝加哥大学物理学博士,芝加哥大学数学系V. Twersky的学生,对原创性研究的选题有敏锐的目光。Vasu. V. Varadan教授对我的鼓励和指导直接造就了

第八～十章的成果。可以说是 Vasu. V. Varadan 教授塑造了我的物理学研究风格(按照玻尔的话说,卢瑟福是他的第二位父亲,依此类推,Vasu. V. Varadan 教授是我的第二位母亲)。整个第八～十章是物理学、数学、哲学思想的交响曲。

① 根据康德内外感知学说的启示,用旋转的车轮测量耦合着的时间和空间,实现了狭义相对论四维时空的三维描述;提出并证明了任伟定理;根据任伟定理,引力质量＝惯性质量,狭义相对论为广义相对论奠基;完成在时空观上对牛顿的绝对时空和爱因斯坦的相对时空的否定之否定,创立了作者的空间相对论和时空相对论;在人类思想历史上第一次用等式"绝对静止＝绝对运动"定义了绝对静止;发现继能量守恒、动量守恒和角动量守恒定律之后的第四守恒定律,对应于时空的第四种对称性。从而将物理学的出发点从匀速直线运动改变为匀转速运动,实现整个物理学的重新理解。

② 通过对高斯定理的研究,在坚持无源 Maxwell 方程正确性的前提下,发现了有源 Maxwell 方程的新的物理意义,实现了量子力学、相对论、规范场和电磁场与引力场的统一场论的贯通。给出量子力学相对论性狄拉克方程解的作者诠释。

③ 创立有界均匀各向异性介质的波函数理论和无界均匀各向异性介质的并矢格林函数理论。问题由作者提出,方法是原创的,结果是新颖的,在经典物理学各个领域都有应用。特别是否定了文献上求解无界均匀各向异性介质并矢格林函数的傅里叶变换法、Radon 变换法和平面波展开法。

④ 完成对费尔巴哈、黑格尔在辩证法上的超越,用二维数字信号处理的方法给出辩证法的当代定型。

⑤ 回答海德格尔"为什么在者在而无却不在?"的提问,完备了笛卡儿和康德没有完成的二元论哲学。

⑥ 完成对自旋解释的哥白尼革命,写出太阳系的五个不同自旋的方程。将量子力学中的核心量子化概念用于研究天体运动。

⑦ 改变了人类关于宇宙就是时空的思想,用基于绝对时空(时间有先后)的封闭体系的自然哲学补充目前基于广义相对论(不同时可强制同时)的开放体系的(耗散结构的)宇宙论。

只对作者最近工作感兴趣的读者阅读第九章和第十章即可。第九章是数学化的场论,第十章是球面世界的哲学,与本书副书名相吻合。

第十一章则进一步以本书特有的平面波主线介绍弹性波基础,这些知识对电磁学专业的读者也是有用的,因为材料的研究和学科的交叉使得不了解这些知识就难以进行一些前沿的研究课题。

第十二章深入探讨声电耦合场问题,提出声电耦合场的初边值问题,将一种电磁场中常用时域数值计算方法引入到声场。据我的导师 Smith 教授说,2002 年他在德国超声年会上的演讲引起包括美国国防部、美国海军实验室在内的世界各地研究团体的强烈反响,带去的 30 多份论文预印本被一抢而空,会后还有很多来信来电索取。目前杭州电子科技大学在这一方面的研究领先于 Smith 教授在加拿大的工作,也领先于其他研究小组。

第十三章以大量篇幅详细讨论波函数理论,也就是无源波动方程的解,第十四章研究有源情况下波动方程的解。这两章是作者在专著《电磁散射理论》中撰写的两章内容的更新。这部分可作为博士研究生的教材。

第十五～二十一章的内容是两个国家自然科学基金资助课题的阶段性成果小结。我指导的研究生焦志伟、徐广成、潘伟良、杜铁钧、董志龙、王丹、姚军烈、郑洲官、朱合、肖刘琴、刘松柏和刘宁做了大量的协助工作，这部分内容可作为相关学科的教材。

这次成书，限于作者学识水平，虽然数易书稿，仍然不很满意，特别是哲学方面的研究，遵照母命压缩到第八章，甚为遗憾。这些年实际做的工作是第八章的十倍以上。哲学研究成果只能按照妻子的建议将来出下一本著作时去体现了。

书中内容难免有不妥之处，恳请读者批评指正。

作　者

2012年于杭州电子科技大学

目　　录

导　论

本书第二版前三卷手稿完成之后，我感到很有必要对任伟哲学体系进行更加清楚明白的介绍，所以标题“导论”也完全可以改为任伟哲学导论。在这种意义上，导论也可以理解为第二版的第一卷到第三卷的后记，因此这三卷只有第一版后记而没有第二版后记。将来出版的第四卷到第七卷将同样用这篇导论和第二版前言，但也许会有第二版后记对后续各卷做出补充说明。导论至少主观上要达到以下四重目的。

首先，对本书编排方式的合法性做出说明，因为马克思说只有唯一的一门历史科学，人的科学为自然科学奠基，自然科学也为人的科学奠基，人的科学与自然科学相互关联。这对学理工科的人理解为什么在场论著作中要包括人的科学至关重要。

其次，试图通过电磁场与电磁波的数学化，紧扣本书标题“数学化的场论”展开讨论，也就是对哲学有什么用做出实质性的回答。因为科学上重大的突破，比如电磁场与电磁波的进一步数学化就离不开哲学，特别是离不开时间哲学的创立和电荷是什么的解答，这些内容也是紧扣本书标题“球面世界的哲学”的。

再次，试图利用导论，对任伟哲学体系中的一些关键概念、方法做出比前三卷正文中更为清楚明白的说明，进一步厘清任伟哲学的独特性、独创性，以及与哲学史上其他哲学的区别和联系。

最后，借用导论对科学研究和哲学研究做出了适当的展望和预言，导论中呈现了前三卷中没有提及的一些内容和问题，某种意义上也为本书第四卷到第七卷的大致内容做出预告。可能会包括美学一卷、心意场理论一卷、电磁场理论基础一卷、电磁场理论一卷。也可能因将来的机缘而改变，比如心意场理论一卷不写，而写成电磁场理论三卷，分别作为本科生、研究生、博士生的课外读物。总之第四卷到第七卷尚在筹划中。

导论分为九小节，外加统一标注的参考文献，与正文每章的体例相同，但写法（内容上）还是与正文的每章不同。导论有的小节很详细，有的小节则很简洁，与正文还是大有区别，我认为这种写法作为导论是合适的。

（一）作者时间哲学的创立

时间的哲学思考是历史上很多伟大哲学家的中心论题，柏拉图、亚里士多德、普罗提诺、奥古斯汀、康德、黑格尔、胡塞尔、海德格尔、尼采、闵可夫斯基、柏格森等都提出过他们对时间的哲学理解和哲学解释。时间是一个熟知而非真知的概念。科学上，牛顿的绝对时空观和爱因斯坦的相对时空观比较有名。按我们的理解，牛顿的绝对时空中的时间是奔腾向前的，适合用$\frac{\partial E}{\partial t}=0$（这里$E$为能量，$t$为时间，$\frac{\partial}{\partial t}$代表时间算符）的封闭系统（整个宇宙，天外无天的自然），而爱因斯坦的相对时空中的时间则是永恒轮回的，不同时强制同时的，适用于生物和社会这样的耗散结构，$\frac{\partial E}{\partial t}\neq 0$（天外有天）。然而以前的科学家和哲

学家都没有完成时间和空间的真正打通,特别是对奔腾向前的时间不能提出约束条件,是本书作者首先给出了时间算符必须满足的偏微分方程,从而束缚了奔腾向前的时间这匹野马。闵可夫斯基知道了时间和空间的耦合,我们在更高水平上澄明了时间与空间如何耦合。作者为这三种时空(牛顿的绝对时空、爱因斯坦的相对时空、黑格尔的概念辩证运动时空)找到了现实的数学的对应,实现了在时空观上对牛顿、爱因斯坦、黑格尔的超越。细节已在本书前三卷中多方面展开。

由于光速不变,路程等于速度乘以时间,终于实现将空间的真理表达成时间的真理,也就是时间算符应该满足的偏微分方程。如果将时空耦合在一起考虑也是可以的(当然要更复杂一些),因为四维时空中没有五形式、六形式,而只有四形式及其以下各种微分形式。

关于时间的哲学思想,不同于最近一百年来物理学、数学主流社会的思想,与超弦、弦论等当前流行的各种学说(如文小刚的理论)大不一样。作者对时间的理解基于作者对自旋的独特的经典解释(见第二卷第九章),很有原创性。

简单点说,既然对扑克牌可以言及自旋为1和自旋为2,当然对宇宙微波背景辐射也可以言及自旋为2。由自旋分析可以发现时间的真理。时间的当前测量有两种方式,一种是基于电磁相互作用的圆周运动,另一种是基于引力相互作用的单摆运动,两种运动将给出同一种客观时间,就可实现电磁场与引力场的打通。这在德布罗意的博士论文中有较深入的研究。

(二)作者对电荷是什么的解答

电荷是什么?这是电磁学中所有问题的问题。一打开电灯的开关,就会有电,可见电荷肯定与物质的运动有关。几千年前,人类就发现了磁铁,磁的发现在电的发现之前。比如磁铁有南极和北极,因而人类发明了指南针,但指南针的内在机理是人类思想上没有真正解决的问题(磁的本质),因而电荷的本质是物理学上至今悬而未决的问题。

有的教科书上说,电荷的存在是物理上的经验事实,至于电荷是什么在科学上就不再追问了,电磁学就从电荷,特别是从电荷的库仑定律讲起。我们生活在一个坚持唯物主义的国度,怎么能够西方人叫我们不再追问电荷是什么,我们就不追问了呢?本书致力于澄明电荷的真理,为什么电荷是量子化的,为什么有正电荷,也有负电荷,有同时存在的磁北极和磁南极,因而也就有电中性的物体。相反对于质量而言,为什么有正质量定理,因而质量为什么恒为正,而不可能为负,特别是质量不可能为零。因此物理学上所谓光子静止质量为零的概念是不合适的,以前有许多人和许多书都认为光子的动质量不为零而光子的静质量为零,似乎振振有词,这是一个科学上的悖论,必须从科学理论中清除出去。我的结论是光子是有质量不带电的粒子,而光波是有质量电中性的场,光子和光波都以光速运动,不存在静止质量为零的光子或光波。光总是以光速传播,无论光在光子状态还是在光波状态。作为电磁场理论专业的博士,我对能回答电荷是什么感到欣慰。到目前为止,全世界的电磁场理论专家和理论物理学家都只知道电荷的经验事实,不知道电荷的本质。按希腊哲学传统,也就是现代科学(从希腊哲学分化出来)传统,电荷的本质=电荷是什么=电荷的数学表达式。本书将回答电荷是什么?我们得到的电荷表达式可解释为什么电子的自旋为(必须是)1/2,光子的自旋为(必须是)1,特别是黑洞为什么有电荷。在电磁场

与引力场的统一场论上迈出了坚实的一步。以前是 3+1=2+2,现在是 4+1=5,是以前工作的深化(不同,扬弃)。本书第一版没有写出(更确切一点是,已推导出方程,但没打算公开在书中发表,放一放再说)太阳系的 5 个方程是明智的,因为 4 维空间的张量描写是现代物理学的主流,而 4 与 5 的矛盾当时还没有解决。本书第二版将展示如何解决 4 与 5 的矛盾的过程。

电荷=什么,这是 H. Weyl、A. Einstein、C. N. Yang 等提倡对称性决定方程本身以来成功应用的典范之一。第一版第八章附录中有思想的种子。自 1959 年 AB 效应发表以来,人们认为麦克斯韦方程由四个分量位函数导出规范场,也就是说麦克斯韦方程成为现象,规范场才是本质。但光子的质量既为零又不为零是一个矛盾(相对论与量子力学的矛盾);宏观电磁场只需两个位函数,两个多余的位函数没有宏观意义。量子场论上也是不可测量的,且导致负度规。下一步(第四卷到第七卷),作者将论证电磁场与引力场将由五个规范位函数导出。同时解决光子的质量既为零又不为零的矛盾。两个电磁位给出电磁场,三个引力位给出三维空间。这里空间不是现成的,而是由运动着的物质生成的,空间不空(请见本书第一版的"绝对静止=绝对运动")。电磁场与引力场的耦合在三维空间同时发生。电磁场本应叫电质(电磁质量电荷)场,麦克斯韦方程刻画了电磁现象,本书的电磁质量电荷场才能反映电磁现象的本质。这将是唯物主义的伟大胜利,因此这也是一个哲学的高潮。自然界四种相互作用都是规范场。英国哲学家、诺贝尔文学奖获得者罗素早就有与作者相似的目光,但他只是个哲学家,并不真懂电磁学。本书第一版中提到的上海交通大学杨本洛的研究在正确的方向上,可惜他只在颠覆上,作者的工作才在建构上。

通过这一例子,认真的读者会知道在原创的和纯粹的科学著作中,哲学能够且必须占有一席之地。因为科学的根在哲学。正如本书第一版对自旋之谜的解答中所展示的,哥白尼是用哲学(神性)的目光才发现了地球围绕太阳转,作者也是用现象学的目光才发现地球围绕太阳转的自旋为 2。实现了自旋解释的哥白尼革命,因此改变了全世界物理学家的思想。本书的哲学内容绝不是可有可无的,事实上,本书的哲学体系有很强的针对性:以理工科出身的人为主要读者。也就是首先要成为人,然后再做某种人。现在很多理工科学生尽管学了不少科技知识,但人文修养确实有待提高,希望搞理工科的人不会再认为哲学与自己的工作和人生无关。伟大领袖毛主席(不必改动,这是对毛泽东时代的回忆)说:"我们这个民族有数千年的历史,有它的特点,有它的许多珍贵品……今天的中国是历史的中国的一个发展,我们是马克思主义的历史主义者,我们不应当割断历史,从孔夫子到孙中山,我们应当给以总结,承继这一份珍贵的遗产。"[1]534

伟大的孙中山先生说:"我们今天要恢复民族精神不但要唤醒固有的道德,就是固有的知识也应该唤醒他。中国有什么固有的知识呢?就人生对于国家的观念,中国古时候有很好的政治哲学。我们以为欧美的国家,近来进步很快,但是说到他们的文化,还不如我们的完全。中国有一段最有系统的政治哲学,在外国的大政治家还没有见到,还没有说得那样清楚的,就是大学所说的'格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下'那段话。把一个人从内发扬到外,由一个人的内部做起,推到平天下止。像这样精致开展的理论,无论外国什么政治家都没有见到,都没有说出,这就是我们政治哲学中的宝贝,是应该要保存的。这种正心、诚意、修身、齐家的道理,本属于道德的范围,今天要把他放在知识范围内讲,才是适当。我们祖宗对于这些道德上的功夫,从前虽然是做过了,但是自失了

民族精神之后,这些知识的精神,当然也失去了。所以普通人读书,虽然常用那一段口头禅,但是多是习而不察,不求甚解,莫名其妙的。”[2]411 按照西方哲学的行话,孙中山先生的意思是:大学的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下还是一段熟知而非真知的话,很有必要用西方的知识论哲学来重写,才是适当。本书用了较多的篇幅,多次习而察知,力求甚解。

任伟哲学是数学化的场论,不是实证的,但又是可实证的,不是可知的,又是可知的,不是可说的,又是可说的,见本书第一版后记作者母亲关于数学化的场的提问[3],旨在改变哲学的研究对象和研究方法。将哲学的时尚——生活世界(如哈贝马斯的哲学)数学化为场以表达自然和社会的无限复杂性并穿透主体间性的哲学难题。本书第一版与第二版在这一中心思想上是一致的。主要涉及社会化历史性的场(历史唯物主义,第一版)和世界化时间性的场(辩证唯物主义,第二版)。相当于宏观经济学与微观经济学。正如本书第一版已指出的,作者在康德与黑格尔之间打了个活结,即不是实证的,但又是可实证的,不是可知的,又是可知的,不是可说的,又是可说的,中庸,具体问题具体分析。用语言学的术语,场变成一种能指以兼容并接纳各个哲学家的哲学中的所指。用程序设计的语言,任伟哲学中的场是一个地址,可存放不同的数据。第二版形式上是将中国古代的四书简化为大学一书,用认识论与本体论统一的方式重写,用中庸=至善打通四书。小的方面突出了——珍爱家庭。总体定位是——这是七本有中国情调的哲学和科学著作,也是作者的七本自选集。

作者对科学与哲学问题的探索,强烈地依赖于作者的电磁场理论功底。同时作者的电磁场与引力场研究也深深植根于中华民族的哲学传统,特别是气一元论的传统。经过张载、王廷相、王夫之等先哲的研究,气本体论达到了相当深入的层次。本书展示的正是气本体论的改进和应用。经过作者的研究,阴阳不测之谓神体现的是海森堡的测不准关系式,与康德哲学中的两种自由(必然性)正好吻合上。本书第一版论证了共时态的辩证法建构,第二版将论证历时态的辩证法建构。实现了对一阴一阳之谓道和阴阳不测之谓神的同时理解和同时应用。从根本上回应了新康德主义的代表人物纳托普对现象学的挑战。协调了时间的奔腾向前(海德格尔的存在论)与时间的永恒轮回(胡塞尔的认识论)的矛盾,用的是从真空中的麦克斯韦方程到介质中的麦克斯韦方程的办法。也就是在整体奔腾向前的存在哲学中自洽地包括永恒轮回的具体概念。因此,作者本来预计 2025 年完成的哲学体系因找到了好的研究途径和表现形式,在 2016 年年底就得以完成其雏形。

(三)真空中的时谐平面电磁波研究

本书第一版中,作者通过地球绕太阳自转、公转和四季变化的研究给出了自旋为 2、1、1/2 的粒子运动的经典物理学解释,从而为用经典物理学而不是量子物理学研究平面电磁波的自旋开辟了道路。通过对时谐平面电磁波在两个周期内电磁源、电磁位、电磁场、电磁张量的时空变化研究,得到自旋为−1、0、+1 和自旋为−2、−1、0、1、2 的平面电磁波解。此项研究是在粒子自旋已知的经验事实的基础上在粒子的内禀空间进行的经典分析,其基础是一百多年以前已证明的麦克斯韦方程在保角变换下的不变性。麦克斯韦方程的这种尺度不变性与量子力学无关,因而可将经典麦克斯韦方程用于内禀空间,这一空间尺度比量子力学小两个数量级左右,但远远大于弦论、超弦等理论所考虑的空间尺

度。此研究将深化人们对电磁场波粒二象性和自旋的理解和解释。

宇宙微波背景辐射现在已写入大学教科书中[4]，对宇宙微波背景辐射的研究工作曾分别获得1978年和2006年的诺贝尔物理学奖。宇宙微波背景辐射可以看成电磁学真空的物理实在，无论是基于大爆炸理论(不同时可强制同时[3])，还是牛顿的绝对时空[5](时间有先有后[2])。牛顿的绝对时空之所以能够复活是“由于对宇宙背景辐射的精密测量与了解，我们今天已经可以把它用作理想的参考系。比如，太阳相对它的速度是369±2公里/秒。”[4]国内还出版了一些有助于理解宇宙微波背景辐射的专著[6-8]。

时间问题是几千年来很多哲学家的论题。柏拉图、亚里士多德、普罗提诺、奥古斯汀、康德、黑格尔、柏格森、胡塞尔、海德格尔、皮亚杰等都对时间问题有独特的理解和解释。特别是皮亚杰在其论著《结构主义》中引入四阶群讨论时间相关问题。从物理学上研究时空的代表是牛顿和爱因斯坦。但所有上述哲学家和数学家、物理学家都没有找到时间算符应满足的约束条件。国内关于时间空间的科学论著也不少[3,6-20]。众所周知，电磁场理论的基础是真空中的麦克斯韦方程组，现在真空有了比麦克斯韦的时代更为丰富的含义。在本书第一版的第九章中，作者已打通绝对空间、绝对时间和相对时空。特别对电磁源而言，是一种空间表象的公式体系。在本书第一版的第十章中，作者通过对麦克斯韦方程组有关方程求时间的一阶导数，开启了对电磁源的时间表象的新道路。一个自然的追问是能否再求二阶导数、三阶导数、n阶导数、无穷阶导数(初步的结论是八阶以上导数就没有新的东西出现了)，所以探讨时间与麦克斯韦方程组成为水到渠成之事了。而打通电磁源的空间表象和时间表象，成为真空中的时谐平面电磁波研究的中心论题。时谐平面电磁波的引入使得微分算符代数化，为进一步用群论研究问题提供了可能，同时使得自旋的分析简化为平面波本征波矢的自旋分析。

王正行写道[4]149，矢量位和标量位是描述电磁场的基本量，场强是电磁场在经典或宏观极限的观察量[11,12]。电磁场理论可以从理论物理[13]、大学物理[14]、光子学[15]、哲学[16]、电动力学[17]等各方面来理解，我们的研究限于文献[17]第1.8节对偶场也就是电磁对偶性[13]的深化，此研究只包括在通常意义上电中性的真空中的电磁场，不包括具有非零质量带电粒子产生的电磁场。重点又在电偶极子(电中性)产生的电磁场，也就是探讨无源麦克斯韦方程的有源性。众多电动力学书籍中特别引用文献[17]的原因是该文献第311页上例4的结论“荷质比相同的不同带电粒子组成的体系不会有偶极辐射”曾经对研究工作有重要推动作用。

在本书第一版中作者已从概念上完成了牛顿和爱因斯坦在时空观上的否定之否定，我们将在哲学家黑格尔时间的真理是空间的论断的启发下，导出时间算符必须满足的微分方程，从而在时间问题上做出实质性的数学化的贡献。时间算符所必须满足的微分方程的获得，从数学上说，就是给出了将牛顿绝对时空与爱因斯坦的相对时空应该满足的约束条件。从伽利略认为大自然是用数学写成的一本书以来，没有好的数学很难研究现代物理。从学术史的意义上，作者得益于最近一百年数学物理的发展，特别是吴大峻和杨振宁将纤维丛和规范场打通。同时，这一结果的获得还使我们独立于宇宙微波背景辐射得出了电中性电偶极子中电荷用电磁质量表达的方程。这一方程与基于宇宙微波背景辐射得到的方程完全一样。换句话说，从研究宇宙微波背景辐射开始是作者真实的研究历史轨迹。后来发现没有宇宙微波背景的经验事实照样可以导出真空中电荷与电磁质量的数

学关系式。只是基于宇宙微波背景辐射的推导,数学上简单得多,而物理上复杂一些;基于时间的几何化推导,数学上很高深,而物理上相对简单。

2015 年,Chanyal 在美国《Journal of Mathematical Physics》上发表了 18 页长文,致力于在有源麦克斯韦方程的框架下,将引力场与电磁场在某种意义上统一起来[21]。但是引力场的自旋没有被讨论。我们利用本书第一版中提出的一系列思路和手段解决 Chanyal 想要解决的问题,将以如下几项研究为基础并向前发展。

① Carlos. R. Pavia 领导的课题组分别于 2014 年和 2012 年发表在《IEEE Transactions on Antennas and Propagation》上的论文,特别是关于 Minkowskisan 各向同性媒质的物理意义的解释[22]。

② Nikitin 关于麦克斯韦方程与对称性(英文专著)、轴子(axion)电动力学(美国《物理学评论》D 辑,2012 年)和任意自旋的 Laplace-Runge-Lenz 矢量研究[23]。

③ Lang 和 Raab 发表在美国《Journal of Mathematical Physics》上的论文[24],他们通过组成关系的研究暗示出麦克斯韦方程组有接受自旋为 2 的部分场(引力场)的可能性[3,15]。我们将在真空中时谐平面波的特殊情况下构造出自旋为 2 的引力子解。

④ Ivan Ferrandz-Corbato 等发表在美国《Physical Review Letters》上的论文,彻底打通了电磁对偶性和手征守恒性[25],将十分有助于对电磁源的理解。

⑤ 对于不修改麦克斯韦方程就能统一无源情况下的电磁场和引力场做出鉴定性研究后,我们还将吸收 Fedorov 发表在《Physical Review E》上的论文的思想[26],保留修改麦克斯韦方程以对自旋为 2 的引力场进行量子化的可能性。关键性方程[3,15]是 $6=2\times3$,$3=2+1$。这一问题不是本书前三卷的研究内容,但是可作为研究前景,将在本书第四卷到第七卷中展现。

采用本书第一版中提出的由电偶极子(无总电荷)作为出发点的方法,也就是更加深入地研究无源麦克斯韦方程的有源性[27]。在哲学上吸收了郭像、张载、王夫之、熊十力等中国哲学家关于宇宙本体对立统一规律的研究,并充分利用麦克斯韦方程在保角变换(一种特殊的尺度不变性)下的不变性,在真空中将牛顿万有引力定律与库仑定律统一起来[28]。核心在于将库仑定律理解为同号电荷的库仑定律与异号电荷的库仑定律。再参考用一个实函数取代两个或四个旋量函数的思想[29]。与量子场论和粒子物理基于高能物理做实验的研究传统不同,利用一百年前就已证明的麦克斯韦方程在保角变换下的不变性[28];在宇宙微波背景辐射这种特殊情况下,统一牛顿万有引力定律和库仑定律(以基于本书第一版独创的自旋解释为出发点),虽然空间尺度比当前量子力学还小两个数量级左右,但比理论物理中基于弦论和超弦的空间尺度大得多[18]。思路和手段都是经典的,属于电磁场理论学科。

最近英国剑桥大学还发表有关用具体对称破缺理解和解释电磁辐射的应用性很强的文章[27]。我们的工作得益于吴大峻、杨振宁的先驱性工作[30,31],也得益于关于电磁对偶性的综述[32]。我们关于电磁场方程、电磁源和电磁位函数的研究除了在微波理论与技术[22]和天线与电波传播[22,27]有应用外,还在凝聚态物理[33]、光电子技术[34]、复杂人工介质[35]等诸多领域都能找到重要应用。

作为一个在二十世纪七十年代国内大学学数学的人,作者早已熟知陈景润通过长期努力攻克哥德巴赫猜想的事迹;关注怀尔斯不发表论文,用十年时间证明费尔马大定理的

壮举;特别吸取了佩雷尔曼花十多年时间证明庞加莱猜想的成功经验。作者在大学学普通物理的时候就对高斯定理产生了惊奇(西方哲学家有言:哲学始于惊奇),因而产生了所谓关于高斯定理的三十年沉思。通过二十多年的连续研究,作者逐渐澄明这是一条通向时间的真理的道路。在杭州电子科技大学的十年,作者一直坚持了真空中时谐平面电磁波的研究,包括到浙江大学旁听代数拓扑和微分流形课程,其成果完全发表在本书第一版中[3]。根据佩雷尔曼的经验,在研究工作出现难以克服的瓶颈的时候就再一次进修数学。2012 年至 2015 年作者驻留加拿大,到多伦多大学旁听了多门数学和物理课程。好在作者有对高斯定理的三十年沉思,有对狄拉克方程的独特理解[5],有本书第一版第八章到第十章和后记中提到的时间与电磁场理论的准备性研究;同时钻研中国古代哲学、狄拉克全集和麦克斯韦的原始论文,寻找思想来源,完成了数学和哲学水平的双重提升;和美国普林斯顿大学数学博士、加拿大维多利亚大学教授马君岭进行了多次讨论并得到鼓励和激励,最终完成了多于五个真空中的时谐平面电磁波引理的证明,走的是佩雷尔曼证明庞加莱猜想的道路[3]。

(四)电磁场与电磁波的数学化

电磁场与电磁波还需要进一步数学化,可能出乎广大读者的预料,其实也出于作者的想象力。但是从 1994 年到美国开始(如果更早还可追踪到大学时代学习普通物理的高斯定理时),作者就花了很大力气进行相关研究。本书第一版记叙了作者对高斯定理的三十年沉思,第二版不同的地方在于融入了广义相对论的元素,首先是将电磁场的矢量源变成与广义相对论一样的张量源。电磁场八个未知量八个解,分别有自旋为 1 的电磁波解两个,自旋为零的电磁波解一个和自旋为 2 的引力波解两个,自旋为 1 的引力波解两个和自旋为零的引力波解 1 个,难就难在自旋为零的引力波解,这是一个由于电磁波有能量,因而有质量($E=mc^2$),由质量激发的场。也就是说引力场与电磁场的耦合就在这里(自旋为零)。这一解分别对应于电中性和电荷为零(不带电)两种状况。因此电磁场与电磁波的源除了通常理解的电流源和电荷外,还有电磁质量(能量)源,而这一电荷质量对偶性引起的质量将激发出引力场。这是可以用数学上循环群来分析和解答的问题。明白了引力场与电磁场的物理机制,就可以写出系统的拉格朗日函数,并按正则量子化的办法,仿照电磁学上对电磁波进行量子化的方法进行量子化。用平面波解很容易核实各种本征平面波的自旋,基于正确的平面波解也就很容易量子化。

有人认为作者把一些普通工程电磁现象、普通物理效应(及其普通数学方法)理解得过于“神秘化”,希望借助其解决一些基本物理问题(如电荷、时间与电磁场的本质及其他相关问题)。并且认为这种研究手法无异于缘木求鱼(通俗地说,好比是用初等数学研究高等数学的本质,是不可能产生积极效果的)。按照一般传统,近代物理对该类基本问题采取还原论与呈展论思想手法。前者代表如用规范场论、弱电统一理论、SU(5)/SD(10)大统一理论、超对称论、弦论等来研究时空、电荷与场的本质;后者代表如理论物理学家文小刚将时空晶格化,用类似固体物理中产生声子场方程的手法来演绎出电磁、光子场方程。即使不论上述近代物理手法是否最终正确,将此与作者的思想作横向比较,作者的思路和手法也过于陈旧落后,也缺少特别的新意。

对于以上评论,作者试图做出回答如下:正电荷、负电荷、磁铁的南极、磁铁的北极、电荷与电磁质量的关系,确实是很神秘的问题,很少有人能说得清楚,有人干脆说电荷是一

个电磁学上的元问题,不能进一步追问。作者认为在自然科学研究上无禁区,没有什么不能进一步追问的问题,只是追问的方法需要融入哲学的方法,在某些问题上自然科学的方法可能苍白无力。作者成功地用初等的方法、小学四年级以下的数学解决了爱因斯坦终身以及全世界物理学家一百多年没有澄明的刚尺和原时的不变性问题。1905 年爱因斯坦相对论涉及的数学仅仅相当于现在大学本科水平,所以成功地解决电学问题不是依赖于数学上而是物理上的洞察力。这是 Smythe 在其著作《静电学和电动力学》前言中的话。麦克斯韦方程本身产生于规范场论、弱电统一理论、超对称论、弦论之前,麦克斯韦没有用到这些高深的数学、物理理论就写出了麦克斯韦方程。作者认为,麦克斯韦方程的本质既可以用现代数学工具、现代物理理论来研究,也完全可以用麦克斯韦时代的数学工具来研究。某种意义上,现代数学、物理方法沉醉于高深与时尚,丢掉了物理学最重要的本质,大自然具有相当的质朴性,并不是数学用得越多越好,越深越好。经典物理学的问题,用经典应用数学就基本够用,而我们还涉及了现代数学,如群论。中国既有缘木求鱼的成语,同样又有杀鸡焉用牛刀的说法。我们的理论基于本书第一版对自旋的经典解释,将量子力学已经抛弃的轨道概念,重新用时谐电磁场的空间变化来研究。而当前量子力学是把这一空间区域当作一个点来处理的,作者是用老方法研究新问题,是有新意的。这一空间尺度既远远小于经典电磁场理论的尺度,又远远大于弦论、超弦的尺度。而由麦克斯韦方程的尺度不变性,这一特殊尺度上是可以发现电磁学的规律和本质的,特别是电磁源的规律和本质的。由于宇宙微波背景辐射的真实存在,我们的方法还具有尺度无关性,这是对本书第一版高斯定理的三十年沉思的深化。高斯定理的积分形式适用于任意曲面,特别适用于不同半径的球面,因而电磁学定律具有尺度不变性。我们的尺度是用两个波长来标示的,而波长本身又是可变的。这是在大数学家 Weyl 提出规范场论后找到的正确的尺度不变性,作为相位不变性的补充。偶极矩和电磁质量(因而电磁能量)都具有某种尺度不变性,这可能是电磁场与引力场长期不能统一的根本原因。过去一百年人类只在相位不变性上做文章,而对尺度不变性有所忽视。物理学就是几句话(见本书第一版后记),我们希望这几句话能够引导物理学研究的新潮流。量子物理中的纠缠态在经典物理中有类似现象,这是作者对波粒二象性的本质解释。库仑定律和万有引力定律在宇宙本体中存在与绝对距离无关的形式,这是作者的发现。电磁场在具有相位不变性的同时还具有尺度不变性的根本原因是电磁场具有两个独立的不变量。如果将这两个不变量的线性函数写成复数形式,则显然电磁场既具有相位不变性又具有尺度不变性。相位不变性是局域特性,尺度不变性与整个宇宙有关。仅就方法而论,也是有创新的,将广义相对论上通过平面波研究自旋的方法用到电磁学上来,特别是研究自磁为 2 的电磁场是一种方法创新,还不仅是研究新问题。至于文小刚的书,作者是看过几遍的,由于仅仅在自旋为 2 这一点上与作者的思路吻合,我们认为没必要引用。因为文小刚的工作与我们的工作不属于紧密相关的,文小刚根本没有将电荷投以质量表示的目光,更没有给出时间算符应满足的微分方程的思路和结果。条条大道通罗马,各显神通。研究风格不同的作者之间相互不引用也是正常的现象。

有人对作者说:“麦克斯韦建立的方程组说明了光是电磁波,但电磁波是什么至今还是一个未知数(尽管人类对电磁波的现象已有很多了解和应用,但电磁波的本质至今仍不清楚,所以产生了光子的质量既为零又不为零的电磁场理论困境)”。有人根据自己所知,认为该问题其实根本不存在,光子静止质量为零,运动质量不为零,这里数学与物理背景

清晰，根本不存在任何矛盾，并且查了作者所引用的 Jackson 所著《经典电动力学》的第十一章和第十二章，也没有看到该所谓“电磁理论困境”。

作者对上述评论的回答如下：首先，对于科学研究，质疑与被质疑都代表科学精神，对科学本身是有积极意义的。质量为零本身就是不可想象的，因为质量代表有某种物质，而质量为零代表什么也没有的物质，所以不可想象。因为广义相对论早已证明质量有正定性，既然质量不可能为负，那么质量为零在物理上就是不可能的，在数学上也是不可能的。工程上可以把小于多少的量近似为零，但电磁场理论作为一种物理理论，一种数学化的物理理论，是不可以把非零的质量置零的，所以 Jackson 的《经典电动力学》前言（而不是第十一章、第十二章）中就报道了光子质量小于多少的实验数据。除了质量为零不合法外，光子静止也是一个不合法的概念。无论光子还是光波都是以光速传播的，光子和光波是光作为本质显现出来的两种现象，光子一旦静止就不再是光子，光子总是以光速运动才是光子，光速不变原理中光包括光子和光波两种状态，这是光的波粒二象性的原始定义。光子静止作为一个“便于理解”的概念，对相对论的初学者也许有些帮助，但真正说来应该从物理概念中清除出去。另外，根据相对论，静止质量、静止能量、动质量和动能量四个变量中只有两个变量是独立的，光子已用了动质量和动能量，已经不允许再用静质量和静能量了，动质量 $E=mc^2$ 是相对论的要求，$E=hw$ 是量子力学的要求。光子与光波本是一个东西的两种表象，所以即使作者退一步宽容光子静止的合法性，也不能允许光子的静止质量为零。光子静止的概念相当于把死人与活人相混淆，人死了就是尸体，光子一旦不以光速运动就不再是光子。当然一般的研究人员没有想得这么深，特别是不明白对光子而言“绝对静止＝绝对运动”，这是本书第一版的表达，第二版修改为“人性目光下的绝对运动＝神性目光下的绝对静止”。

这一问题是爱因斯坦一辈子（从 16 岁起）没有想清楚的问题，本书旨在消除这一矛盾。这一矛盾是由于当前物理学家容忍相对论（$E=mc^2, m=0\Leftrightarrow E=0$）与量子力学（$E=hw$，光波作为高频电磁波，$h>0, w>0, E>0, E=0$ 与 $E>0$ 矛盾，$E=mc^2, E>0$ 与 $m>0$ 不矛盾）矛盾所造成的，但从经典电磁场理论来看这一矛盾是可以在本书理解和解释的电磁场理论中消除的。光子的绝对静止就是光子以光速作绝对运动。我们认为光波是电中性状态的，光子是不带电状态的，这两种状态都以光速传播。我们可以斩钉截铁地说，光子的动质量是不为零的。光子静止质量为零或者说光子动质量可以为零都是无物理依据的不合法概念，必须从物理学中清除出去。作者相当于到宇宙之外去看了一下宇宙，发现了宇宙这一神秘的一面。

其实《圣经：创世纪》第一段就讲了这一件事，这就是老子的道。但《圣经》没有说圣灵的速度是多少，通常理解是无限的速度。但《圣经》又用水来表征圣灵，这就给我们启示，这一光子流有可能是以有限速度传播的。质量与电荷是有关联的，因此找到了质量与电荷的数学关系，就不会再认为光子静止质量为零是合理的了。电荷为零作为一个含光子动质量的方程存在非零动质量解。当然作者宽容了不明白真相的评论人对作者工作的不恰当评论。既然专家都有困惑，这当然是目前电磁理论的困境，这一困境有多种表现形式和表现方式，这里仅是一个作者认为相对浅显的方式显现的问题。说浅显，在哲学上还是很深奥的，这涉及对波粒二象性的理解和解释，现行所有文献对光的波粒二象性的解释都没有完全到位。通常理解宇宙微波背景辐射是大爆炸的产物，天外还有天。作者理解，宇

宙微波背景就是宇宙本体,天外已无天了。虽然天外无天,但作者运用想象力还是可以到天外去走一遭的。

(五)自否定的辩证法何以可能

作者对于辩证法的沉思是由邓晓芒的论著[36]引发的。邓晓芒说他正在建构自否定哲学体系,在他的论著中有好几篇讲辩证逻辑的文章。回顾哲学史,我们认为自否定哲学的开山鼻祖还是斯宾诺莎。斯宾诺莎有句名言"规定就是否定",如果我们深入解析,回到斯宾诺莎一个实体两个属性的哲学体系,就可得到:实体=(规定,否定)。这是作者理解和阐释的完备一元论。用数学语言来刻画就是:某种意义上的完备一元论=(某种意义上的规定,这种意义上的否定)=(X,ϕ)。这里 X 是哲学一元论的规定,ϕ 是对这种规定的否定,也就是对这种规定的补充,ϕ 既可称为空集也可以称为余集,在本书中对这种空集和余集不加区分。在我们的哲学体系中,X 通常代表 2^N-1(N=正整数)个元素,(X,ϕ) 构成完备 N 元论(共 2^N 个元素)。按邓晓芒的说法,ϕ 称为自否定内核,它不是在哲学体系之外的,而就在哲学体系之中,与 X 具有平等的地位[37]。

从哲学史上来定位,自否定辩证法在共时态的情况下与阿多诺的否定辩证法[37]有很深的关联。简单点说,完备一元论并不是柏拉图以降的第一哲学一元论,基于同一性原理第一优先的形而上学,而是基于两个元素且并无先后的平等二元论。这涉及俞吾金提到的人本与物本的悖论的作者解答,人的否定是物,物的否定是人,真正的人本主义,完备的人本主义必然包括"人、物=不是人"两个元素,这两个元素是同样重要的,没有物(其实只要没有食物,如俞吾金举例说的饥饿时的食品),人就不能活。同样,没有人、物本身,与人无关的物,尽管存在,但对人没有意义。所以成熟时期马克思哲学主要讨论了与人有关的物,也就是人对物的所有权、占有权、所用权等。同样对唯物主义一元论的理解"物、不是物=人"才是完备的。承认世界的统一性在于它的物质性的前提下,在游戏规则的意义上,当下既有人也有物,物和人就基本上是平等的。当然人类逻辑和语言都离不开同一性,没有同一性人就不能思维。只是在强调同一性的同时,不能忘掉隐而不显的差异性。语言是由同一和差异组成的,在"人、物"的写法中,尽管我们说人和物是平等的,但人可能还是稍微重要一点。同样,在"物、人"的写法中,我们认为物还是稍微重要一点。这是在平等这一同一性中落实差异性(不平等)的范例,是平等与不平等的对立统一,只是比通常意义上的对立统一更高了一个层次。以前苏联教科书体系搞得太简单化了一点,阿多诺和张一兵[37]有很多好的讲解,请读者去细读。同一性的最大危害是资本逻辑下的货币拜物教。一方面,在讲唯物主义的时候要坚持马克思主义把物质生产活动放在首位的立场和观点;另一方面,又要反对资产阶级意识形态,过分强调物对人的支配、奴役作用,坚持社会主义以人为本的核心价值观[37]。货币拜物教导致数字同一性、量化同一性,导致了人类生活的种种异化现象[37],是作者深恶痛绝的。

最近出版的一本美学著作[38],将主体、客体用时间性实现三位一体,缺失了完备二元论的第四个元素、与审美活动无关的整个自然、与审美活动无关的整个人类社会等。也就是说,缺失了 ϕ,只有 X,一阴(ϕ)一阳(X)之谓道,单独的 X,单独的 ϕ 都不能成为道。比如康德哲学体系是完备的:康德哲学=(X,ϕ)=(现象,物体自身=自在之物)。如果将现象分解为主体、客体,获得现象的活动三个元素就仍然是完备的。比如对叔本华哲学可以

写成(应该说改铸成):叔本华哲学=(意志,表象)=(行意志的人,有意志的表象活动,表象对象,无意志、无表象的自然)。叔本华认为自然界也有意志,十分牵强。尼采认为自然界本身是无意志、无表象(能力)的。本书同意尼采的观点而反对叔本华将意志泛化的做法。人化自然也许可看出某些人的意志,但自在自然应该说没有人的意志,本书只讨论人的意志。

(六)我们与我它的辩证法

张世英夹叙夹议地转述了宗教家、哲学家马丁布伯的"被使用的世界"与"相遇的世界"[39]。作者去除了马丁布伯我你关系所指的我与上帝的关系,上帝本是人类的异化。所以本书中的我们就是现在特定时段活着的所有人,包括人与人之间的关系,简称我们关系。这是一个"相遇的世界",是永远同时的现在进行式。另一个就是我它关系支配的"被使用的世界",在被使用的世界中,我是每个人自己,它不仅包括物、事,也包括另外的人(我自己以外的人)。张世英断言[37]:"把一切都看成是使用对象的人只能生活在过眼云烟中","仅仅按照'我它'公式把一切都看成是'它'(物、对象)而生活的人,是只有过去而无真实现在的人"。综上所述,我们与我它是不同时的,作者对辩证法的贡献就是将我们与我它不同时强制同时。

从前文可见,我们与我它的非同一性既体现了斯宾诺莎一个实体两个属性的哲学精神,又体现了中国哲学一阴一阳之谓道的精神。只是这里的阴阳具有时间上的错位,本来我它和我们是相互生成的关系,我们中有我它,我它中有我们,环阴而抱阳的关系。这是本书第二版在辩证法上相较于第一版的重大突破,这已不是西方的布尔代数,而是中国的太极代数[16],和古希腊的"Physis=Logos+Aletheia"似乎也有某种关联,与中国的熊十力哲学的体用不二、既体既用也有可会通的地方。

(七)以语言为例说明不同时强制同时到底意味着什么

上节介绍了我们关系和我它关系,在我们关系中时间是同时的,这主要意味着人与人之间的双向互动关系,我能理解你,你也能理解我。相反在我它关系中,举例来说它=石头,也许我能理解石头,石头就不一定能理解我了。本书哲学的秘密是通过人与人之间的可理解性,通达你与万事万物之间的可理解性。这在语言中特别明显地显现出来,我在说话,你在听话,同时我也在听我自己说出的话,并能听见你说的话。这样一种主体之间的关系是多么的美妙啊。反之,我与石头之间的关系,就达不到这么容易沟通的地步。这里进一步以语言学为例说一说本书主旋律的完备二元论。作者认为在语言学中包括这样八个世界,在时段$[T_0, T_0+\Delta T]$内:

世界1=每个说话的主体;

世界2=每个人说话谈及的对象;

世界3=每个人的言语活动;

世界4=作为言语活动背景(Aletheia)的自然界,也就是自然界向言语活动的聚集,包括无语的自然本身;

世界5=共在中的每个人,能说话也能听话的人;

世界6=人类语言活动中的语词作为物;

世界 7＝人和物,包括语言的深层结构,语法、语义、语用等;

世界 8＝社会化历史性的语言场＝空集＝余集。

这一模型比本书第一版中的语言哲学模型要复杂一些,当时只从变化的个人言语活动场产生变化的人类语言场,变化的人类语言场又产生变化的每个人言语活动场的角度来讨论,有点语言的独立王国的意味。现在的模型更好地展现了作为工具的语言(我它关系),体现为人类实践活动中的我它关系和作为存在的家的语言,体现我们关系,包括每个人,作为非同一性的个人,不可通约化的个人对语言场的感应(听)和响应(说)。在导论中提出这一问题对理解前三卷,甚至整个七卷都是有帮助的。同时,因为包括了作为背景的自然、社会、个人等现实性因素和社会化历史性的语言场作为超越性因素,语言已不再是独立王国。与现实、与人生、与社会生活有较强的关联。

八个世界元素不同时强制同时后构成世界化时间性的言语语言场,以完成第六节所阐述的我们与我它的辩证法。这一世界化时间性的场随着时间 T_0 的增长而与时俱进,而对每一时段 ΔT,这八个世界在时间上没有先后了。或者说在时段 ΔT 内,本来时间仍然是有先后的,但将其不同时强制同时后就没有先后了。世界化时间性的场与社会化历史性的场及其相互关系是下节重点阐述的内容。

(八)世界化时间性的场与社会化历史性的场

本书的重点在社会化历史性的场,而世界化时间性的场仅在第三卷第一章提及,且仅在比较狭窄的意义上使用。打个比方,如果世界化时间性的场对应于微观经济学的话,那么社会化历史性的场则对应于宏观经济学。这样一种意义当然也是对的,但最近作者对世界化时间性的场又做了深入研究,算是对本书前三卷相关论述不足的补充。

为了充分体现马克思的人是社会关系总和的思想,可以将哲学体系建立在如下四个世界的基础上,在时段$[T_0, T_0+\Delta T]$内:

世界 1＝人与自然的关系;

世界 2＝人与人的关系;

世界 3＝人与自然的关系和人与人的关系;

世界 4＝空集/余集＝人类社会化历史性的场＝一切社会关联的总和＋过去与未来的当下化;

世界＝世界 1＋世界 2＋世界 3＋世界 4。

世界就是世界化时间性的场,随着 T_0 的变化而变化。这里世界包括了人化自然、自然化人、人化自然与自然化人、与人无关的(在这一特定时段)无化着万事万物的自然。但在本书的哲学体系中,万事万物的意义和价值都是由人(每个人、所有人)来照亮的,避免了海德格尔哲学直接采用人在世界中存在的困难,因为当下时段活着的人只有有限多个,问题得到了极大的简化。虽然中国古人早就有天人合一、万物一体的宇宙情怀,但人与石头的双向互动多少有点牵强,人与人之间的双向互动则基本上说得过去。人类社会包括每个人的心思意念,一举一动,在现实性上都在自然之中(对这一时段而言)。这就是本书自然化人的精确界定,自然比人类大,自然(天)外无天了。另一方面,人是一种有思想、有意志、有目的、有超越现实能力的存在,人总能面对当下现实化的自然去存在(获得新的确定性和新的可能性),这就是本书对人化自然的精确界定。人化自然与自然化人在实践中

的统一就是世界 3 对人处事和待人接物的问题落实到人的生产和物的生产，或者说成人与成物。当然由于自然界在演化，人的追求也有无限性，因而与人无关的无化着的自然也始终存在着。我们是以存在者的存在和存在者的不存在的同时考察来澄明存在的意义的。所以世界化时间性的场有狭义和广义之分，世界总体是广义的世界化时间性的场，也可将世界化时间性的场按本书第三卷第一章狭义地理解为人与自然关系的世界 1。但现在作者倾向于只做广义的理解而不做狭义的理解，这样在人与自然、人与人、人与自然和人与人、空集中都有了世界化时间性的场的影响。尽管世界化时间性的场由世界 1、2、3、4 生成，生成之后又反过来影响（改变）世界 1、2、3、4。套用马克思的表达方式，世界化时间性的场既是世界 1、2、3、4 的前提又是世界 1、2、3、4 的结果。

人与自然的关系大致对应于意义世界和利益世界，人与人的关系可用经济基础和上层建筑来刻画，人与自然关系和人与人的关系对应于人的生产和物的生产领域。社会化历史性的场对应于超越性和每个人的不可用本模型穷尽的无限丰富性，落脚点在于现实的每个人与超现实（意识形态化）的人类社会。

采用阿多诺的非同一性哲学，每个人都是社会化历史性的场和世界化时间性的场中的一个星丛[37]，这是我们的哲学平等地看待每个人和人与人之间和平共处的特色。个体与人类社会之间是相互生成的关系，比如美是艺术在个体中的凝固，艺术是美在人类社会中的展开。同样文化是人类文明在个体中的凝固，文明是文化在人类社会和人类世界中的展开。这里的表述不仅体现了本书前三卷所说的文化以文化物、以句明意的意思，更增加了文化以文化人的特点。这里化也可以理解为教化，突出了文化的教育人的功能。

① 人与自然＝人和自然＝人和物＋事物。事物＝人化自然＋自然化人＋自然化人和人化自然＋在当下时段与人无关的自然＝自然之中与社会之外的人。

② 人与人＝存在论上的人类＝共在着的每个人＝当下时段活着的每个人＝承载着社会关联的每个人＝非对象性活动中的每个人。

③ 人与自然和人与人＝物质生产和人的生产＝对人处事和待人接物的每个人＝对象性活动中的每个人＝从事实性价值导致映射性价值的世界。

④ 社会化历史性的场＝一切关联的总和＝个人与人类社会的相互生成＝每个对象性活动的前提加上对象性活动的结果加上非对象性活动的解释加上非对象性活动的理解＝每个人的存在和本质＝整个人类社会的存在和本质 $T\in[T_0, T_0+\Delta T]$。

①＋②＋③＋④＝世界化时间性的场，在现实性上，自然最大，万事万物都在自然之中。在信息化生存的意义上，在人类精神的意义下，在客观不实在的意义上（自然也有演化，也有信息化），当下最大的天（人在其中的自然）作为定在。由于人为意义的超越性和每个人的主观能动性，已现实化的自然也总由人类社会所超越，人类存在加上人类意识作为人类社会存在又总是发展的，而且是与时俱进发展的。但对每一发展完成的时段，又仍然在自然之中。人类社会的每个人与每个人之间具有双向的互动（不同时可强制同时），个人与人类社会统一之后又是奔腾向前的，主要由人类社会的与时俱进的发展，次要由自然界的演化，导致整个自然的与时俱进的发展和演化。天外无天，天最大，在定在的意义上，天＝神＝自然＝主体；在信息化的意义上，每一时刻人的意识、人的意志、人的言行等一切存在活动的无限发展和自然的演化没有尽头，所以人化自然又总是发展着的，特别是与人无关的自然的演化自在的不可穷尽性、物质不灭性、人类社会的社会化历史性的场，

除了在三重意义上双向互动外(个人与个人、社会与社会、个人与社会),本身还是奔腾向前的,与时俱进的(T_0 是单调上升的)。因而世界化时间性的场类似于热力学第二定律总是奔腾向前的,时光是一去不复返的,社会化历史性的场在微观上(ΔT 固定以后)时间是永恒轮回的,时间是可以不同时强制同时的,而在宏观上,因 T_0 奔腾向前导致时间区间 $[T_0, T_0+\Delta T]$奔腾向前。关键点是世界世界着,一方面,世界在每一时段都大于人类社会;另一方面,每一时段之后,人类社会又发展了,自然也演化着,特别是无(与人无关的自然)也无着。所以随着 T_0 的与时俱进,人类社会(以社会化历史性的场为代表)和整个世界(自然)也在发展和演化。

人与言语、语言(人与人)、人与言语与语言、无言的自然作为背景(人和物、人化自然、自然化人、人化自然与自然化人、与人无关)的自然(语言的运动着的界限)。

以上给出了本节哲学体系的第一种排法,按照阿多诺非同一性哲学,既可以从世界1开始,也可以分别从世界2、3、4开始,形成下列矩阵:

$$\begin{bmatrix} \text{世界 1} & \text{世界 2} & \text{世界 3} & \text{世界 4} \\ \text{世界 2} & \text{世界 1} & \text{世界 3} & \text{世界 4} \\ \text{世界 3} & \text{世界 1} & \text{世界 2} & \text{世界 4} \\ \text{世界 4} & \text{世界 1} & \text{世界 2} & \text{世界 3} \end{bmatrix}$$

第一行前面解释过了,在这个矩阵中,第一列的元素是第一重要的,在并列的四个元素中,如果突出第一列的元素的话,我们可以得到另外三种解释,比如第二行人与人的关系摆在第一位,就可更好地理解历史唯物主义;第三行将人的生产和物的生产摆在第一位,又能更好地突出实践,与实践唯物主义的观点则更为接近;第四行将社会化历史性的场摆在首位,则有利于讨论哲学、艺术、美学、宗教等问题。第一行则是通常辩证唯物主义的排列方式,所以本节的哲学可以称为辩证的、历史的、实践的、人本的唯物主义。

(九)唯一的历史科学

沈湘平写道[40]34:“马克思甚至还从学科、科学的角度把自然科学与人的科学看成是一门科学:历史本身是自然史的即自然界生成为人这一过程的一个现实部分。自然科学往后将包括关于人的科学,正像关于人的科学包括自然科学一样:这将是一门科学。人是自然科学的直接对象……自然界是关于人的科学的直接对象,自然界的社会的现实和人的自然科学或关于人的自然科学,是同一说法。”马克思的这段话为研究自然科学出身的人了解人的科学指明了方向,也为本书在自然科学著作中包括人的科学提供了依据。

在文献[40]的扉页上引用了马克思更重要的论断:“我们仅知道一门唯一的科学,即历史科学,历史可以从两方面来考察,可以把它划分为自然史和人类史。但这两方面是不可分割的,只要有人存在,自然史和人类史就彼此相互制约。自然史,即所谓自然科学,我们这里不谈,我们需要深入研究的是人类史,因为几乎整个意识形态不是曲解人类史,就是完全撇开人类史。意识形态只不过是这一历史的一个方面。”从马克思这段话,我们知道自然科学与人的科学是不可分割、相互制约的。所以研究自然科学的人应该了解一点人类史。

沈湘平继续写道[40]166:“在我们看来,与法国相比,中国缺少理论大师的现状更甚,其中一个不可避免的重要原因就在于中国知识分子大多没有足够的哲学修养,能够真正把

握马克思思想体系的精髓并自觉地以之为基础研究的理论指导。这一作为科学的思想体系，研究其他学问的基础的科学理论就是马克思奠定的整体的，'一门唯一的'历史科学。"

这段话为作者写作本书以提升自然科学工作者的哲学修养提供了支持。同时现在确实有历史唯物主义而忘记历史的不良现象发生，作者认为强调马克思的"我们仅知道一门唯一的科学，即历史科学"是合适的。本书强调社会化历史性的场算是从历史科学到历史哲学的一种尝试。

参考文献

[1] 毛泽东选集(第二卷). 北京：人民出版社，1991.

[2] 思履，文若愚. 论语·中庸·大学详解. 北京：中国华侨出版社，2013.

[3] 任伟. 数学化的场论：球面世界的哲学. 北京：科学出版社，2013.

[4] 王正行. 近代物理学. 2 版. 北京：北京大学出版社，2010.

[5] 于学刚. 狭义相对论和量子理论一元化表述. 北京：科学出版社，2012.

[6] 赵峥，刘文彪. 广义相对论基础. 北京：清华大学出版社，2012.

[7] 何香涛. 观测宇宙学. 2 版. 北京：北京师范大学出版社，2007.

[8] 卢建新. 理论物理及其交叉学科前沿 I. 北京：北京大学出版社，2014.

[9] 郭树源. 时间与物理学. 北京：科学出版社，2011.

[10] 邵亮，邵丹，邵常贵. 空间时间的量子理论. 北京：科学出版社，2011.

[11] 梁九卿，韦联福. 量子物理新进展. 北京：科学出版社，2011.

[12] Thomas A G. Electricity and Magntetism for Mathematicians: A Guided Path from Maxwell's Equations to Yang-MiLls. Cambridge: Cambridge Univrersity Press, 2015.

[13] Chan H M, Tsun T S. Some Elementary Gauge Theory Concepts. Singapore: World Scientific, 1993.

[14] 际秉乾，舒幼生，胡望雨. 电磁学专题研究. 北京：高等教育出版社，2001.

[15] 曹昌祺. 辐射和光场的量子统计理论. 北京：科学出版社，2006.

[16] 王俊龙.《周易》经传数理研究. 北京：人民出版社，2015.

[17] 蔡圣善，朱耘，徐建军. 电动力学. 北京：高等教育出版社，2002.

[18] 陈蜀乔. 引力场及量子场的真空动力学图像. 北京：电子工业出版社，2010.

[19] 罗恩泽. 真空动力学：物理学的新架构. 上海：上海科学普及出版社，2003.

[20] Jackson J D. Classical Electrodynamics. New York: Wiley, 1999.

[21] Chanyal B C. Split octonion reformulation of generalized linear gravitational field equations. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56: 051702.

[22] Filipa R Prudencia, et al. Exact image method for radiation problems in stratified Isorefractive Tellegen media. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, 2014, 62(9): 4637.

[23] Nikitin A G. Laplace-Runge-Lenz vector for arbitrary spin. Journal of Mathematical Physics, 2013, 54: 123506.

[24] O L de Lange, Raas R E. Multipole theory and the Hehl-Obukhov decomposition of the electromagnetic constitutive tensor. Journal of Mathematical Physics, 2015, 56: 053502.

[25] Ivan Ferrandey-Corbaton, et al. Electromagnetic duality symmetry and helicity conservation for the macroscopic Maxwell's equations. Physical Review Letters, 2013, 111: 060401.

[26] Fedorov A V, Kalashnilou E G. Extended symmetrical classical electrodynamics. Physics Review E,

2008,77:036610.

[27] Dhiraj Sinha,Amaratunga Gehan A J. Electromagnetic radiation under explicit symmetry breaking. Physical Review Letters,2015,114:147701.

[28] Futton T,et al. Conformal invariance in physics. Review of Modem Physics,1962,34(3):442.

[29] Andrey Akhmeteli. One real function instead of the Dirac spinor function. Journal of Mathematical Physics,2011,52:082303.

[30] Wu T T,Yang C N. Concept of nonintegrable phase factors and global formulation of gauge fields. Physics Review:D,1975,12:3845.

[31] lWu T T,Yang C N. Dirac's monopole without strings: Classical lagrangian theory. Physics Review:D,1976,14:437.

[32] Chan H M,Tsou S T. Non-Abelian generalization of electric-magnetic duality:a brief review. International Journal of Modern Physics:A,1999,14:2139.

[33] Nelson D F. Generalizing the Poynting vector. Physical Review Letters,1996,76:4713.

[34] Lin Q,Fan S. Light guiding by effective gauge field for photons. Physics Review:X,2014,4:031031.

[35] Carlo Rizza,et al. One-dimensional chirality: Strong optical activity in epsilon-near-zero metamaterials. Physical Review Letters,2015,115:057401.

[36] 邓晓芒. 实践唯物论新解:开出现象学之维. 武汉:武汉大学出版社,2007.

[37] 张一兵. 无调式的辩证想象:阿多诺《否定的辩证法》的文本学解读. 2 版. 南京:江苏人民出版社,2016.

[38] 刘彦顺. 西方美学中的时间性问题:现象学美学之外的视野. 北京:北京大学出版社,2016.

[39] 张世英. 哲学导论. 北京:北京大学出版社,2002.

[40] 沈湘平. 唯一的历史科学:马克思哲学的自我规定. 北京:中国社会科学出版社,2016.

第一章　社会唯物主义一元论:劳动主义哲学

本章主要参考文献是文献[1],这是一部65万字的著作,是中央民族大学刘永佶教授的研究成果。尽管诸多措词和表述有待改进,但确确实实是一部劳动者(脑力劳动者)为劳动者而写的关于劳动者的集体意识和时代精神的著作。该书的时代背景是20世纪末很多社会主义国家的解体,以及21世纪初(2008年从美国开始)的全球化经济危机、金融危机。在该书的第一版序中,刘永佶发出了这样的呐喊:"以劳动为本位,为根据,为核心的自由人的联合体",必将在以劳动者的觉悟和斗争为内容的社会变革中实现!"劳动的哲学和哲学的劳动创造人类文明的新时代"。

我基本上同意刘永佶的主要观点,以转述他的观点为主,转述中自然也就有少数自己的观点。在文献[1]的跋中,刘永佶提到马克思、毛泽东之理论实践,可见他的学理依据主要是马克思本人和毛泽东本人的思想,这两位无疑是全人类和全中国人民心中的伟人,很有历史感。比如该书第798页引用了毛泽东的《在延安各界庆祝斯大林六十寿辰大会上的讲话》(引自《人民日报》1949年12月20日):"马克思主义的道理千条万绪,归根结底就是一句话,'造反有理'。几千年总是说:压迫有理,剥削有理,造反无理。自从马克思主义出来,就把这个旧案翻过来了。这是一个大功劳。这个道理是无产阶级从斗争中得来的,而马克思作了结论。根据这个道理,于是就反抗,就斗争,就干社会主义"。能把如此艰深的哲学道理用如此通俗易懂的话陈述出来,只有学通哲学的人才做得到,这反映了毛泽东同志深厚的文史哲功底和贴近生活、贴近现实、贴近群众的能力。

我对该书特别注意,还因为在该书的第429页写道:"社会性不仅是人的基本属性,也是对人存在和发展的基本条件和环境的规定。人的社会性具体化于经济、政治、文化各个方面。人类总体是以社会存在的,社会性是人存在的特殊的'场',任何个体人都在这个'场'中生存和发展,并以自己的劳动和意识来认知它、改变它、再生它。"刘永佶实际上也用了社会化历史性的"场"来描写现实中的每个人和由现实中的每个人组成的人类社会,而且以每个劳动者自己的劳动和意识来认知它,改变它和再生它。这是与本书第一版契合的[2]。每个人当然不只是个"介质球",而是具有感知、认知社会化历史性的"场"的能力的。而且可以根据自己的心境、自然的环境、社会的背景来理解和解释它,从而改变它。这是从认识论的角度来理解,从本体论的角度来理解,人更不只是一个"介质球"。每个劳动者都可以从每个人的自身实际、社会实际和自然实际出发,从已有的定在和可能性,通过自己的劳动的意志和劳动的实干,取得劳动的成果,从而生成新的定在和新的可能性,也就再生出社会化历史性的"场"。这种场的定在部分是确定性,这种场的非定在部分(有待确定的部分)则是信息化的。

1.1　劳动创造了人本身

人类身心发展史大致经历了腊玛古猿、南方古猿、晚期猿人、早期智人和晚期智人五

个阶段,大约一千万年的漫长历程,脑量分别为 300 毫升、600 毫升、1059 毫升、1400 毫升和现代人的脑量[3,4]。腊玛古猿还只具备人的雏形,“手”还在形成之中,直立行走还很不完全。南方古猿的手脚分工开始稳定化,从而有利于做最简单的劳动,如尝试着制造工具。晚期猿人如北京猿人则可以完全直立行走,可能已经有了简单的语言[3]。“人手给予人一个充满各种事物的世界,非常有助于打破固定不变的本能。”[5]315“不能否认脚掌变成手,变成专门获取和操作武器和工具的器官是人类智力发展的最有效的原因之一。”[6]55北京猿人可以制造更复杂的工具,已懂得用火,并在社会关系上开启了新的文明因素。早期智人距今 15 万年至 5 万年,在古人类学上又称古人。早期智人的身高和体重大有增加,男性化石长达 160 厘米,脑仍在进化中,“婚姻关系已从族内婚发展到族外婚”。晚期智人在古人类学上称为新人,出现于 5 万年前后,有了人伦道德和社会关系的明确意识。“自有劳动开始,人的思想和人的社会就一起参加了创造人类自身的历史运动”[3]。

使用工具和制造工具的劳动是人在自然界的一个伟大胜利[3]。劳动使人超越了其他动物的本能,在可塑性和应变能力上胜出其他动物。有形工具的使用和制造对人的硬件完善发挥了极大的作用。但无形工具——语言和艺术形象为人类智力(软件)带来革命性的变化,这一切都是人通过自己的劳动实现的变革[3]。详尽地叙述人类进化的历史不是本书的目的,但是希望读者明白劳动创造了人本身的真理性。即使对现代人而言,如果长期不劳动,也会变得思想麻木,四体不勤。现在很多家长只让小孩专心读书,有合理的一面,但让小孩尽可能早地做家务事也是有益的。我 6 岁开始操持家务,这对我后来的生活和研究工作都有着积极的影响。老年人如果长期不用大脑,更容易思维退化。重提劳动创造人本身的命题,有很强的现实针对性。现在有的大学生不想艰苦奋斗,不想通过自己的劳动改变自己的现状,投机取巧的心思太重。如果大家都投机取巧,不劳动或少劳动,谁来创造财富呢? 还得树立劳动光荣的观念。很多事情求人不如求己,自己就能解决的问题又何必求人。自己思考一下,动一动脑筋就能解决的问题,又何必到网上去查来查去。

1.2　社会历史阶段的六阶段学说

在文献[1]的第 607 至 614 页,刘永佶将社会历史阶段从社会制度变革角度分成如下六个阶段:原始社会、奴隶社会、封建农奴社会、集权官僚农民社会、资本雇佣社会、民主劳动社会。关于这一分类方法,刘永佶还另外出版过两本专著进行专题研究。主要的区别是区分了欧洲的封建农奴社会和中国的集权官僚农民社会,将过去两千年的封建社会更加准确地定义为集权官僚农民社会。当然别的一些书也有类似的提法,只是这本书显得更有理有据一些。另外一个新的提法是将共产主义社会重新定义为民主劳动社会,并将此前的资本主义社会定义为资本雇佣劳动社会,体现了劳动价值一元论的思路。我认为按历史唯物主义,人类的活动就是历史的一元论观点,从价值论的角度重新定义社会是更妥当的。历史唯物主义将物看成人的无机身体,但这一看法仅仅在人类总体的意义上是说得通,论到具体国家就困难了,到每个人就更困难了。按王伟光在其《利益论》[7]中的分类方法,“利益主体分为个人、家庭、集体、集团、国家和社会六个层次。这六个层次又可分为利益个体和利益群体两大类。利益个人是利益个体,家庭、集体、集团、国家和社会都是

利益群体”。正如王伟光在《利益论》中阐明的,利益首先是物质的、实物的,“利益本身体现出来的人与人的关系,首先也是一种物质的、经济的关系,其次才是思想的、政治的,伦理的关系”。价值主要是由当代人的劳动创造的,劳动总是社会化的劳动。因此按价值规律,特别是按马克思的劳动价值论和剩余价值学说来划分社会历史阶段,是符合劳动哲学或劳动主义的主旨的。马克思说:“人们奋斗所争取的一切,都与他们的利益有关”。

刘永佶基于马克思在生产领域发现的剩余价值学说得出劳动者创造价值的结论,从而自然地提出把分配领域的矛盾上升为社会主要矛盾。在文献[1]的第566页刘永佶写道:“劳动主义社会观也就是以劳动者为主体,并将劳动者素质技能和社会地位的矛盾作为社会基本矛盾。”我觉得劳动主义社会观的以上刻画还有待扩充一下,劳动主义社会的统治阶层是由劳动者组成的联合主体。而每个劳动者拥护不拥护(行为上)、答应不答应(意志上)、高兴不高兴(心情上)、满意不满意(结果认识上)社会制度,是每个社会要解决的基本问题。如果要上升到矛盾的高度就是社会体制与劳动者身体健康、心情愉快、结果满意的矛盾,是劳动者素质技能与社会地位的矛盾。前面一句是从每个人主观来理解矛盾,后一句是从客观来理解这一矛盾。这也是我们以下透视六个社会阶段的基本方法。所谓劳动一元论也就是矛盾一元论。

1.3　马克思是以劳动者为主体的劳动社会主义的创始人

在文献[1]的第三章,刘永佶通过大量引用马克思的原著,阐释了“马克思是劳动者的代表,他本人也是劳动者。他第一次系统地论证了劳动者的利益和阶级意识,他的哲学观念和全部理论体系的主体是劳动者,并从劳动者的主体性出发,探讨了劳动者从生产的主体向社会主体的转化。他是劳动者自觉的思想代表,毕生从事为劳动者谋利益,争取解放的理性劳动,由此而论证了劳动者的理性。”

我认为马克思是第一个从德国古典哲学走出来的思想家。他首先颠覆了德国古典哲学的开山之作——康德的《纯粹理性批判》。实际在人类有文字记载的几千年历史上,理性从来都表现为阶级性,根本就没有什么纯粹理性。各种思想无不打上阶级的烙印,统治阶级总是供养一些御用文人对社会关系和统治制度提供合法性“论证”。正如马克思本人所言:“统治阶级的思想在每一时代都是占统治地位的思想。这就是说,一个阶级是社会占统治地位的物质力量,同时也是社会上占统治地位的精神力量。支配着物质生产资料的阶级,同时也支配着精神生产的资料。”刘永佶说:“马克思是人类有史以来第一位系统的理性劳动者,也是第一位以系统的理性论证劳动的思想家。”

马克思认为,“人们的本质活动是劳动。劳动所需要的生产资料除自然形成的就是劳动所产生的,是人类劳动长期积累的结果,也是社会历史发展的结果,只能归全人类所有”。根据马克思的《资本论》,人的劳动是活劳动,生产资料是死的物。虽然也是前人劳动的结晶,但是生产资料本身不创造价值,它的价值按劳动价值论是不变的,创造价值的是过去人的劳动和当前人的劳动。抽象的一句话“只能归全人类所有”倒是比较好懂的,但怎样归全人类中的每个人、每个家庭、每个集体、每个集团、每个国家,就使事情无比复杂起来了[7]。所以海德格尔说“怎样”比“什么”更重要,世界是怎样的,比世界是什么更重要。比如世界是物质的,一句话可以了事,而世界是怎样的就难以回答。萨特批判马克思

主义是人学的空场,虽然有点过分,但马克思本人确实没有来得及对上述分配领域的无限复杂性展开深入细致的讨论。但据刘永佶研究,马克思对劳动者的人权、平等、自由和解放还是深表关切的。马克思还是高中生的时候就有为全人类而工作的思想,在青年时期信奉并宣传"真正的人道主义"(受费尔巴哈的启发)。反对资本主义社会对人的异化,后来通过资本主义社会这一"人体"的解剖,透视了以前各个社会("猴体")。并通过人与物的关系看出了人与人的关系,提出了"人的本质不是单个人所固有的抽象物,在其现实性上,它是一切社会关系的总和"的著名论断。

我上大学(1979 年)以前,报纸上好像在批判资产阶级法权,根据文献[1]的第 334 页我现在明白:"资本,即对他人劳动产品的私有权。""资本是对劳动及其产品的支配权。资本家拥有这种权力并不是由于他的个人或人的特性,而只是由于他是资本的所有者,他的权力就是他的资本的那种不可抗拒的购买力","资本就是积累的劳动"。以上这些话也直接来自马克思的《1844 年经济学——哲学手稿》。资本作为钱、作为物,本身是谈不上有什么权利的,有权的是钱和物的所有者。作为资本家的个人,或者作为阶级的一些人,所谓人权是个历史的产物,是资产阶级革命成功后的产物,主要指所有权,以及派生出来的占有权、使用权、转让权、收益权等,在不同的时期有不同的含义。用中国文化中的一个例子就很好理解,古时候所谓钦差大臣所持尚方宝剑本来是一个物,谈不上有什么权力,权力来自赐剑的人,这是从物的关系看出的人与人之间的关系。因为尚方宝剑是皇帝本质力量的对象化。同样蒋介石作为蒋委员长,显得只是一个人,但他是大地主、大资本家、官僚资产阶级和若干军队首脑(军阀)等整个国家机器中统治阶级的代表,具有很大的物质力量,蒋委员长的无机身体比一般农民就多得多。

在文献[1]第三章的第 359 页,刘永佶引用了马克思的大量文本阐述了一个劳动主义的核心理念:"马克思并不认为共产主义是消灭私有财产,更不是消灭财富,而是以新的制度使私有财产普遍化,即每个人都拥有以自己的劳动为根据的私有财产"。刘永佶转述了马克思"重建个人所有制"的内容及其公有制形式。说简单一点,就是"个人所有"与"共同占有"之间的对立统一。其实,美国现在就有这个倾向。美国的经济利益主要为大资本家"个人所有",但被"经理"们(包括总统也只是个"经理"而已)"共同占有"。只是美国当前的"个人所有"与"共同占有"还是资本主义的方式,而不是共产主义的方式(也就是刘永佶的劳动主义)。其实中国两千年封建社会(按文献[1]应称为官僚统治农民社会),整个国家为皇帝"个人所有",而被地主"共同占有"。

最后谈一谈一元论的问题,最近三十年关于马克思哲学的一元论提法很多,如辩证唯物主义一元论、历史唯物主义一元论、实践哲学一元论、实践本体论、人本主义一元论、劳动一元论[1]等,其实马克思在《关于费尔巴哈的提纲》中有一句名言:"哲学家们只是用不同的方式解释世界,而问题在于改变世界。"

所以我们认为马克思哲学一元论可以称为改变世界的一元论哲学,这既适合于革命时期(毛泽东提出"造反有理"的时期),也适用于社会主义建设时期。建设新中国也是一种改变世界的实践活动。可以简称马克思哲学为改变世界的哲学,马克思哲学确实也改变了世界。邓小平提出"发展才是硬道理",发展就是要改变世界,始终是老一套就谈不上发展。黑格尔说中国两千年封建社会就没有发展,因而没有历史。历史唯物主义的本质是人的发展的历史,所以发展是硬道理,改变世界是硬道理。发展是硬道理的哲学基础就

是马克思改变世界的哲学。按我的观点，发展不仅要有速度，而且要有加速度，因为根据物理学上的最小作用量原理，物质世界对一阶变分是稳定的。速度代表一阶变分，加速度才带来变化。按牛顿力学，匀速运动代表惯性运动，是一种没有改变世界的运动形式，改变世界的哲学就是一种有加速度的哲学。关于劳动主义或者劳动社会主义，是为未来社会指出了一种理论上的远景规划和前进方向。不管马克思也好，刘永佶也好，在肯定他们学说的良好动机的同时，我们要认识到任何理论都还是人的思维。思维的真理性要靠现实的社会实践来检验。所谓必然性，也主要是理论论证的必然性，不可完全当真。在现实的和未来的社会实践中，还要充分发挥人的主观能动性，既不能把马克思的话当教条，更不能把刘永佶的话当教条。要具体问题具体分析，一切从实际出发，实事求是，密切联系群众，多听群众的意见，看人民答应不答应，高兴不高兴，赞成不赞成，满意不满意再说。

1.4　劳动是社会主义的哲学观念

下面对文献[1]第四章进行解读，这部分的中心思想是强调把正确的政治方向放在首位。劳动是以每个劳动者的发展为目的人的活动。所谓劳动者的素质技能我理解和解释为：劳动者的素质包括劳动者的身体素质、心理素质、在社会上与人交往的能力和领导才能；技能则主要包括理论知识和操作（执行）技能。所谓劳动主义就是劳动者的主义，任何社会都是劳动者居多，也就是多数人的主义。在现象层面劳动的目的是为了物，但在本质层面劳动的目的还是为了人，为了大多数人的利益、幸福和发展。

刘永佶从中文、英文、拉丁文考察了文明的词源学含义："文明，就是人类以自己的主观努力和内在需要所驱动的劳动对自然物的改造与利用，以及与此同步的对人际交往和社会关系的调整。文明是人本质及其素质的综合体现，由六个要素构成：一、科学技术；二、生产方式；三、组织管理技能；四、生活方式；五、价值观和思想道德；六、语言和艺术"。以前常听到物质文明精神文明，按文献[1]的定义文明可以包括：科学技术文明、生产方式文明、组织管理技能文明、生活方式文明、价值观和思想道德文明、语言和艺术文明等六大方面。

生产方式确实是一个社会文明的标志，比如旧石器时代、新石器时代、农业时代、工业时代、蒸汽机时代、电气化时代、信息化时代、计算机时代等。

当然生产方式的改变是与社会的科学技术水平相适应的，特别是科学转化成技术和产业的程度相适应，科学技术作为第一生产力是文明的一个首要的标志。

组织管理技能文明就是一种执行能力的文明。比如中国古代有王道与霸道的区分。现代社会还残留着历史上遗留下来的各种管理形式，比如经理办公会议与董事会的对立统一，以及各种负责制。但劳动社会主义意义上的文明就是要以劳动者答应不答应、高兴不高兴、满意不满意、拥护不拥护为标准。

生活方式文明关键是看劳动者的生活方式，是否有利于劳动。比如第二天要上班，头天晚上还通宵玩乐就不是劳动主义认为的文明生活方式。我们提倡劳动是生活的第一需要，劳动是劳动者本质力量的对象化，劳动者的本质是由劳动者能做什么样的劳动特别是已进行了什么样的劳动来刻画的。现在自然资源不足，我们提倡节俭的生活方式，世界上还有人吃不饱、穿不暖。

价值观和思想道德文明主要是要树立劳动第一的观念、为人民服务的观念、为全人类工作的观念,无产阶级只有解放全人类才能解放自己。这是先进文化的发展方向。要尊重劳动者的人权,平等、自由、解放,尊重劳动者的权利,首先是要尊重劳动者劳动的权力。像有些国家最近越来越多的人失业就是劳动主义认为的不文明。又比如资本主义国家财富的所有权集中在少数大资本家手中,也是一种不文明。文明的标志应该是权利和财富都在劳动者手中。现在有的家庭由于种种原因,不让小孩和老人进行家务劳动,我认为也是不文明的。

语言和艺术文明的意思比较清楚,任何语言和艺术都要有利于劳动,反映劳动者的劳动;贴近劳动者的劳动活动,反映劳动者的喜怒哀乐;尊重劳动者的人格,反映并歌颂劳动者的劳动成果。

劳动主义的哲学观可以用毛泽东的一句话来概括:卑贱者最聪明,高贵者最愚蠢。毛泽东这句话要正确理解,这句话是个价值判断,而不是个事实判断。这里的高贵者是有钱、有权、有势的地主,资本家,官僚资产阶级。而卑贱者是指广大工人、农民,特别是农民。如果事实判断的话,高贵者可能聪明,卑贱者可能愚蠢。至少不至于高贵者最愚蠢,卑贱者最聪明。这是毛泽东的理性,是由他的阶级立场决定的,是典型的战略上藐视敌人的做法,对鼓舞广大群众参加“造反有理”的革命活动有极大的价值。毛泽东同时还有战术上要重视敌人的说法,也就告诫卑贱者要看到高贵者的聪明和自己的不聪明,很有辩证法味道。学理工科的人,往往重视事情的事实如何,忽视事情的价值如何,在面向事情本身的时候做出错误判断。这句话要用诗性的目光来看,毛泽东是大诗人,马克思也是诗人。马克思在 1844 年 8 月给费尔巴哈的信中写道[1]245:“您的两部著作《未来哲学》和《信仰的本质》尽管篇幅不大,但它们的意见,却无论如何要超过目前德国的全部著作。”

如果仅从事实判断来看,费尔巴哈两部著作的意义无论如何也不可能超过到 1844 年为止的德国的全部著作。但马克思这样说也没错,对他个人研究社会主义而言,其价值(也就是文本中的意义)只有他自己才最有发言权。表达上当然是采用了恭维和夸张的手法,意义存在有自然科学上的事实意义,在社会科学上的价值意义,还存在人文科学上的对个体本身和个体之间人生的意义。比如,中国古代男女婚配讲究门当户对。媒婆将男女双方家庭条件、个人条件,包括双方生辰八字等按世俗的标准一一“匹配”,从而促成一桩桩“美满”姻缘。至于当事人(主体)婚姻是否幸福并没有人真正关心。当今社会也不乏这样的例子,作为局外人,往往对别人的婚姻进行价值判断。而婚姻生活是否和谐幸福应该由事实判断(主体判断),每个人的追求目标不同,判断标准不同,选择也就不同。此外,婚姻是两位当事人的个人生活(当然,婚姻也不同程度地受到家族的影响),主要由当事人去感受、验证,情感的事外人怎么判断得了。婚姻不同于做生意(当然,从婚姻生活也需要经营的角度看,婚姻也是“生意”,是每个人人生中最重要的“生意”),不能简单地用般配不般配、划算不划算来衡量。真正相爱的男女,只要彼此心中的“天平”是平衡的,就会在付出中收获,这才是每个人应该追求的人生意义。每个人的人生都有不一样的独特性,因此尊重别人(主体)的人生选择,存在的就是合理的。如果仅用价值判断是非是不全面的。

1.5　劳动主义基本观念

前面提到的马克思哲学如果用一元论来刻画，可以是改变世界的哲学。这里的世界是指人类世界，自然界只是人的无机身体，重心和重点都在人而不在物。这里的人是指人类中大多数的劳动者。正如刘永佶在文献[1]的469页写道的："以劳动者为主体的社会主义运动，是现代人类'改变世界'的动因和动力。'改变世界'并不只是改变自然界，首先是改变人自身及其社会，改变劳动者不能成为社会主体的社会关系和社会制度"。"因此，劳动的理性的首要环节和第一个范畴，就是确定劳动者的主体性。包括三个层次，一是劳动实践中的主体，二是认识的主体，三是社会关系和社会生活中的主体。"再次指出，这里"理性"两个字代表作者的阶级性，也就是劳动者阶级立场上的道理。这是马克思、毛泽东的一贯立场。

基于上述阶级立场，刘永佶说："2008年由金融海啸引发的全世界的经济危机，其实质就是资本所有者，特别是金融财团依恃其对劳动物质条件的垄断，导演的对全世界劳动者的总劫掠，是道地的人世间的大浩劫！"

关于这个问题，我们再看一看相对官方的说法，如王伟光在文献[7]补遗五中有一篇文章《运用马克思主义立场、观点和方法，科学认识美国金融危机的本质和原因——重读〈资本论〉和〈帝国主义论〉》，该文发表于《马克思主义研究》2009年第二期，而且注明该文得到多位中央领导批文。我对这篇重要文章进行了认真领会，结论是刘永佶对金融危机的定性与中央精神一致。

马克思认为，在资本主义生产方式中，"生产剩余价值或赚钱，是这个生产方式的绝对规律。"资本是带来剩余价值的价值，资本绝不会放弃对剩余价值的追求，其本性是逐利的。"一旦有适当的利润，资本就胆大起来。如果有10%的利润，它就保证到处被使用；有20%的利润，它就活跃起来；有50%的利润，它就铤而走险；为了100%的利润，它就敢践踏一切人间法律；有300%的利润，它就敢犯任何罪行，甚至冒绞首的危险"。在资本主义发展史上，资本的这种逐利贪婪本性暴露无遗。从原始积累到殖民剥削，再到战争掠夺，"资本来到人间，从头到脚每个毛孔都滴着血和肮脏的东西。"就当今世界发达资本主义国家而言，没有哪个是靠民主制度发达起来的，都是靠剥削本国和他国工人阶级和劳动人民的剩余价值，用明火执仗的殖民剥削和战争掠夺完成了原始积累，用劳动人民的汗水和鲜血筑起了资本主义的"繁荣国度"[7]533。王伟光又写道[7]517："据专家统计，美国虚拟经济资本的虚假财富高达400万亿美元，大大超过了美国实体经济资本的30多倍。随着资本的发展，垄断资本的形成，金融资本和金融寡头的产生"，"它再生产出了一种新的金融贵族，一种新的寄生虫——发起人，创业人和徒有其名的董事；并在创立公司、发行股票和进行股票交易方面再生产出了一整套投机和欺诈活动。"王伟光在文章结尾写道："总之，要从三个方面入手解决金融危机的规避和防范：一是从制度方面，坚定不移地坚持社会主义公有制为主体的经济制度和人民当家做主的政治制度，从制度层面防范和规避金融风险，对私营经济、市场经济、虚拟经济建立规范管理的根本措施。二是从体制方面……三是从对市场的调控管制方面……"

从王伟光的文章不难看出，刘永佶的以政治挂帅的说法还是有一定可取之处的，在文

献[1]的 449 页,刘永佶写道:“对于集中体现劳动者利益和意识的劳动主义来说,其主体、对象和目的都是人,因而对人生和社会关系的研究是第一位的,对自然和技术的研究,实则是对人生的自然条件和手段的研究,是从属于对人生和社会关系研究的。”

对 2008 年开始的金融危机,刘永佶更多的是道德谴责,而王伟光的理论性要强一些,比较心平气和,但更有说服力。“这次危机是美国闯祸,全世界买单,一起遭殃,这就是全球化的贯通效应。美国金融垄断资产阶级,是向全世界转嫁危机的好手,在这场危机中,它们向资本主义其他国家以及与资本主义发展联系紧密的发展中国家转嫁危机,引起全球性的恐慌和危机。”

关于经济危机,由于理工科背景的人可能了解不多,所以在此稍加解释[8]。在文献[8]的第四节和第五节,鲁品越有更专门层面的经济哲学分析。“理性经济人”假设既是古典经济学的教旨,也是新古典经济学的原教旨。其“天理”就是在有限资源约束下通过投入产出分析来追求利润的最大化。西方主流经济学派采用的市场经济体系是由货币推动的经济体系。按唯物史观“社会劳动是一切社会权力的基础,而市场经济中的社会劳动凝结的‘价值实体’则是市场经济权力的产生根源。由此转化而来的资本逻辑,在今天则表现为金融风暴与经济危机。”对于资产阶级来说,资本面前人人平等,各行各业的资本家都要求平均分割剩余价值,比如地租的获得者,马克思所谓“土地太太”就是由她没有参与、和她无关的社会劳动的发展决定的。比如一间商铺的租金当然是与周边经济环境紧密相关的。商业资本家作为“资本先生”之一开拓了市场,这是为什么现在电视上有这么多广告的原因。信贷资本家也作为“资本先生”之一开拓了企业的融资渠道,使产业资本家可以超越自身资本的积累的限制更快地进行扩张。所谓钱找钱不难,用别人的钱赚钱。马克思对股票早有定义:“股票只是对这个资本所实现的剩余价值的一个相应部分的所有权证书。”股票不再具有原来的劳动价值,它们要分割的是预期的尚未生产出来的未来的虚拟价值,具有分割“虚拟价值"的权力的证券化资本便是“虚拟资本”。股票市值是最基本的“虚拟价值”,它是对未来价值增值预期的“货币幻象”,而不是实体经济的真金实银。严格说来,虚拟经济并不是“以钱生钱”,而是“以钱分钱”,是对现有剩余价值的分割。分割的当然还是劳动人民的血汗钱。证券每天的买进卖出是一种投机行为,虚拟价值波动差价兑现的正是当天的真金白银,劳动人民当天创造的剩余价值。这是信息化的高级经济行为。金融危机一旦发生,便会危及实体经济,劳动人民辛苦积攒的一点血汗钱早已被金融寡头兑现出去了,造成民众的普遍贫困,消费下降。消费下降引发生产过剩,产品卖不出去,又引起企业裁员,劳动人民更加困苦。整个一个恶性循环,要很多年才走得出来。

“要消灭危机,就必须消灭资本主义制度。”[7]

马克思毕生关心劳动人民,他的全部学说是由劳动展开的。西方马克思主义理论家卢卡奇晚年也认为他的哲学体系非得从分析劳动开始,尽管他早年的代表作《历史与阶级意识》没有以劳动为主线。文献[1]对劳动的定义是:劳动是为了满足人的需要而在意识导引下,在交往中进行的脑力与体力的活动。这是由于作者将人性总结为需要、意识、交往和劳动四个方面,作为人的本质的四个要素。并阐明了劳动具有目的性、计划性、社会性、多样性和演化性(人性创造和升华)。

我不承认一般书上,包括文献[1]中所谓的理性,把理性作为阶级性的代名词。因为康德在纯粹性批判中早已证明理性存在二律背反。根据哥德尔不完备性定理,任何知性

系统都有一个真命题是不可证实也不可证伪的。因此我认为涉及价值推理的知性系统,如文献[1]的学说实际上是站在劳动者立场上的知性系统,因此是劳动人民的理性。资本家甚至国家(世界上有很多个国家)未必认同这样的理性。我想这是刘永佶思想的自由,其真理性只有在社会实践中才能受到检验。

文献[1]关于劳动的定义,似乎太空洞,仅仅包含脑力和体力的活动是不准确的。睡觉也是脑力与体力的活动,打扑克也是脑力与体力的活动,吃饭也是脑力与体力的活动,幻想、做梦都是脑力和体力的活动。在一元论(主义都是一元论)的意义上,这个定义挺好,包括了人的一切活动。类似于历史唯物主义的历史=人的一切活动=现实的生活世界。但想来想去,似乎劳动还是具有除脑力与体力的活动这一普遍性之外的特殊性。就人性而言,我们认为至少要包括需要、意识、交往、劳动、实践、生产、学习、消费、休息、娱乐等 10 个方面。仅包括前 4 个方面有点把人过于简单化了。

这一节的内容有点旧唯物主义的意味,在方法论上采用直观的方法,见人不见物,有点主观唯心主义的倾向。比如人性的讨论,可以直观出 4 个方面,也可以直观出 10 个方面,别人还可以直观出 15 个方面。虽然都是可以的,但总觉得关于劳动的研究,哪怕观念性研究还有待深化。既然劳动作为一种主义,劳动就是最重要的概念。好在马克思早就对生产劳动、对实践有很好的阐述,对物、财富也有清楚的阐释。在后文将纠正刘永佶的偏颇。

1.6 实践辩证法

文献[1]的第六章论述的实践辩证法,作为劳动主义的方法论当然也说得过去,但总的感觉是与劳动主义中的劳动扣得不够紧。其实是以矛盾一元论建立辩证法,主要思想来源是毛泽东的《实践论》和《矛盾论》。但文献[1]在人的本质中没有把实践包括进去,现在又冒出实践来,显得有些唐突。所以前文中说人的本质至少要包括 10 个方面,这样实践再出现才不显得突然。这一节的论述试图紧紧扣住劳动这个主题,与劳动紧密相关的概念就是实践和生产,劳动打通实践和生产。实践在这里突出其探索、不确定、尝试、实验的意味,有创造性和创新性的维度。生产则是从技术层面、执行层面来看劳动,突出劳动的物化特征,突出产品的可消费性。而实践突出的是满足人的价值层面的需要,人的主观能动性(需要)必须和客观现实性(产品的可消费性)结合起来谈才合理。而且劳动不是为劳动而劳动,是为了把观念性的需要转化成现实性的消费。从前文对经济危机的讨论已经看出,消费拉动生产也很重要。实践当然很重要,但一切事情都基于直接知识(相对于间接知识)的实践也不行。因为每个人的精力有限,大多数知识还得靠学习来获得。要劳动就必须要休息,因为人不像机器可以一天 24 小时劳动,必须每天休息 10 多个小时。国家规定劳动者一般一天劳动不超过 8 小时,星期六、星期天还可全天休息。更为重要的是,人还会永远休息——死亡。这里的休息还包括死亡的维度——安息。劳苦一生总得让人安息。劳动不能过度,过劳死也不提倡。既然人会死,从社会学的角度就必须要进行人的生产,所以劳动中还应包括劳动者恋爱、结婚、生儿育女等诸多环节,所以生产劳动其实不可缺少关于人的生产劳动。这虽然是下文的主题,但确实也是劳动一元论或者说劳动主义的题中应有之义。人除了正常的休息以外,还要娱乐,比如现在年轻人要玩游戏、

要休闲、要旅游,这也是劳动主义要考虑的一个现实问题。当然人的10个本质中以劳动为核心是正确的。

1.6.1 实践概念的厘清和创造性诠释

实践概念有广义实践与狭义实践之分,广义的实践包括人的一切活动。整个大自然都是人的无机身体,与人无关,抽象的自然界是存在着的无。因此,国内很多著名学者,例如俞吾金[9]、孙正聿[10]就认为成熟时期的马克思哲学就是历史唯物主义,不存在辩证唯物主义,更不存在什么自然辩证法,似乎说得通。我认为这是不对的,为什么呢?关键是这些阐释者没有把实践活动的最根本特点——时间性考虑进去。正如本书第一版已指出的,时间是作为区间的,任何实践活动都占据一段时间区间。举例来说,以今天为时间区间,今天的无,实际上是有,包括已过去的人和事,也包括尚未有的人和事。比如对马克思来说电视、手机都是无,但对我们来说已经是有。辩证法对事物肯定理解的同时包含对事物的否定理解,特别是对事物暂时性的理解。所谓无,只是暂时无,对于人类社会历史性的实践活动而言又可能是有。所以人类世界对每天的实践活动而言都必须包括人类实践活动的有(人化自然)和尚未人化的大自然这种存在着的、暂时性的无,这种有与无的对立统一就是辩证法。因为大自然扮演着这种无的无化的角色,所以自然界也存在着有与无的对立统一,因而也存在自然辩证法。比如本书后文要论述的电荷与质量在真空中的对立统一,左手系与右手系的对立统一等很多自然界本身就有的辩证法。有的有着和无的无化是标准的辩证法。正如鲁品越指出的,如果哪一天,无彻底地无了,那就意味着人就没有新的东西可以认识,可以实践了[8],而这显然是不可能的。所以马克思主义是辩证唯物主义与历史唯物主义的对立统一。辩证唯物主义主要研究自然界的必然的因果性,历史唯物主义研究人类社会由于每个人有自由意志引起的自由因果性[9]。辩证唯物主义中有历史唯物主义,历史唯物主义中有辩证唯物主义,两者不可以截然分开。基于这样理解的实践,也就是我们前面以10个方面刻画的人的活动,加上人化的自然和未人化的自然,可以构成实践唯物主义一元论。这样的实践首先是在大自然中的实践,其次才是在人类社会中的实践。按本书的术语体系,前者建构世界化时间性的人类世界场,是对人世的微观刻画,后者建构社会化历史性的场。前者的主要矛盾是生产劳动与消费的矛盾,会引起中国历史上的封建社会的历次农民起义和现代资本主义社会的历次经济危机和世界大战。后者的主要矛盾是生产力与生产关系的矛盾,也就是一部分人与另一部分人之间的矛盾,即阶级斗争。会引起诸如资产阶级推翻封建主义的革命,是宏观时间尺度上经济物质利益冲突,积重难返引发的革命。马克思说,对经济分析既不能用显微镜也不能用化学试剂。如果在不能用自然科学的有效工具进行透视的意义上是对的,那么用空间尺度或与其等价的时间尺度来理解望远镜和显微镜的话,经济分析既要用望远镜进行大尺度分析,也要用显微镜分析微观结构。国外有宏观经济学与微观经济学之别。邓小平说,资本主义也有计划,社会主义也有市场,社会主义国家搞宏观调控,资本主义国家在凯恩斯新经济学的指导下,也搞宏观调控。社会主义国家有国有企业,资本主义国家也有国有企业。资本主义制度为什么垂而不死?就是因为虽然私有制条件下,资本逐利性变成贪婪性,但通过资本主义国家机器的管制,暂时是可以缓解矛盾的。但对每天而言,生产劳动与消费的矛盾由于现代物流业的发达,矛盾不易激化,也就是人只要有饭吃,哪怕吃得差

一点,多数人还是不愿去“当兵吃粮”。特别是现代通信工具很发达,一旦有事,信息很快就会传到国家领导层。不像以前农民运动,个把月朝廷才知道,又没有飞机和火车,粮食、军火不易即时运到,所以才有“当兵吃粮”。现代资本主义国家很注意解决生产劳动与消费的矛盾,因此延缓了革命的爆发,但是资本主义最后是必然要灭亡的。

实践的秘密其实隐藏在对人处事中,中国人常说谁擅长对人处事,实际上说的是这个人很有实践判断力(本书新命名)。代表着除了事实判断、价值判断以外的一种判断力。也就是协调对人处事的能力,掌握好人与人的关系与人与物(事)的关系的分寸,是一种实践智慧,而不是一种理论知识。

首先,对于实践的理解,离不开实践总是在世界之中的实践,世界之外的实践是形而上学的抽象[2],人不可能跑到大自然之外,特别跑到人的世界之外去实践,人的世界就包括人(人和事物)的观念性运动。这是对人的实践的事实判断的前提和尺度。

其次,对于实践的理解,离不开实践总是在社会之中的实践,人类社会(人与人)之外的实践是形而上学的抽象[2],人不可能跑到人类社会之外去实践,而社会规定了历史性的价值世界和价值尺度。这是对人的实践的价值判断[8]的前提和尺度,价值判断包括真、善、美、圣等精神方面,当然也包括作为与事实性相对的映射性价值,价值(钱)的物质方面的前提和尺度。

再次,对实践的理解总是离不开对每个劳动者的理解,实践总是要落实到个人的,也就是马克思说的从主体方面来理解。从主体方面理解,就必须不仅从执行主体方面来理解(是工具,随时可解雇),更要从利益主体方面来理解[7]。这都还有点隔靴搔痒,本质重要的是利益主体,每个人、每个家庭、每个集体、每个集团、每个国家乃至全人类自己对实践的理解。资本家有逐利的贪婪性,劳动者有没有贪婪性?某种意义上也有,很多拿工资吃饭的人也很想炒股发财,正是这种逐利贪婪性(不想劳动而想获得剩余价值),反而被大资本家所利用。

最后,对实践的理解必须是在世界之中,在这社会之中,在利益的争夺与分配的所有利益主体(个人、家庭、集体、集团、国家、全人类)深度卷入的博弈中,这就是实践,也就是实践唯物(利益及其衍生品)主义一元论。这根本上是对人处事的学说和问题。尼采早就看透了这个世界并提出了透视主义认识论。但尼采的透视缺少世界化时间性的场和社会化历史性的场作为普照的光(X光)。我把中国古人对人处事的学问称为实践判断力。每个人都受到这两个场的影响又都参与了这两个场的建构。

狭义的实践专指人的对象性活动,也就是人的本质力量的对象化。因此包括四个关键元素,人作为主体,对象作为客体,人和对象在实践中的对立统一作为实践活动,还有实践活动的主体情况、客观自然环境(天时、地利)和现实社会背景。我认为狭义的实践是不能构成整个人类世界和人类社会的,人类世界和人类社会分别另有本体。狭义的实践活动只构成认识论还不构成本体论,必须本体论与认识论在时间域中统一起来以后才构成本体论,这是本书第二版的主要任务。在本书第一版中建立了不同时强制同时后的辩证法,也就是共时态的辩证法。本书第二版要考察世界的显隐运作,将不同时的世界化时间性的场与同时化了的社会化历史性的场不同时再强制同时,形成时变哲学的辩证法。俞吾金也赞同没有本体论的实践活动只能作为认识论来看待[9]。

关于狭义的实践论,有两点值得注意。一是通过“补上”实践唯物论的缺环——论感

性对客观世界的本体论证明[11],来直观出人类客观物质世界的客观存在性和人类社会的现实性及其每个主体自身的实际性。虽然狭义的实践活动还不是本体论,但通过对象性活动,通过每个人每天的真实生活,也就是前面提到的以需要、意识、交往、劳动、实践、生产、消费、学习、休息、娱乐等为代表的活动,感性地认识到每个人的周围世界,也感性地认识到客观物质世界是客观存在的。同时还感性地认识到(直观出)我们是在人类社会之中的,或者说还有很多人与我们共同存在[1]。他们和我们一样都是人。这是何以可能的呢?因为我们就在世界之中,在社会之中。我们每天都在待人接物和对人处事,尽管在真正实践活动中,我们往往不可能时时想到我们在社会之中、在自然界之中。我们往往将对象的普遍联系孤立起来,将我们主体“跳到”世界之外(做事的时候,自己的其他事,世界、社会、环境、背景都已淡化,甚至“不存在”),盯着客体观察、研究,耗费体力和脑力。但是将我们的意向转向当前的对象性活动,还是能感性地感到所意向的四重性的:对象的客观性、空集的实际性、社会的现实性和自然界的客观存在性。本书第一版提到意向的二重性和所意向的二重性,这里自动地将其推广为意向的四重性和所意向的四重性。归根结底是由于对象性活动本身具有四重性,通常意向性活动对应一个对象,也就是说一个意向性指向一个对象,可用一个箭头表示。但由于对象有四重性,所以得用四个箭头表示。同时由于当从一个箭头到另一个箭头的时候要进行现象学的目光转换,就好像一个人变成了四个人,所以产生本来不同时的四个意向和所意向,将其不同时强制同时。本书第二版认为简单的实践活动实际上可以用意向和所意向的四重性,也就是意向四重性和所意向的四重性来表征[2]。

关于狭义实践论的第二个值得注意之点,就是不能因为我们在实际生活中专心做事时忽略了一些东西就否认其存在,更不能将事物的对象性理解为事物的外在性(也就是在世界之外和在社会之外)。对象性活动中的对象、主体、活动本身、活动的背景(空集)都在世界之中、在社会之中。旧唯物主义也许也不否认这一点,但不问这个物、这件事、这个人为什么在此。马克思是要问事情的历史的,也就是说事物(包括背景、主体)是如何来的[8]。海德格尔更是要问事物的意义在于对事物的使用,锤子的意义只有在使用锤子的活动中显现,物的意义只有在物的关联总体中显现[12]。

而几千年的形而上学则用比较静止的、孤立的观点看待事物。按马克思的观点,物显然不是现成的,是劳动者通过工业和商业生产出来流通到商店里的。我们必须分析商品的生产、流通、交换、分配、消费才能明白商品作为劳动产品的意义。人当然也没有现成性,每个人的此在,先是被抛入世[2],然后进入某个家庭,上幼儿园、小学、初中、高中、大学,再到某个工作岗位,是一系列利益博弈的产物,导致你现在在此。既遵循了自然的必然因果性,又遵照了人类社会的自由因果性,继承了家庭的实际性又发挥了自己的主观能动性,最后终于到此。所以海德格尔的此在是个很好懂、很贴切的哲学术语。根据这个此的定在和可能性,通过对生活的深度卷入,通过每个人自己的奋斗,又可以到达下一个此。形成新的定在和新的可能性。以挣钱为例:存在(挣钱)不是存在者(挣了确定的现成的多少钱),存在是与时间相关联的。目前挣钱的总量等于以前每个月挣多少钱乘以挣了多少个月,时间表现为 $\frac{\partial}{\partial t}$ 。而当前的 $\frac{\partial}{\partial t}$,也就是每个月多少钱也代表一个状态,所以存在(挣钱)是用存在作用量(积分)和存在的跃迁 $\frac{\partial}{\partial t}$ 来刻画的。存在本身没有现身,只有微分和

积分现身了。也就是说存在与不存在同时存在。存在不现身是由于测不准关系。$\int$ 和 $\frac{\partial}{\partial t}$ 可以同时现身，因为存在本身测不准。

1.6.2　作者理解的马克思的劳动辩证法

正如前文指出的马克思关于劳动及相关概念，实践、生产的阐述基本上贯穿马克思一生的革命理论。从《1844 年经济哲学手稿》[13]，到《德意志意识形态》、《1857－1858 年经学手稿》都有非常多的论述[14]，虽然最完全的阐述还是在他的主要著作《资本论》中。《资本论》是我 20 岁时认真读过的著作，只要肯下功夫也是可以懂的，现在更有好的导读书籍[15]。牛变秀和王峰明站在劳动人民立场反对剥削，而且也坚持马克思的劳动价值论[15]。如果没有充足时间的话，读一读文献[15]的导言也不错。该书前言表明了与马克思同样的政治立场并反对一些人似是而非的做法。

在开始讲述劳动辩证法之前，先提醒读者注意黑格尔的辩证法与通常自然科学（也就是形而上学）的做法是不一样的。自然科学的做法是先定义，后定理，再推论。定义总是用形式逻辑的种加属差的方法，比如人是动物，动物是生物，生物是物，世界就是物质的。张三是人，所以张三是动物，生物，物。李四也是人，所以李四也是动物，生物，物。黑格尔的辩证法是在概念的运动中把握概念的丰富内涵[15,16]，而中国的辩证法则先直观出对立统一的具体矛盾的两个方面，再考虑矛盾的运动[17]。我的辩证法介于中国的辩证法和黑格尔之间，先以中国的辩证法做基础，再以马克思的辩证法做指导，考虑矛盾的运动，也是在矛盾中把握概念的运动。

马克思把劳动定义为自觉自由的活动（注意这里的定义不是形式逻辑的死定义，而是辩证逻辑的活定义），我把他的这个定义一分为二。劳动的辩证理解就是自觉的劳动和自由的休息的辩证统一，简单一点就是劳动与休息的矛盾，或者说劳动与非劳动的矛盾。劳动总是某个人的劳动，非劳动也总是某个人的不劳动，这样的不劳动的人称为非劳动者。所以劳动落实到人就是劳动者与非劳动者的矛盾运动，也就是阶级斗争的历史[13]。在原始社会，还没有劳动者与非劳动者的区分（这是正）。随着生产力的发展和劳动者素质的提高，出现了分工和非劳动者，有了阶级斗争（这是反）。但到共产主义社会所有非劳动者都被消灭了，大家都是劳动者了（这就是合）。合不是简单地回到正，而是对正与反的扬弃。共产主义社会的劳动或者文献[1]中所指的劳动社会主义的劳动，也是所有人的共同生产劳动，也包含劳动和休息。但是在更高水平的统一，劳动已成生活的第一需要。休息（自由）的时间很多，人的技能也已全面发展，物质财富已极大丰富，主客观条件都与原始社会大不一样。本书第一版将黑格尔和马克思的正反合，修改为正反合分。为什么有分呢？因为一开始就把劳动一分为二了，将劳动分为劳动和休息的交替进行。即使到了共产主义，是不是就没有发展了呢？并不是，到了共产主义更要分，不仅财产要私有化，要分，人的休息时间要增加（这比西方哲学阐述的人的自由需要越来越多更好理解）。劳动时间越来越少，人的心情会更加愉快。新的物质财富和精神财富还会更充分地涌流[13]，也就是说新的事物还会以更大的加速度不可抗拒地产生出来。以前很多人都有到了共产主义就不发展的认识，这是不对的。个人、家庭、集体、集团、国家、全人类都是耗散结构，要不断地有东西进出（新陈代谢），不可能是死水一潭，是发展的。所以在辩证法中必须包

括正反合分四个环节。从这点来看,黑格尔和马克思都有不完备的地方。再从劳动的性质来看,从劳动者的答应与不答应,赞成不赞成,高兴不高兴和满意不满意来看。从一开始的劳动作为人的本质力量的显现,从一开始的劳动作为人类一般的体力和脑力的耗费,特别是凝结在产品中的人类一般劳动的耗费,劳动是自觉的,也是自由的(正)。但劳动的资本主义方式必然导致劳动的异化(反)和外化[9],到共产主义社会劳动者的劳动将是对异化劳动的扬弃(合),从结果上看就是人人都拥护的一种制度(分)。因为这时的劳动意识[11]已经扬弃了人类体力和脑力的耗费这一生理学功能,主要表现劳动者的智慧、美感、创造性和主动性[11],因而必然导致作为新生事物的物质财富和精神财富的充分涌流(分)。这一涌流不是为了某个阶级或阶层的私利,而是为了全人类的共同利益。再从劳动的物质结果来看,原始社会是产品生产(正),资本主义是商品生产(反),共产主义又是产品生产(合),什么东西分出来了呢? 价值和使用价值中的价值被扬弃了,价值是一种生产关系。

马克思在《资本论》第二版的跋(写于 1873 年 1 月 24 日)中公开承认他自己是大思想家黑格尔的学生,并且承认在“资本论的价值”一章中有故意卖弄黑格尔辩证法的做法。即使不读《资本论》,也很有必要一起来欣赏一下马克思的卖弄。

马克思在《资本论》第二版的跋中对辩证法有比较权威的界说:“辩证法,在其神秘形式上,成了德国的时髦东西,因为它似乎使现存事物显得光彩。辩证法在其合理形态上,引起资产阶级及其空论主义的代言人的恼怒和恐怖,因为辩证法在对现存事物的肯定的理解中同时包含对现存事物的否定的理解,即对现存事物的必然灭亡的理解;辩证法对每一既成的形式都是从不断的运动中,因而也是从它的暂时性方面去理解;辩证法不崇拜任何东西,按其本质来说,它是批判的和革命的。”

根据马克思的论述,对事物暂时性的理解和必然灭亡的理解,在考察事物时,时间总是一个有限的区间。辩证法考虑的元素,至少可以包含两个:如果肯定的方面一个,否定的方面一个的话。如果肯定的方面三个,否定的方面一个的话,总体就是四个元素[2]。所以本书第一版在建构共时态的辩证法时,是按马克思上面这段话做的。本书第二版的贡献在于将历时态的我它关系和共时态的我你关系不同时强制同时,简化了时变哲学的描述。注意马克思这里是用的理解而不是认识,也就是说马克思哲学既有从黑格尔而来的神秘的认识论传统,也同时开启了本体论传统[12]和诠释学传统[9]。我们的辩证法将认识论并入本体论,成为一种理解的本体论和诠释学[9-12]。按数学语言来说,是一种活动标架法。集本体论、认识论、诠释学于一身。微分几何上有一种方法称为活动标架法,可以在欧氏空间展开,也可以在流形上讨论。

以下转述的不是马克思的原创性卖弄,而是文献[15]对马克思卖弄的卖弄。这一哲学的提炼既好于马克思的《资本论》,也更有现实针对性[15]。

商品是一个物,一个外界的对象,它具有能够满足人的需要的质,具有有用性是由商品的属性决定的。有用性使物具备使用价值,以上是商品使用价值质的规定性。在量的规定性方面取决于人们的约定俗成,如一块手表、两斤大米。手表和大米的有用性构成其使用价值,而块、斤则是量的规定性。

社会财富的根本形态是物质财富。所谓使用价值一定是要在使用或消费中才能实现。没有被使用或消费的使用价值不是现实的使用价值,而只是可能的使用价值。商品

是用来交换的劳动产品，非交换的产品或卖不出去的劳动产品还不是商品。所以商品在其物的形态，也就是使用价值的形态上已具有社会性。商品的使用价值具有排己性[15]，自己生产自己用的产品有使用价值，但不是商品。

马克思的经济学是政治经济学，研究生产关系，研究人与人的关系，研究经济学的根本规律。而不是研究经济活动的表层现象，不是研究经济活动的表面游戏规则，不是研究物与物的交换，而是要通过物与物的关系看出人与人的关系。作为使用价值的使用价值，因与财富生产的特殊社会形态无关，还是直观的物，直观的对象，还没有问这些物是怎么来的，是谁的，不属于政治经济学的研究范围。所以马克思的经济学不是经济科学而是经济哲学[9]，这是马克思与旧唯物主义的最大区别[8]。马克思"关于费尔巴哈的提纲"第一条就是："从前的一切唯物主义——包括费尔巴哈的唯物主义的主要缺点是：对对象（商品就是一个对象——本书作者注）、现实（消费就是现实，而需要则是观念化的现实，可能的现实——本书作者注）、感性（直观和实践活动都是感性——本书作者注），只是从客体的（文献[8]称之为唯客体论——本书作者注）或直观（主客二分的，站在事物外旁观，而不是投入事物之中——本书作者注）的形式去理解，而不是把它们当做感性的人的活动，当做实践去理解，不是从主体方面去理解。"

马克思研究的使用价值是与生产方式、生产关系有关的使用价值，是要追问这些物是怎样产生出来的？归谁所有？是要从商品堆积这种财富的元素形式中找出隐藏在财富后面的利益争夺与分配（政治）。1 夸特小麦与 α 英担铁可以进行交换，这样一种使用价值与另外一种使用价值相交换的量的关系式或比例称为交换价值，可用方程"1 夸特小麦＝α 英担铁"表示。1：α 这种物质的量的关系就是商品的交换价值。以上等式两边量纲都不同，实际上是不能等的。只有将方程两边换成相同量纲的价值才能画等号。交换价值是商品实现了的价值，但还不是价值本身。

如果不管生产使用价值的各种具体劳动的多样性，也不管劳动产品的有用性，劳动就可以抽象为一点：它是人类劳动力的耗费。因此商品的价值就是一般人类劳动的耗费，也就是人类劳动力在生理学意义上的耗费。

就劳动的直接存在而言，生产商品的劳动是私人的事。但商品是用于交换的劳动产品，只有实现了交换的劳动产品才是现实的商品。凝结在其中的活的劳动才转化成社会性的价值，人与人之间的劳动的社会性只有通过物与物之间的交换才能建立起来。所以必须站在劳动的私人性、生产资料的私有制，或生产关系和经济关系的高度才能把握价值的本质。因此价值是人类劳动所具有的一种特定的"社会形式"，是马克思政治经济学的重中之重。商品的二重性是指商品的使用价值和价值的二重性，劳动力的耗费（是人而不是物才有价值）只是形成商品价值的物质载体或实体（是人，而不是物，人是指作为劳动力的人，作为劳动者的人），使这种耗费成为价值的只能是生产资料的私人所有制这种生产关系。而具体的物（因而具有使用价值的物）是连价值的一个原子也没有的（与价值无关的）。所以劳动产品的价值，尽管体现为劳动者劳动力的物化，但与商品的有用性是一点关系也没有的。生产关系是什么，是人类社会中人与人之间的关系、权力关系和物质利益的分配关系。

牛变秀和王峰明将商品价值的本质规定概括为以下六个方面[15]：

第一，马克思提炼出交换价值中隐藏着价值的质的等同性实现了商品中量的相等性

的合法性。也就是前面等式中的相等成为可能。

第二,商品价值是对象化的一般人类劳动,也就是人们在具体劳动中生产使用价值时所耗费的体力和脑力,并已得到了承认的,已经社会化的抽象劳动。商品价值与商品的使用价值无关,有关的是劳动的社会性或社会劳动实现的一种历史形式[15]。

第三,商品价值是一种经济关系和生产关系[15]。

第四,商品价值是劳动者的社会地位和身家性命。马克思说:“财富作为价值,是对他人劳动的单纯支配权。”我的商品包含着一定量的必要劳动时间,它使我能够支配任何其他具有相等价值的商品,因而支配物化在其他使用价值中的等量的别人劳动[15]。牛变秀和王峰明引申说[15]:“劳动者的产品是不是商品,有没有价值,有多大价值,决定着他能不能支配别人的劳动,这关涉的显然是劳动者的社会地位问题。商品越是有价值,能够支配的他人的劳动力就越大,对他人劳动的支配权就越大,劳动者的社会地位就越高。这种权力和地位在变为微观的层面上看,就是劳动者的身家性命问题”。“如果说价值是凝结在商品中的‘无差别’的人类劳动,那么这种无差别的性质与其说是‘生理耗费’意义上的无差别,毋宁说是一种社会地位意义上的无差别。商品价值反映和体现的是人类劳动的‘社会的质’,而不是‘生理的质’”。

第五,马克思的价值理论贯彻和体现了历史唯物主义的唯物原则和历史原则,使用价值与价值的矛盾运动以浓缩的形式展开了生产力与生产关系的矛盾运动[15]。

第六,马克思的价值理论贯彻和体现了历史唯物主义的“价值”原则。人类的自由和解放特别是劳动者的自由和解放是历史唯物主义的最根本的价值观[15]。

文献[15]的论述比前文论述更清楚地展示了劳动的辩证法,是以黑格尔和马克思的方式展示的。

1.6.3 使用价值的运动[9]

马克思说:“无论财富的社会形式如何,使用价值是构成财富的物质内容。”前文主要讨论了价值的运动,也就是“有”的运动,这一节讨论一个价值的原子也没有的使用价值,也就是价值上无(无价值)的财富的运动。通俗一点[9],财产就是可以从所有制上确定归属的财富,财产关系只是生产关系的法律用语。物质财富就是用使用价值构成的,自然界和劳动都是使用价值的源泉,劳动本身不过是一种自然力即人的劳动力表现。使用价值的界定在于物对于人有用没用,不用于交换的物品也可以有使用价值。现代社会财富的主要来源是人的劳动[9]。

历史上,家庭的出现使公共财富转化成私人财产[9],从而推动了财富的生产。随着市场的出现和交换的普遍化,财富转化成货币形式。进入资本主义社会以后,货币进一步转化成资本。只有资本才掌握历史的进步而为财富服务。共产主义社会将使人类自己创造的财富真正为人类服务[9]。

俞吾金说:“事实上,马克思哲学作为实践唯物主义,根本不可能把传统哲学的基本问题——思维与存在的关系——视为自己的基本问题。而是把‘人与物的关系/人与人的关系’视为自己的基本问题。因为这一双重关系正好统一在人的生存实践活动中。而从经济哲学的视角看,人的生存实践就是生产劳动。在生产劳动中,一方面,人必定要与物打交道(人与物的关系);另一方面,人必定要与他人打交道(人与人的关系,即社会关

系）。”[9]301,302。本书已将这一基本的哲学问题转化成一种实践判断力，也就是对人处事的学说和问题。

1.6.4　中国式的实践辩证法何以可能

在文献[1]的第478页，刘永佶敏锐地发现了在黑格尔或马克思的意义上搞唯物辩证法的不可能性，因为马克思没有留下哲学著作（体系性的著作），只有资本论的逻辑。前文引用过在1873年1月24日写的《资本论》第二版跋中界定的什么是辩证法，也认真地追随文献[15]进行了卖弄，可见对马克思的思想不做进一步的工作，辩证法仍然是不可能的。中国学者在很多方面做过尝试，比如孙正聿在自选集中就有辩证法研究。几乎所有学者都在谈论辩证法，但都没有超过毛泽东的《实践论》和《矛盾论》[1]。本书的第一版和第二版试图在学院哲学或经院哲学的意义上对辩证法有所发展。这已在前文论证并将在后文充分阐发。刘永佶在实践辩证法的论述中，主要基于《实践论》与《矛盾论》对辩证法也进行了一些不错的阐发，说到底就是要求每个人的人性要多一些社会性，少一些动物性。把人生的基本矛盾解释为人作为一般动物与人作为人类社会动物特殊性的矛盾。“端正并明确规定人生目的是发展人而非占有物。”[1]500。文献[1]的哲学体系的存在、内因、外因、质、量、主要矛盾、现象、本质方面等基本上是老生常谈。“从劳动主义出发，实践辩证法认为存在的主体是人，是人的存在，存在的人。”这不是黑格尔的实体即主体吗？所以也就是遵照马克思的论述，按物质决定精神把人摆在前，把人的精神摆在后而已。“没有自然条件和改造自然物的手段，人类是不可能存在的。但并不能说自然条件就是存在的主体，不能说改造自然物是人类存在的目的”[1]549。我认为这些议论都是受一元论的限制。既然自然是存在的实体，如果按实体即主体，自然也就是主体。另外人类的目的有很多种，只能说根本目的是为了人而不是为了物。对每个人而言，有的人的人生目的就是为了占有物，起码占有物是目的之一，归根结底的意义上是为了人。但在游戏规则的意义上，绝大多数人每天上班还是为了挣钱（也就是为了物），所以目的有多重性。从刘永佶的这些论述看出，他的劳动主义在学术思想方面尚存在纰漏，因此还需要在辩证法方面做一些工作。破了还要立，任何哲学体系都存在没有很好回答的问题。

参考文献

[1] 刘永佶. 劳动主义(上下卷). 北京：中国经济出版社，2011.
[2] 任伟. 数学化的场论：球面世界的哲学. 北京：科学出版社，2013.
[3] 胡潇. 意识的起源与结构. 北京：中国社会科学出版社，2004.
[4] 吴汝康. 人类的起源和发展. 北京：科学出版社，1980.
[5] 米德. 心灵、自我与社会. 上海：上海译文出版社，1997.
[6] 拉法格. 思想起源论. 王子野译. 北京：三联书店，1963.
[7] 王伟光. 利益论. 2版. 北京：中国社会科学出版社，2010.
[8] 鲁品越. 走向深层的思想：从生成论哲学到资本逻辑与精神现象. 北京：人民出版社，2014.
[9] 俞吾金. 被遮蔽的马克思. 北京：人民出版社，2012.
[10] 孙正聿，等. 马克思主义的基础理论研究. 北京：北京师范大学出版社，2011.

[11] 邓晓芒.实践唯物论新解:开出现象学之维.武汉:武汉大学出版社,2007.
[12] 海德格尔.存在与时间.陈嘉映,王庆节译.北京:商务印书馆,2015.
[13] 中央编译局.马克思恩格斯选集.2版.北京:人民出版社,1995.
[14] 张一兵.马克思哲学的历史原像.北京:人民出版社,2009.
[15] 牛变秀,王峰明.价值存在和运动的辩证法:马克思《资本论》及其手稿的核心命题研究.北京:社会科学文献出版社,2011.
[16] 邓晓芒.思辨的张力.北京:商务印书馆,2008.
[17] 王南湜.辩证法:从理论逻辑到实践智慧.武汉:武汉大学出版社,2011.

第二章　社会唯物主义二元论

本章根据本书的哲学体系，通过对文献[1]的深入研究来充实本书的哲学架构。本章论述主要取材于文献[2]，特别是一些关键的术语定义，结论都尽量与文献[1]和文献[2]一致。也就是说用本书哲学体系的形式来填充文献[1]和文献[2]的主要内容。当然我的论述与文献[1]—[7]也有一些不同，比如对生产力的理解和解释就与文献[1]不同，对价值、使用价值的把握也是独特的，有一些物理学的目光。

首先，我们对斯宾诺莎哲学进行了回顾和重新解释[8-16]，彰显了研究哲学的方法。我对中国古书《大学》进行了创造性诠释[17-25]，为理解一元论、二元论、三元论、四元论给出了范例。从2.5节至2.8节，用完备二元论对经济哲学进行了重写[22,26]，虽然有重复，但我认为这属于必要的重复[10,22]。因为只有这样才能使读者认识到哲学其实不难，理工科背景的读者往往认为哲学很难懂，很难有进一步的兴趣。我曾经给好几个朋友看《纯粹理解批判》，他们往往翻几下就看不下去了。换句话说，本章有一部分内容除了在本章中起作用外，对本书甚至整个前三卷都是有意义的。此外，本章部分内容还可以看成为后续章节做了某种铺垫，以及为前面章节做了某种补充说明。本书可以看作是在作者完备二元论基础上，对历史上的一些主要哲学体系的一个重新梳理，对历史上的很多哲学家进行了“强暴”[22]。

2.1　斯宾诺莎哲学研究

本书的斯宾诺莎哲学研究是从文献[8]入门的，斯宾诺莎哲学书的汉译本我也在十多年前认真阅读过，这次的写作取材于文献[8]。洪汉鼎写的《斯宾诺莎哲学研究》一书的自序本身就是斯宾诺莎精神的当代化，我在写作本节之前又将自序读了三遍，心灵受到很大的触动，读完第三遍，早已热泪盈眶，激发了心灵深处的共鸣。特别推荐读者有空的时候好好读一读斯宾诺莎的著作。

首先，我提出洪汉鼎所著的《斯宾诺莎哲学研究》[8]，是为了紧扣这一章的标题。因为斯宾诺莎是从学习和批判笛卡尔哲学起家的。而笛卡尔除提出我思故我在的一元论以外，还提出了身心二元论。按当时的哲学术语就是广延实体(因为身体有广延，有体积)和思想实体(人能思维，我思故我在)。斯宾诺莎开始也接受笛卡尔的观点，逐渐就发展出自己的观点。具体说来就是一个实体两个属性。也就是思想和广延两个属性，这些需要特别指出。根据斯宾诺莎在《论理学》中的理论：“神或实体，具有无限的属性，而它的每一属性各表示其永恒无限的本质，必然存在”。“神是唯一的，这就是说，宇宙间只有一个实体，而且这个实体是绝对无限的”；“神，我理解为绝对无限的存在，亦即具有无限多属性的实体。其中，每一属性各表示永恒无限的本质”[8]170。所以斯宾诺莎是知道自然是有无限丰富性的，单是在本质层面都有无限多种属性，更不要说现象层面。

但斯宾诺莎哲学则由一个实体两个属性来概括，一方面说明无论什么哲学都有其局

限性,总是用有限多个属性来展示自然(比如洪汉鼎已提出的,这里的自然也包括精神,与现行的自然概念出入较大)的无限丰富性。无论这几个属性选得多恰当,总是能挑出漏洞和毛病来。没有什么绝对真理,只是哲学家个人的见解而已。另一方面,又可从斯宾诺莎哲学读出世事人生,特别是人生的很多真理和智慧。斯宾诺莎的智慧是真正的大智慧,可见哲学不会灭亡。尽管这无限多属性仅挑出两个属性就有如此强的说服力。我们处在计算机时代,计算机时代的特征之一就是不断地扩大容量。所以本书的哲学显然走的也是当今时代不断扩容的路子,反映时代精神。回过头来再看斯宾诺莎的一个实体两个属性,何以可能?简单说,人就有身体(广延)和思想,所以人就是一个实体(无限丰富性的每个人,但仅以身体和思想来表现)两个属性。原来哲学就是这样简单。复杂说,要将人的身体和思想推广到整个大自然又谈何容易?因为石头也许就没有思想,你怎么证明石头也有思想的属性?原来哲学又是这样困难。后来的哲学家如谢林、柏格森都用毕生的精力和经历,试图证明石头也有思想,或者说要将思想转化到石头上去,这确实是难乎其难的问题。当今世界上最伟大的科学家也难以回答这样的问题。先哲们确实为我们的科学提出了不少好办法,尽管不一定对,或有错,但有思路总比没思路好,也许普通人想一个月可能也想不出一点办法来。换成当代的哲学术语,谢林的办法是石头首先是物,但石头也承载了石头作为石头的状态及其变化,也就是石头在大自然中的信息。思想可以理解为一种信息,思想也有物质载体。所以自然有物质和信息两个属性,也就是广延和思想两个属性。柏格森的办法是从追问时间开始的,一切有生命的物质都在时间中绵延,而且石头也具有最低级的绵延。作者接替柏格森完成他没有完成的论证,万事万物可分为有生命的物体和没生命的物体,因为宇宙的形状是四维空间中的三维球面[22]。对于球面上每一点,在存在的意义上是不可区分的,区分是人为的。二维空间的一维球面是圆,圆上每一点在自在的意义上也是不可区分的,区分也是人为的。同样三维空间的二维球面的例子是单位球面,球面上每一点在自在的意义上是不可区分的,区分都是人为的。四维空间的三维球面的局部总是三维欧氏的,对于有生命的存在者,其身心总存在着能量的耗散。$\int \frac{\partial E}{\partial t} > 0$,通俗一些,人总要吃饭,喝水等,可以证明只有大于零的时间算符 $\frac{\partial}{\partial t}$,对应于广延 $-\frac{\partial^2}{\partial t^2} > 0$。进一步考虑到自旋为2(不带电、有质量,其实更准确地说是电中性,有质量只是身体内正电荷与负电荷大小相等方向相反),这样的物体应满足椭圆几何,也就是说最终要变成一个广延。这就是人为什么要死的根本原因,也就是思想如何回到广延的科学回答。$\omega^8 = (\pm\omega^4)^2 = 1$,广延与思想分别对应于 $\omega^4 = -1$ 和 $\omega^4 = +1$。柏格森曾写过一本书来反对爱因斯坦的相对论,后来碍于爱因斯坦的名气不再出版。其实柏格森是对的,他和爱因斯坦研究的是不同的问题,对时间的理解不一样是正常的。所以现在这本书又出版了,本来柏格森数学很好,而爱因斯坦数学不好,但柏格森却公开以自己数学不够好为由不再出版反对相对论的书。爱因斯坦研究的问题是既可大于零又可小于零的问题,按本书哲学体系就是把不同时强制同时了。换成几何学的语言,爱因斯坦主要研究 Mobius 带的问题,而柏格森研究的是一截水管(有限长圆柱面上)的问题。前者虽是一体两面,但严格意义上是一体一面,后者则明显是一体两面,大有区分的。柏格森研究的是两个质点具有同样大小的质量,相隔一定的距离,而爱因斯坦研究的是电中性的两个正负电荷的运动。爱因斯

坦的问题复杂得多，所以柏格森说他本人数学不够好。本书再次提及光线是射线，引力线则是直线，大有区别。对于整个宇宙的封闭体系(相当于斯宾诺莎的自然)，$\frac{\partial E}{\partial t}=0$，生与死的分水岭就在这里。$\frac{\partial E}{\partial t}=0$ 就是死了，必须符合自然铁的必然性。四川方言说“吃不得该死”，也就是说人不能吃饭($\frac{\partial E}{\partial t}>0$)，离死就不远了。而爱因斯坦的体系则是一个开放的体系，也就是说天外还有天的。斯宾诺莎的体系是天外无天的实无限，爱因斯坦的体系是天外有天的潜无限。按斯宾诺莎的哲学体系，斯宾诺莎是在研究实体，爱因斯坦是在研究实体的属性之一。既然谈到时间，当然斯宾诺莎哲学也有过去、将来和现在。但斯宾诺莎哲学的真理性在于其特殊的时间性，根据我的理解，如果将斯宾诺莎的哲学中的时间统统理解为过去，一切有生命的东西都理解为“终有一死者”，那斯宾诺莎的哲学就会好懂得多。在这个意义上，斯宾诺莎的真理必然性就完全说得通了。因此，斯宾诺莎的哲学可以看成历史学的哲学。因为斯宾诺莎的时间重点在过去，也就是说如果我们把过去了的事称为历史，历史学研究过去了的事的话，有什么事不是必然的呢？时间一去不复返，我们虽然可能对过去做过的事做一些补救、修正，但要想回到过去重做是不可能的。就好像在过去某天有多种选择，但一旦选择了就可看作必然。所以尽管斯宾诺莎哲学显得有点生硬，内在还是有合理性的，当然漏洞和缺陷也很多，前面已经说过了。总之，做哲学就是斯宾诺莎的做法，自圆其说最好，不能自圆其说也算为人类提出了一个问题，所以把哲学定义为学说和问题。

其次，注意到斯宾诺莎的实体是一个实无限，天外已经无天了。按洪汉鼎的解释这是一种系统论的思想，与西方形而上学的将事物越分越细的思想有些不一样。实体就是宇宙的整体，至大无外，至小无内，而个别事物(斯宾诺莎称为样态)，乃是这整体的部分。离开了整体，部分既不能存在也不能被认识，部分的性质由整体的一般性质决定。主张把样态作为整体的体现者来认识，而偏重于事物的整体的认识。本书在哲学研究中注意采用斯宾诺莎的方法，注意到所选择模型的完备性，尽量做到至大无外，至小无内。另外，也很注意整体与个体的关系，用数学化的场来穿透主体间性。另外，斯宾诺莎的“神”有各种解读，也完全可以认为是一种形而上学(哲学)的必要形式。很多哲学著作完全是一种接近实际的叙事方式，形而上学(哲学)完全没有了形而上的成分。从这一节开始还是准备在哲学中引入形而上的元素，既然认为哲学的本性在于形而上学，一定要有形而上的成分或元素。斯宾诺莎的“神＝实体＝自然”，就是一种形而上学。按照熊十力体用不二的哲学，可以认为思想和广延＝实体，思想的时候广延不二，思想就是实体。广延的时候，思想又不在，广延＝实体。按笛卡尔哲学，我思故我在，在与思都在当前，广延在过去。所以一个实体两个属性可以看成通信理论中的时分复用，对于两个属性都只能部分地知。这样一种理解和解释在本章后续几节展开，先埋下这一伏笔。天外无天除了洪汉鼎所说的现代系统观点以外，从数学上看就是一种完备性，自然自给自足。正如文献[8]第159页所述：“斯宾诺莎哲学与笛卡尔哲学在神的观念上最根本的一个区别是，对于笛卡尔来说，神是万物的卓越因，而对斯宾诺莎来说神是万物的内在因。按照笛卡尔的看法，所谓卓越因，就是此原因比其结果本身更圆满地包含着结果的全部实在性，神作为万物的卓越因，就是说神比万物具有更圆满的存在，因而从本质上说神与自然不能等同，神不可能具有广延属

性。而且神完全是按照它的自由意志和理智而行事,创造活动是一种自由的活动。反之按照斯宾诺莎《伦理学》的观点,神绝不是万物的外在因,而只能是万物的内在因。内在因就是万物之内的原因,因此神与自然是同一个东西,神既没有意志又没有目的,它只是由它的本性的必然性而存在和动作,创造活动永远是一种必然的活动。"我认为斯宾诺莎的观点是一种无神论的观点,因为它说神的万能正在于神的无能,很有点中国哲学中物极必反的意味。中国宋朝的程朱理学,理在万物之先,理也在万物之外。基督教的神也在万物之先和万物之外,明显的天外还有天,实际上是一个潜无限。只有斯宾诺莎的自然才是大而无外,天外无天的,这在其主要著作《伦理学》中是相当清楚地阐释了的。后来尼采在其哲学中也肯定了自然这一唯一真实的世界,是没有目的、没有意志、没有意义的世界,一切价值都是社会化历史性的人赋予的。这一洞见十分重要,这对反对一切极权主义很有好处。中国古代的皇帝总把自己说成是天子,其实天怎么会生子?天子是人赋予的权力。西方的神权本质上也是人权。所以斯宾诺莎好像在说自然,其实与世事人生还是有关联的。与聊斋志异用鬼的故事来告知人世间的道理有异曲同工之妙。过去的世界就是死人的世界,也就是鬼的世界,"终有一死"在中国文化中就是指人人都要成鬼。所以斯宾诺莎哲学以历史学的方法来理解就很对了,有很强的历史理性包含其中。对后世开启历史哲学有很强的启发作用。比如与斯宾诺莎同时代的德国哲学家莱布尼兹,好像与斯宾诺莎的哲学很不一样,主张所谓前定和谐,而斯宾诺莎的哲学可以初步地理解为后定和谐。但在神那里,时间并无先后,即可以说是永恒的过去,也可以说永恒的未来,还可以说永恒的现在。正如洪汉鼎的总结[8]721:"事实上莱布尼兹关于个体事物所讲的,正是斯宾诺莎关于系统所讲的话"。中国哲学中也有吾心即是宇宙的说法。

再次,爱因斯坦一辈子信奉斯宾诺莎哲学,是斯宾诺莎的忠实信徒。在学理的层面有必要探讨一下爱因斯坦的相对论到底与斯宾诺莎哲学有什么关系。其实根据本书第一版对相对论的诠释,相对论除了可以理解为同时性的相对性外,还可以理解为人为地将不同时的事情强制同时。前者是从客观或者说客体方面来理解,后者是从主体方面来理解。比如地球围绕太阳转,当然是不同时的,但以地球围绕太阳转一周(也就是一年)为时间单位,也可以将这种许多不同时的事件看成一件同时的事件。也就是说将时空凝固为一个点,将一个过程变成时间的一个点,将空间的不同位置看成一个位置,提取整个过程的大范围拓扑信息。那么我发现,在神性目光下地球的自旋为 2,从而为自旋这一量子力学中出现的概念提供了经典解释[22],微观粒子都有自旋。实际上是将粒子内禀空间中的周期运动,固化为外在(基底)空间中的一个点。现在的数字信号处理,更早的微积分其实都是这样做的。美学上有美是凝固了的艺术,艺术是展开着的美的说法。人为地凝固后,过程变成了不同时强制同时后的事件,这一事件展开后又可变成一个过程,什么时候凝固,什么时候展开完全是人为的。当前量子力学的水平还在凝固的水平上,什么时候能展开还不知道。但可以相信,总有人类能够展开的一天。也就是说,人类智慧总有能够将量子自旋的过程加以描写的一天。为此在这里先做一些先驱性的探索。只有这个问题解决了,电磁场与引力场才能够统一起来。以下论述取材于文献[11],这些内容对理解本章后面的内容也很重要,特别摘录在此,为读者提供方便。

在文献[11]的第 12 页,尤承业给出了拓扑空间的定义。设 X 是一个非空集合,记 2^X 是 X 的幂集,即以 X 的所有子集(包含空集 ϕ 和 X 自己)为成员的集合,设 X 是一个非空

集合，显然 2^X 构成 X 上的拓扑，称为 X 上的离散拓扑，$\{X.\phi\}$ 也是 X 上的拓扑，称为 X 上的平凡拓扑。把 2^X 的子集(即以 X 的一部分子集为成员的集合)称为 X 的子集族。

定义 2.1　设 X 是非空集合，X 的一个子集族 C 称为 X 的一个拓扑，如果它满足：$X.\phi$ 都包含在 τ 中；τ 中任意多个成员的并集仍在工作中；τ 中有限多个成员的交集仍在 τ 中。则集合 X 和它的一个拓扑一起称为一个拓扑空间，记作(X,τ)，称 τ 中的成员为这个拓扑空间的开集。

与本节相关的另一个概念是平环和莫比斯带。读者自己可以立即生成这两个几何图像，选取一张纸，也就是两面都是矩形的“橡皮”，为了好用手工制作，最好矩形的长宽比大于 10，数学的描述参见相关文献[11]74,75。将矩形在长边方向弯曲而不要拧转并将矩形的短边粘接，得到一截圆柱面(数学术语称为平环，可以暂不理会)。这一几何形状与椭圆几何有关，也就是与牛顿的绝对时空有关。如果先将矩形沿长边方向拧转 180°，再将两侧短边粘接，所得几何图形就是莫比斯带。这一几何形状与双曲几何有关，也就是与爱因斯坦的相对论有关。平环有利于展示引力相互作用，莫比斯带则有利于展示左右旋的电磁波传播，与相对论时空有关。这两个图形对理解相对论的不同时强制同时和什么是绝对时空很有帮助，可以理解为在知道真空中质量和电荷的四阶群和八阶群描写后，作者迈向引力场与电磁场的统一场论的极其重要的一步。底流形是三维空间的二维球面的内侧和外侧，简单一点的话，因为宇宙很大，底流形取平直的二维平面也是完全可以的。但严格些还是放在球面的内侧和外侧以利于与宇宙形状相吻合，并突显本书球面世界的哲学的意义。这样四维空时(国内称时空，国外称空时)，就由两个可直观的二维图形的正交补来构造，实现了四维空间的几何化构图。以前都一直没有几何化构图，一提四维就头痛。如果一开始构图时在矩形的短边分别选定中点，再用红笔画出连接两个中点的中线，在莫比斯带的中线和平环的中线中就隐藏着相对时空和绝对时空的秘密。“从直观上看，莫比斯带与平环有许多不同之处。首先，平环的边界是两条封闭曲线，它们分别由原矩形的上下边将两端点黏合而得到。而制造莫比斯带时，原矩形上边的两端与下边的两端黏合，连成一条曲线。因此莫比斯带的边界是一条封闭曲线。其次平环是双侧的，莫比斯带是单侧的。当然局部地看，莫比斯带上每一点附近的面块有两个侧向。但从整体上看，这两侧是连成一片的，从某一点的一侧在带上移动可以到达该点的另一侧，中间不用翻越边界。在平环上这是做不到的，还有沿平环的中线割开可将平环分割成两个平环。而沿莫比斯带的中线(也就是前面提到的红线)，割开得到的还是连通的一条带子(请读者说明这是一个平环)。”[11]75 大自然真是美妙得很，就这么两个简单的图形就可以让柏格森和爱因斯坦这两个诺贝尔奖获得者沉思多年不得其解的问题得到解决。所以在自在自足自因的自然面前，确实人要知道自己无知才行。苏格拉底说：“我知我无知”。时间是什么和时间是怎样生成的，借助这两个图形可以得到更好地理解和解释。不管你懂不懂拓扑学，直觉总能告诉你，这两个图形是有区别又有联系的。如何区别又如何联系，特别是当数学的空间与物理的几何对应好了以后又会产生什么奇妙的，令人惊叹不已的事情，只能留待他日再说了。我对自然是敬畏的。

最后，关于黑格尔称之为伟大的命题，使斯宾诺莎最为出名的一句话是：“一切规定都是否定。”即任何的限制或规定同时就是否定[8]。前面已提到过上帝的万能同时引出了上帝的无能，同样也可以从上帝＝自然＝实体＝主体的无能，同时引出上帝的万能，这就是

后来康德的所谓二律背发,黑格尔的辩证法,马克思的辩证法,本书第一版的共时态的辩证法(一阴一阳之谓道)和本书第二版的对偶变量的辩证法(阴阳不测之为神)。这里已暗度陈仓,从前面的神=自然=实体,改写成神=自然=实体=主体,实体=主体的发挥者是黑格尔,但原创者还是斯宾诺莎,其实黑格尔哲学神秘外衣是可以从斯宾诺莎哲学揭开的。前面矩形的四条边可以作为看这个矩形的四个方向,如果主观精神=主体,客观精神=实体,绝对精神=神,自然作为精神的余集或者按黑格尔作为精神的外化,黑格尔的整个哲学体系就是实体=主体的完备二元论,斯宾诺莎意义上的四个属性和一个系统(逻辑学)。因为从时间顺序上看,先有自然,后有精神,但若将不同时强制同时,则四个属性可放在一起构成一个逻辑体系。不同时强制同时,其实从每个人身上也看得出来,只是以前没有哪个心理学家和哲学家把这件事说得这么明确和清楚。比如一个病人毫无疑问有心理创伤,心理医生应该做的事就是要想方设法让过去发生的事在当下呈现,将过去和现在联系起来,也就是不同时强制同时。强调了从人为方面,主体方面来理解心理咨询这个客观事实,很有辩证法的味道。明知是过去的事,但要想法让过去的事现在化。反过来说也一样,规定过去就同时是对过去的否定。因为地球在转动,人同时在变,规定是规定不了的。按萨特的话来说,人总是不是其所是和是其所不是。就人的一生而言,也是盖棺才能定论。人生的历程是不同的,但等大家为你写悼词的一天,不同时就同时了。悼词包括了你整个的一生。这里有一个很大的视角不同,不同时强制同时后,既可以向前追问过去,又可以向后看将来。即从人生的中间某一点开始,这中间的某一点不一定是你寿命的中点,但爱因斯坦的把戏就是从中点开始,在其他参照系中,中点变成了非中点。我的做法是要在一个坐标系中将不同时强制同时,如果一个有限的区间,两端点放上反光镜,从中点出发的向左向右的光肯定会同时到达,而从非中点出发的光就肯定会不同时到达。我的解释是不同时没有关系,可以人为地不同时强制同时而不要再搞什么运动参考系了。这是对相对论做出了新的解释和理解,这样理解就是马克思说的从客体方面理解的同时从主体方面理解,对事物的肯定理解的同时做出对事物的否定理解。肯定不同时的绝对性来谈同时的相对性,比如我前年做甲事,去年做乙事,今年做丙事,在规定它们不同时的同时也可做出否定的理解,同时的意义上都是我做的事。应用柏格森的电影放映机机制来看,一部电影的画面是不同时的,但电影胶片扯出来放在地上(不同时强制同时),就是一个东西。回到斯宾诺莎的哲学,更加突出整体,每个画面都是因拍这部电影来摄制的,每个画面的意义都与整部电影有关。这在数学上称为大范围分析或者说拓扑分析。

2.2 评孙正聿理解的历史唯物主义

在文献[6]的第一章马克思主义世界观和第6章马克思主义历史观两章,孙正聿详细地阐释了他所理解的历史唯物主义。先转述一下他的观点,对于每一个有限的时间区间,比如说一天、一年、一代人、一个朝代等,马克思和恩格斯定义的历史就是这一时间区间内,人的活动,而不是通常历史教科书上的过去那些人和事组成的历史。按数学的语言,是在编年史意义上的整个人类历史的每一个时间区间(时段)建立了两个坐标系。时段的左端点是历史的前提,时段的右端点是历史的结果,时段是由人类广义实践活动或者索性就是人的活动组成的时间有先后的过程。当然在某些情况下,这一时段作为有先后的时

间也可以不同时强制同时，过去那些事和人物是作为当前(所论及的时段)的前提存在的。一切远大理想也要变成当前的设想才能生效，这对实事求是，一切从实际出发是大有好处的。这是海德格尔所谓流俗的永恒现在的时间哲学，继承了自亚里士多德以来的传统。从哲学体系上来说，是一块整钢，也就是一元论。虽然在这一元中，强调了"历史唯物主义的历史概念远不只是活动或过程概念，更是文明的概念"，"我们不赞同以辩证唯物主义和历史唯物主义来称谓和定位马克思主义哲学，也不认同以实践唯物主义来称谓和定位马克思主义哲学，而把马克思主义哲学称谓和定位为历史唯物主义"。孙正聿对恩格斯没什么异议，因为在这个问题上马克思和恩格斯是基本一致的，也就是说他理解的历史唯物主义，在马克思、恩格斯、列宁那里都有充分的依据。关于列宁认为的马克思哲学是一整块钢的说法并不构成否认辩证唯物主义与历史唯物主义的充足理由，因为这块钢可能是块合金钢，合金钢仍然可以成为一个整块。一元论的文本依据当然是有的，因为自然科学和人的科学变成一门历史科学。

现在的问题是：如果时间以今天为时间的区间，人的活动的前提就是昨天的人和活动的结果。昨天的文明，今天的历史还将成就今天的人和今天的文明，今天的思维要在今天的实践中检验其真理性。那么辩证法在哪里，唯物主义在哪里？自然界在哪里？我认为这是典型的形而上学的思维方式。人的活动都是有目的、有意识的活动，怎样区分人的活动与石头的存在？还是辩证唯物主义(主要关于自然的学问，包括人的学问)和历史唯物主义(主要包括人的学问，也包括自然科学，才是一门历史的学问)好。辩证唯物主义和历史唯物主义的划分就体现了辩证法，辩证法主要关于事实判断(也有价值判断)。历史唯物主义主要关于人的价值判断(也有事实判断)，辩证唯物主义与历史唯物主义则是关于事实判断与价值判断的统一，本书称为实践判断。很符合中国哲学中"一阴一阳之谓道"的道理，人虽然是从自然界走出来的花朵，但人还是在自然界中，与人无关的抽象的自然界，对人来说是存在着的无；但由于时间区间的有限性(影射个人生命的有限性)，当下无的东西，昨天可能有，明天也可能有。关键是无无着，无无化一切，包括人这种终有一死者。在任何哲学体系中取消这种有和无的辩证统一都是有问题的，因为无不是彻底的无，彻底的无以后人类社会就不会有发展了，而发展的本体毫无疑问脱离不了与无着的大自然的关系。所以我认为历史唯物主义一元论不能成立，前文说了要构成一个拓扑空间，光有 X 是不够的，还得有空集 $\phi(X,\phi)$ 才能构成拓扑空间，天外才能没天。现在将辩证唯物主义无化是可以的，但无化以后还得保留在体系中才行。一元论是不行的，因为 $1\times1=1$，$1\div1=1$，世界太没有丰富性了。自然界作为天人合一前提下的天人二分是丢不掉的。马克思的历史科学也包括了两部分，自然科学(对象主要是自然)和人的科学(对象主要是人)。人的至上性可以强调，但没有非人，也就没有了人。因为人吃的饭，住的房子，穿的衣服都是非人，人与非人，一阴一阳才能成道。传统意义上的历史(过去的事)也不能用一个时段上的初始条件来穷尽其无限丰富性。这是单纯历史唯物主义不能成立的根本原因，某种意义上(具体地说就是在本书第六章所论的文化传统与传统文化辨析的意义上)历史唯物主义没有传统意义上的历史是不能立论的。新解释的历史可以用时间或者与时俱进来替换，但历史唯物主义得有历史本身才行，历史本身在哪里，就在自然界，因为自然有记忆[9,10]。按作者的观点，孙正聿理解的历史唯物主义，是有很浓厚的形而上学化的历史唯物主义，根本不是辩证唯物主义的历史唯物主义。

2.3　评俞吾金理解的历史唯物主义

与孙正聿不同,俞吾金理解的历史唯物主义通俗一点,就是要"敞亮"马克思主义哲学的阐释者们[13,14],包括恩格斯、列宁、斯大林对马克思哲学的"遮蔽"[13,14]。早些时候在《实践与自由》[15]中还比较委婉一些,在《被遮蔽的马克思》[5]中则对恩格斯搞的辩证唯物主义、自然辩证法提出了不同意见,主要是指控恩格斯回到了旧唯物主义。哲学的复杂性在于对已去世的人,从其论著中总能找出支持阐释者观点的一些句子或段落,为了回到事情本身,我参考了黄枬森的说法[12]。也翻开了我手上自然辩证法的参考书[16]。文献[12]和[16]基本上是不支持俞吾金的说法。

现在的问题是本书怎么看这个问题?翻开自然辩证法,恩格斯的劳动创造了人本身的观点被论述自然辩证法的书所引[16],作为与马克思合作40年的马克思主义革命家,恩格斯临死前还在撰写《自然辩证法》。不能要求伟大革命导师在学术上做到十全十美,哲学的本性决定了任何哲学都不是十全十美的。但恩格斯为马克思的社会学说奠基(建立马克思主义哲学的世界观),也就是为历史唯物主义奠基,这是俞吾金和黄枬森都承认的基本事实。据文献[12]介绍,这是由于马克思和恩格斯的分工造成的。恩格斯负责自然科学研究,马克思负责经济学和社会历史研究。文献[12]认为,恩格斯在辩证唯物主义世界观的创造和阐释两方面都有建树,是比较有理有据的。作者认为区分旧唯物主义与马克思的唯物主义关键是看怎样看待物,如何把物看成人的活动的产物、劳动的产物,人的本质力量对象化在物中,看成生产劳动的产品。恩格斯既然知道劳动创造了人本身[16],他当然就知道自然界是人的活动的自然界,也就是文献[16]说的人的自然化与自然的人化的统一,也就是说辩证唯物主义的自然观是可以成立的。人的自然化和自然的人化都包括了对事物的肯定理解的同时对事物的否定理解,是既辩证又唯物的,是做到了既可从客体(作为自然界的对象)方面理解,又从主体(人,不仅是自然界的人,而且是社会实践中的人)方面理解。而且恩格斯特别还对事物做了暂时性的理解,甚至必然灭亡的理解,所以恩格斯的学说是辩证唯物主义是不成问题的。恩格斯学说不完善的地方,哲学研究者们可以进一步完善。

下一个问题就是马克思的历史唯物主义需不需要辩证唯物主义为其奠基?我认为哲学体系的构建是个各显神通的问题,不同的哲学家有不同的方法。可以需要奠基,也可以不需要奠基。总的说来对别人的工作都要宽容,别人这样说,这样做总是有一定的道理。作者认为是需要奠基的。社会固然是人与自然界本质的统一,但每个人同时也是自然界和人类社会的统一。尽管有些哲学家说人是理性的动物、会说话的动物、劳动的动物、政治的动物、符号的动物、情感的动物,但绝大多数哲学家还是承认人是动物,与自然界的其他动物有相同也有不同。可以不承认劳动创造了人本身,也可以不承认思维与存在的关系问题是哲学的基本问题,但总得承认历史上人是以自然界的动物逐步演变成人的,人类认识世界和改变世界的能力在逐渐增强,新的物质的、精神的文化产品不断地涌流,发展是没有止境的。也就是说自然无化着人类的生活,让人死去,另外人也让自然无化着。比如旧式纺纱机器,在中国被使用了几千年,现在正在无化(消失掉)。自然让无无着,人也让自然无着。有与无的矛盾运动是任何哲学家都否认不了的一个事实,只要时间成了时段,事情一清二楚。前文已具体阐述,不再重复。

从历史学的观点，人出现之前自然已存在，人死光了之后自然界还存在，所以人类社会也需要做暂时性的理解，人类社会生活需要自然为其奠基。天最大，人次之。总有人不知道的事情存在。在这个意义上历史唯物主义离不开辩证唯物主义。至于到底以哪方面为重，也不能一概而论，还得抓住具体问题具体分析这个马克思主义活的灵魂。实事求是，一切从实际出发。总的说来还得重视物的生产，也要重视人与人的关系、人与事的关系、人与自然的关系等，这是一个复杂的问题。还是那句话，以数学的眼光来看，一元论都难以展现世界的丰富性，最少都得二元论(或者包括两个元素的完备一元论，见导论)才能展示实体的无限多个属性。这个问题需要按斯宾诺莎哲学来重审。

对于客观物质世界的存在性，特别是作为本体论的合法性，可以借鉴邓晓芒在文献[13]中介绍的方法，第189页补上"实践唯物论"的缺环——论感性对客观世界的本体论证明，基本上把邓晓芒的实践唯物主义换成辩证唯物主义即可。也就是说，在人从自然界到人类社会的几百万年的劳动中，由于劳动的感性特征，人类通过感性的自明性，发现了世界的物质性这一真理，从而开启了认识世界和改变世界的道路，使自然界的人逐渐地变成了人类社会的人，这也就是辩证唯物主义关于物质世界存在性和第一性的本体论证明。这方面马克思说过很多话，不必在此多说马克思怎么说。只要回顾一下中国历史，历次农民起义都是由于农民没饭吃，才导致官逼民反，所以物质是第一性的，也就是陈云提醒的"无粮则乱"。人类社会的发展离不开人类与自然界的斗争及和平共处，人类史也就是自然史。自然史也不能不包括人类的历史，自然与人在社会中统一，人的自然性与人的社会性在每一个现实的人身心中统一。马克思主义哲学的出发点是现实的人，将其改为现实的每一个人，以免用抽象的人吞并掉具体的每一个人。以集体、家庭、集团、国家、人类的人吞并现实中的每一个人、感性的每一个人、主体的每一个人、实体的每一个人、自然的每一个人、神圣的每一个人、实践的每一个人、劳动的每一个人、社会的每一个人、历史的每一个人、在世的每一个人、诗性的每一个人、会说话的每一个人、有情绪有情感的每一个人、有意欲有意志的每一个人、有行动能力和行为方式的每一个人。

特别注意每一个人首先是自然的人，自然界中存在的人的最小单位是个人，一个人；而社会(人类社会)中存在的人的最小单位是两个人。按马克思的逻辑，现实的个人到社会的个人再到自由的个人正好符合黑格尔辩证法的正反合，所以辩证唯物主义关于自然界的论述多一些，历史唯物主义关于人类社会的论述多一些。关键在于和字，表明是对自然界的人和社会中的人的双重扬弃，是对全人类的自由和解放，是一种革命的哲学、解放的哲学，只有解放全人类才能解放每一个个人，只有别人都自由了自己才能获得自由。也只有每一个人有了自由，社会才有自由。马克思哲学表述为，称谓和定位为辩证唯物主义与历史唯物主义。这没有什么不妥的，强调了一个实体＝人类(包括人类中的每一个人)为争取在自然界的自由和解放，争取在人类社会中的自由和解放的共产主义运动。关键又在物的生产劳动和物(也就是财产)的越来越合理的分配和支配关系，辩证唯物主义和历史唯物主义已经是一块整钢(合金钢)，符合斯宾诺莎一个实体两个属性，物表现为商品(自然属性和社会属性)和对商品的扬弃，特别是商品的社会关系本质的扬弃，是实践的哲学、历史的哲学、革命的哲学、行动的哲学、理论的哲学。马克思说过，批判的武器代替不了武器的批判。比如平津战役的胜利，因素很多，关键还是国民党天津城防司令看见了解放军的大炮已经比国民党守军的大炮厉害得多，通过这种感性，这种感性的自明性，不得

不选择放下武器快速投降。

前文说了历史唯物主义也可以不要辩证唯物主义为其奠基,这又是为什么呢?因为历史唯物主义自己可以为自己奠基,当然也不是独断论的,仍然是感性的。对于人类活动中的每个人来说,通过这种感性的活动,这种生活的感性自明性,每个人都能发现人类活动前提(也就是第一性)是客观(人类客观性,人与人之间可以相互确证同一事实)的。在自然科学方面,由于自然事实的可重复性,这种客观性要好些。在人类社会领域只能相互理解,具有人类相通性(虽然做不到完全一致的物质性存在)。而且人类活动的结果很大一部分也是客观的、实在的、物质性的产品或商品。但是能不能丢掉已经不在当下存在的事物呢?也就是没有进入当前生活的事物呢?不能。因为这已是历史性的另外一种体现,历史唯物主义只讲当下时间性的“历史”,不讲历史学意义的历史也是不行的。过去了的历史要当下化,共产主义远大理想也要落实到每一天的活动中才是历史唯物主义。其中把每一天变成实现共产主义运动的一个环节。

从现实的每一个人出发,并不可以丢掉非现实的事物,这才是唯物辩证法的对立统一规律,也就是有与无的对立统一。以上论断照样适用于对实践一元论的批判。实践着的人类社会是一个有目的、有意义的社会,必然要求一个不是实践的(而是自在自然的物质世界)、没有目的、没有意义的非人类社会与之如影随形,才是唯物辩证法[12],才是辩证唯物主义与历史唯物主义[12]。有 X,还得有空集 Φ,才构成拓扑空间。一元论是不好的,两只手才方便,既要有看得见的手,也要有看不见的手,这就是世界的显隐运作。虚无化并不等于虚无,真空不空,真空具有无限丰富性。

任何一元论,不是没有道理,而是不完备。两只脚才方便走路,麦克斯韦方程的本质是用两只脚走路,变化的电场产生变化的磁场,变化的磁场又产生变化的电场。变化的自然界产生变化的人类社会,变化的人类社会又产生变化的自然界。虽然将 (X,Φ) 理解为一个拓扑空间也是一元论,这样就是完备的一元论,也就是斯宾诺莎的一个实体两个属性。实体=拓扑空间,属性=广延+思想。广延属于自然界,思想属于人类社会。黑格尔的逻辑学=(外化自然界,主观精神,客观精神,绝对精神),属于完备二元论,可以认为是四个东西,也可以认为是五个东西(世界)。逻辑学没有时间性,是永恒现在=永恒过去=永恒将来=不同时强制同时=神性的目光。逻辑学的内容是人性目光下的时间性,先有自然界,后有个人,再有社会。将来会有自然界、人类社会和个人的高度统一和高度一致的绝对精神。

马克思和恩格斯受黑格尔的启发,根据物质世界自然观,得出劳动创造了每一个人,现实的人类社会的历史性进程,共产主义远大理想的必然实现和资本主义的必然灭亡,写下了《资本论》大写的逻辑。所以本章的叙述遵照历史的轨迹,既是二元论也是三元论。以前说哲学是关于自然界、人类社会、人类思维最一般规律的科学,可以扬弃为哲学是关于自然界、人类社会、每个人生的学说和问题。主要的是世界观、社会历史观、价值观和人生观。所以文献[12]的体系是一个不错的体系,这里可以提出改进意见:可以将唯物辩证法的自然观(世界观)、历史观(价值观)、人生观(人学)并列作为第一层次。文献[12]将人学摆在第三,基本上有这样的效果。体现在每个人身上自然属性与社会属性的统一(劳动力作为商品,也作为主体)。自然界与人类社会的哲学问题属于社会意识形态(思想上层建筑),自然界与人生的问题属于家庭哲学,落实到人的生产问题。人类社会与个人属于

伦理学,包括政治学、法律、军事等(政治上层建筑)。人类社会与自然与个人表现为中国哲学中待人接物与对人处事的学说和问题。最后关于空集的学问是整个西方哲学的形而上学,具有鲜明的形而上的特征,按本书体系表现为社会化历史性的场,一切过去的事物,一切将来的事物,这个场既是当下时段的前提也是当下时段天地人三方活动的结果。天＝人类社会,地＝自然界,人＝每一个个人,这样才能实现天地人的虚实结合。社会化历史性的场既是自然的,也是社会的,更是个人的。既有实际性又有超越性,只有这样才能给美学、宗教学、信息哲学、意志哲学、历史哲学、未来哲学等留下地盘。社会化历史性的场才能穿透一切,穿透主体间性、客体间性、主客体间性,穿透每个人的内心世界。社会化历史性的场还具有不能用本书体系穷尽的无限丰富性,无化着的自然也在空集之中,与自然(人化自然)形成对立统一。但空集中的自然代表物的散去(无化),回到古希腊的话是 Aletheia,人化自然代表物的聚集[14],回到古希腊的话是 Logos[14],Aletheia＋Logos＝Physis＝完备三元论。唯物主义是以物的聚集与物的无化联系起来的辩证唯物主义,落实到人也就是用人的生与人的死联系起来的人生。面死而生体现人的时间性,欢乐的涌泉代表人生的自在的状态,活着就挺好。俞吾金理解的历史唯物主义不够到位的地方请参见本书 6.4 节“文化传统之辨析”中关于文化传统与传统文化的时间性分析。

2.4　内圣与外王二元论的重新定义和当代解释

在 2.3 节快结束的时候,稍微带点牵强附会(做哲学总是难免牵强附会),但总体上还是通的,作者通过说明二元论与一元论和三元论相通,重新定义了《大学》的八条目如下[17－21,22]:

格物＝唯物辩证法的世界观(自然观)＝物质生产活动＝人化自然的研究;

致知＝唯物辩证法的价值观(历史观)＝精神生产活动＝人类社会研究;

诚意＝唯物辩证法的人生观(人学)＝成人＝每个人与自己的关系;

正心＝自然界与人类社会的哲学问题(属于社会意识形态,思想上层建筑);

修身＝自然界与个人＝自然界中的个人与社会中的个人的双重修炼,身体修炼;

齐家＝人类社会与自然界与个人(表现为中国哲学中待人接物与对人处事之学问);

治国＝以人类社会与个人之间的伦理、道德、法律、军事、政治、经济、文化语言等关系来体现,国家＝全人类＝人类中心主义的人类一切社会关系的总和;

平天下＝关于空集的学问[22]＝西方形而上学的当代发展＝时间性存在的社会化历史性的场加上过去了的世界、未来的世界、超越现实的世界等,(详见 2.3 节末尾的说明)＝万物一体的穿透。

内圣＝(正心,修身,齐家,治国,平天下);

外王＝(格物,致知,诚意)。

内圣与外王依赖于个人(诚意)与人类社会(正心)之间的心意场来打通,这将是我另一著作的主题。当前内圣与外王还是靠物的聚集(格物、生产)和物的无化(平天下中的物的消费)来打通,体现唯物辩证法在物质层面的辩证统一和物质第一性的原则。一个重要的意义扩展是将诚意理解为对致知的知和对格物的知,也包括对自己的知。曾国藩曾经将诚意解释为对致知的知[23],这样三纲领就紧密地与格物、致知、诚意联系起来,也就是

说纲与目之间有了内在的、紧密的联系,这样才能做到纲举目张。三纲变成了物质生产活动、精神生产活动和建立在物质生产产品和精神生产产品充分涌流基础上的个人的自由与解放活动。与封建社会的做官当老爷的学问基本上脱离了关系。亲民在格物,民以食为天。止于至善在致知,体现了在精神文明和物质文明基础上的制度文明,明明德是以每一个人为目的的争取自由与解放的活动。内圣之学包括正心、修身、齐家、治国、平天下,包括了人类社会不同岗位的个人之间人格上平等,虽然在做事的时候有分工和角色的不一样,但在法律面前,在金钱面前还是基本上平等的。

大学之道,在明明德,在亲民,在止于至善。历史上关于亲民与新民有各种说法[18-20],我觉得都有道理,亲民就是要维护好人类社会中人与人之间的亲切关系[20](亲如一家)。既然大家都是公民,新民表示一种信息化的生存。在已有良好关系的基础上还要追求更好的关系,在已有自由的基础上追求更加自由,在已经翻身求得解放的基础上追求思想上和行为上的更加解放。亲民在格物,在已解决温饱的基础上要争取小康社会,让物质财富更加充分的涌流。因为人的存在是一种永远没有完成、永远都能发展的活力、永远都不是其所是和是其所不是[22]。同样明明德,就是在已经是明德的基础上向更高目标的明德进军。明明德体现了每个个人与人类社会之间的互动,变化的个人产生变化的社会,变化的社会产生变化的个人[22]。在充分肯定现行制度已经很好,每个人也都挺好的基础上(明德),进一步明明德,止于至善就是达到真正的致知。以道德为例,就有点类似于王阳明的在个人、家庭、集体、集团、国家、全人类的致良知[20]。一切主体(包括个人、家庭、集体、集团、国家)都能很好地相处,与大自然的关系也挺好,待人接物,对人处事一切都很和谐。总之三纲领要落到实处,要有利于生产力的发展,要有利于国家综合国力的增强,要有利于最广大人民的利益。以前《大学》的三纲领与八条目之间只存在弱耦合,本书解释的三纲领与外王之道的三条目高度一致,形成了强耦合。可以将三纲领领会为:大学之道,在诚意(明明德),在格物(亲民、新民),在致知(止于至善)。也可简写为:大学之道,在诚意,在格物,在致知。按文献[18]的解释,居中的在格物是最重要的,之所以这样说,体现了辩证唯物主义的物质第一性,生产劳动第一性(本书体系,首先是劳动,一元论)。三纲领是八条目的本,根本上还是外王为本,只是现在的本已经不是封建社会考秀才,考举人,考进士,然后做官当老爷[18,20]。而是要树立辩证唯物主义的世界观、价值观、人生观。要建立越来越好的物质文明、精神文明、制度文明,以塑造共产主义运动的革命者、建设者、批判者、拥护者。

内圣之道包括正心、修身、齐家、治国、平天下。仍然是居中的齐家最重要的[18],也就是齐家在内圣之道中处于最重要的中心位置。这体现了中国文化的特色,在短时间内还有相当的正确性。但与传统解释不一样,齐家已是内圣的一部分,已不是外王的一部分,体现了社会对家庭的尊重,尊重了家庭内部的隐私权和在符合法律基础上内部自治权(私权)。当然这种自治也是正心前提下的自治,是在社会意识形态引导下的自治。人类社会之内的事都是内,自然界是身外之物。在内圣中当然就不能以修身为本,齐家是本,正心、修身、治国、平天下是末。历史上自宋朝以后由于修身为本,国家和家庭都越来越弱,因此再以修身为本不好,不利于中西文化的接轨。内圣首先应体现在家庭的和谐和富足、幸福。虽说家家都有一本难念的经,但修身不体现在家庭上,极容易落空。家庭既有自然属性,又有社会属性,还有个人属性,内圣在这里突显是对的。因为现在无论东方还是西方,不仅是每个人精神家园在物化世界的冲击下逐渐失去,而且是实际性的家庭也在不断解

体。如果再不突出家庭在稳定和发展中的中心地位，个人的自由和解放也不一定能实现。以上 3+5=8 的划分[22,23]是有自然科学依据的，因为光是自旋为 1 的粒子，有 3 个状态，引力子是自旋为 2 的粒子，有 5 个状态。光是显的存在，引力使人凝聚在一起。社会和家庭都不能没有凝聚力。光是射线，向外射出，包括格物、致知、诚意这 3 个外王的成分。

以前以修身为本有其片面性，所以《大学》最后一段应修改为："自天子以至庶人，壹是以齐家（原文是修身）为本，其本乱而末治者，否矣，其所厚者薄，而所薄者厚，未之有也。"仅就这段话的字面意思来说也是改后更通顺，先看文献[17]的译文："从天子到平民，人人都要以修养自身的品德为根本。一个人，他的根本已乱而枝末却能治理好，这是不可能的。正如他尊重的人却对他轻蔑，他轻蔑的人却对他尊重，这样的事是没有的。"

如果以修身为本，全是自然界的个人，也就没有他尊重的人和他轻蔑的人的区分，一句话修身没有形成社会，没有自己与自己的关系（已被本书解释为诚意），谈不上处理相互关系，所以难以作为根本。再看文献[21]的翻译："自身的品德修养这个根本被破坏了，却要齐家、治国、平天下，那是不可能的。正如我所厚待的人反而疏远我，我所疏远的人反而厚待我，这样的事情是没有的。"换成以齐家为根本就通顺了，而且符合中国文化以家庭关系为参照物的爱有差等的现实。

和谐的家庭这个根本被破坏了，却要正心、修身、国治、天下平，那是不可能的。显然家庭解体，对子女不利，这些子女的修身问题就要难得多。性格上有缺陷，与人交往就困难一些。而且道德教育主要也要靠家庭的教育、父母的言传身教，个人关起门来修身难以成为根本。传统意义上的修身已放在外王中的诚意那里去了，作为外王中的一个元素。现在内圣中以齐家作为根本是更合适的。学校与社会的教化无论以修身为本还是以家庭为本都是差不多的。总之，坚持在内圣五个元素中以齐家为本，而正心（相当于学校教育和社会影响）、修身、治国、平天下为末。家庭解体对老人、小孩，以及对工作都不利。

解释完《大学》的首末两段，接着解释知止而后有定，定而后能静，静而后能安，安而后能虑，虑而后能得。南怀谨将这段话解释为七证，因为他看见了在文本上呈现"知、止、定、静、安、虑、得"七个层次的学问修养次序。本书进一步看出了并未现身的道，所以大学之道必须落实到道，也就是要将七证改为八证。也就是八个层次的学问修养次序，"知、止、定、静、安、虑、得、道"。这八个层次正好是格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下的政治哲学。道乃是平天下和使天下平之道。

格物对应着本体论和认识论上的知；止=止于至善，对应着本体论和认识论上的致知；定对应着本体论和认识论上的诚意；静对应着本体论和认识论上的正心；安对应着本体论和认识论上的修身；虑对应着本体论和认识论上的齐家，对家里人比对外人应更加精思、思念、思虑、忧虑、顾虑、考虑；得对应着本体论和认识论上的治国，得=德=以德治国；道对应着本体论和认识论意义上的平天下=本书的空集，具有无限丰富的含义，是形而上的看不见、摸不着、听不见的东西，具有穿透宇宙万物、穿透人生的本质力量。

南怀瑾明明知道[19]51"其实'得道'这个名称，也就是从《大学》'虑而后能得'这个理念而来的，由此演变，到了唐宋以后，佛家的禅宗普及流行，大致标榜神以'明心见性'而得道。道家也相随而来，标榜以'修心炼性'而得道。儒家的理学家们，当然不甘落后，也自标榜以'存心养性'而得道。你们看看曾子这一句'虑而后能得'的内涵，是多么隽永有时啊！"可惜南怀瑾缺乏西方形而上学的神性目光，没有看出大学之道中的道就是平天下并

使天下平的道。这一点是由本书提出的。政治哲学之道是求得自然、社会、个人的最高程度的和谐。《大学》作为政治哲学当然不可缺失这一个元素。

物有本末,事有终始,知所先后,则近道矣。本书将这四句话称为四元。已经得到了"知、止、定、静、安、虑、得、道"八证,然后再分别从物的层面(本)和事的层面(末)来八证。在认识论(社会意义上才有认识论)和本体论(自然意义上才有本体论)分别论述格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下,从而构成 $2^4=16$ 个元素。指数 4 代表物、事、知、道。也就是说在辩证唯物主义的意义上,自然界是本,人化自然是末,自在的非人化自然是本,因为本末的标准是以知所先后来确定的,先入为主为本,看不见、摸不着、听不见的道则类似于双曲线的渐近线[18],只能无限靠近,但不能完全达到,代表人类社会的一种永恒发展。自然界是本,人类社会为末。只有作者的上述理解和解释,才能说清楚下列的《大学》两段为什么要有所重复,重复又有什么意义:

"古之欲明明德于天下者,先治其国;欲治其国者,先齐其家;欲齐其家者,先修其身;欲修其身者,先正其心;欲正其心者,先诚其意;欲诚其意者,先致其知,致知在格物。

物格而后知至,知至而后意诚,意诚而后心正,心正而后身修,身修而后家齐,家齐而后国治,国治而后天下平。"

根据本书的理解,《大学》的经是三纲、八证、四元、八目、十六条。最后用本书哲学体系对《大学》的体系结构做一下梳理:

明明德=一个实体=两个属性=亲民+止于至善

这是 $2^0=1$ 和 $2^1=2$ 的自洽表现,一体两面,也就是:

明明德=诚意=格物+致知

根据 $2^2=4$,定义(事与物的完备二元论):

明明德=物+事+知+道

根据 $2^3=8$,定义:

明明德=知、止、定、静、安、虑、得、道

根据 $2^4=16$,定义:

明明德=平天下、治国、齐家、修身、正心、诚意、致知、
格物、物格、知至、意诚、心正、身修、家齐、国治、天下平

明明德=以齐家为中心,因为爱有差等也在家庭(家族)中最能显明=个人与社会的互动=个人与社会的同呼吸共命运。所以明明德在《大学》的体系中有着比通常理解[17-21,23]更为重要的作用和意义,政治和法律本身没有基础,是道德为政治和法律奠基。所以整个《大学》是以道德教化为中心,以家庭伦理为核心的政治哲学,以爱有差等为情感基础的一种合情合理的扎根于中国文化的政治哲学体系。

根据文献[20]的观点,《大学》文本中可能没有本节所诠释的意义,得承认有六经注我的趣味,文献[22]已指明我注六经、六经注我都是可以的。而且根据伽达默尔的诠释学,文本的意义也是在发展中生成的。今人的视域与古人视域的融合就产生了《大学》这一经典的新的意义。在数学与神学的目光下,能够看出了经典文献中别人没有看出的意义,从三纲领对应着八条目,从一元论到二元论到三元论到四元论,一环扣一环,扣得很紧,确实是古代齐鲁文化的杰作[19]。固然作者对《大学》文本的数学化结构的看法可能是独到的,但也并不能完全排除古人有比今人更高的写作智慧。因为作为中国古代思想文化之根的

《周易》就是采用的2进制[18,23]，只是现在国人研究出周易的二进制属于太极代数体系[24]，与西方人二制的布尔代数体系是有不同的。太极代数体系与海德格尔哲学比较接轨(应该反过来说，但正说反说可不加区分)，《周易》是中华民族精神的源头活水之一。比如北宋的周敦颐就曾写下十分著名的《太极图说》[23]："自无极而为太极，太极动而生阳，动极而静；静而生阴，静极复动。一动一静，互为其根。分阴分阳，两仪立焉。阳变阴合，而生水、火、木、金、土。五气顺布，四时行焉。五行——阴阳也。阴阳——太极也。太极本无极也。五行之生也，各一其性。无极之真，二五之精，妙合而凝。乾道成男，坤道成女。二气交感，化生万物。万物生生，而变化无穷焉。惟人也得其秀而最灵，形既生矣，神发知矣，五行感动而善恶分，万事出矣。圣人定之以中正仁义(自注：圣人之道，仁义中正而已矣)而主静(自注)。无欲故静，立人极焉。故圣人与天地合其德，日月合其明，四时合其序，鬼神合其吉凶。君子修之吉，小子悖之凶。故曰：立天之道曰阴与阳，立地之道，曰柔与刚；立人之道，曰仁与义。又曰：原始反终，故知死生之说。大哉易也，斯其至矣。"

虽然是宋明理学的开创者，周敦颐在一个地方将三五至精图的三五至精改为二五之精，这就是当时(宋朝)的今人不如古人的地方，三改为二，漏掉了自旋为0的一项，使得光子没有能量，这是不成的。本书研究真空中的电荷与质量，发现周敦颐的东西相当精准地描述了宇宙背景的状况，只要把三五至精改回去就可以了(替换二五之精，妙合而凝)。要转换成男女生儿育女之事，其实还要个看不见、摸不着、听不见的道，参加进来才能生儿育女。所以中国古代哲学家总的说来缺乏形而上学的神性目光，总是容易把阴阳不测之谓神的神漏掉。

中国的阴阳八卦是很神秘的，漏掉了其神秘的元素，那还用八卦测什么呢？八卦图是将两个不同时的四象图错位45°，强制同时得到的，有非常高深的学问在里边。所以《大学》的经文，经作者的解释，结构得也是天衣无缝的。如果实在要以修身为本，那肯定也是以本来不同时的一个男人和一个女人的强制同时修身为前提才好，而不同时强制同时的实现者就是天合、地合、人和、已合的道。所以作者才领悟出要以家庭为本。一个自旋为零的量是以速度座架的，另一个自旋为零的量是以加速度座架的，缺一不可。老子道德经中的道是实有，是自旋为2的玻色子凝聚态。万物从道而生又回归于道。

周敦颐太极图说中阐明的宇宙本体对立统一规律从郭象的庄子注就开始了，经过张载、王廷相、王夫之、熊十力等的研究最终被我归结为在真空这种特殊情况下，怎样统一牛顿万有引力定律与库仑定律的问题。先哲们的哲学研究基本上是符合实际的，很有点神秘，他们没有相应的科学知识，为什么能说得那么准，尤其是张载的话，说得很绝对，丝毫没有商量余地。幸运的是张载是对的，没有得道怎敢说："为天地立心，为生民立德，为往圣继绝学，为万世开太平"。

陈立夫在书中[25]写道："《四书道贯》取孔孟之道'一以贯之'之意，将《大学》、《中庸》、《论语》、《孟子》四书分格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下等八篇归纳讲解，使之成为有系统的整体。立夫先生国学基础雄厚，讲解详尽，考证有据，又谙熟西方文化，对比中西以观异同。因而对现代读者尤其青年读者了解孔孟学说，增进其对传统文化的理解甚为有益。"本来我也有类似想法，鉴于陈立夫已经成书，加之这一章篇幅限制，在此就不再展开了。陈立夫的治国篇，分绪言、治国九经、王道与霸道、治乱兴亡之道、君臣之义、施政要务等。陈立夫的这本书还是可以看看的。

不管怎样,本节对读者理解《大学》一书,特别是理解《大学》经文的数学结构还是很有帮助的。

2.5　生产力的完备二元论:生产力的四要素理论

读了王峰明关于生产力的书[1]好几遍,总是不满意此书对于生产力要素的界定。总是在二要素和三要素中打转。二要素是指劳动力和生产资料,也就是人和物,三要素包括有目的活动或劳动本身、劳动对象和劳动资料。

我觉得二要素论还是好懂的,三要素论就不好懂,从上节的讨论可知,三要素论要成立,除非劳动作为实体,而劳动资料和劳动对象作为属性还是可以的。但明显用劳动资料和劳动对象刻画劳动是有问题的。二要素论也有问题,劳动力和生产资料固然是生产力中的两个重要因素,但劳动的产品,对于资本主义商品生产来说是更重要的东西。特别资本家关心的是产品,如果劳动者生产不出资本家想要的产品,劳动者是不能被资本家认为有生产能力的。所以生产力的二要素论可能只能作为大学以下教科书的内容,生产力的水平很大程度上也是由生产产品的质量、数量、复杂程度来衡量的。好在在三要素中有劳动的对象一说。文献[5]第 288 页对这个问题有很好的补充。

"人所共知,在马克思的语境中,人的实践活动的最基本、最普遍的表现形式是劳动。在手稿中,马克思对劳动的对象化下了明确的定义:劳动的产品就是固定在某个对象中、物化为对象的劳动,这就是劳动的对象化。劳动的实现就是劳动的对象化。显然,在马克思那里,实践的对象化主要体现在劳动的对象化上,劳动的对象化也就是劳动的实现,而劳动的实现又是以劳动产品的形成作为标志的,在这个意义上,劳动产品就是劳动的对象化的集中表现"[5]。

按照本书哲学体系,可以将生产力定义为如下四个要素:

要素 1=劳动力(也就是从事劳动的人)作为劳动价值的人化形态[3],以劳动力乘以小时衡量;

要素 2=劳动产品(也就是劳动者本质力量(价值)的对象化)作为劳动价值化形态[3],以劳动力乘以小时衡量;

要素 3=劳动力的劳动作为使用价值被资本家使用,实现与要素 1、2、4 的联系;

要素 4=空集,包括潜在劳动力的存在[3]只保值但不创造价值的生产资料,包括正在现实中(已充实的)技术关系和生产关系,自然和人类社会环境等,生产劳动总是人类社会中的生产劳动。

这一定义实现了生产劳动的二重性,也就是人的生产[3]与物的生产(产品)从价值层面的把握。以前的把握是从劳动力的购买,每个劳动力每天多少钱的角度来考虑的。现在更从劳动力的生命持存,以生命生产生命[3]以生命测量生命[4]的角度来考虑了生产劳动的价值二重性。价值是个抽象的存在概念,存在必须与时间相结合才能现身[22]。文献[22]已指出价值必须从价值作用量(价值乘以时间)和价值变化率(每天多少钱)的对偶变量观点来把握[22]。文献[3]给出了具体应用这一概念的应用举例,独立于文献[22]。

回到物理学,能量也是通过能量作用量(量子化的普朗克常数)和能量变化率来把握的。我最近证明这是与电荷量子化相关的一个量,也就是说能量变化率也是可以量子化

的，用电荷量子化乘以系数来实现，这就是量子力学能量变化率的本质。所以在文献[22]中声称，价值哲学是与物理学不矛盾而且与经济学也一致的价值哲学。虽然开了一个好头，但在经济学和物理学两个领域都还有进一步深入研究的必要性和可能性。价值和能量的相似之处和各自的二阶导数、三阶导数……直到八阶导数都有进一步研究的必要和可能。将时间空间化以后，这些都是可以用四阶循环群、四阶克莱因群和八阶循环群讨论的问题。每天多少钱是可以量子化的，因为可以缩小时间的单位。比如某个国家，钱的单位是一分钱，总能缩小时间单位，使得劳动力的使用价值为每个这样的时间单位一分钱。其他钱已是量子化的，都是分的整数倍(四舍五入后)。同样维持生命也可以量子化，每一个意识流动的时间区间或每一次呼吸的时间区间就可以作为单位。进一步探讨留待以后完成。

2.6　生产关系的完备二元论

生产关系的概念体现为两个人之间钱的数量关系，设有 a 和 b 两个人：

要素 1＝a 这个人；

要素 2＝b 这个人；

要素 3＝两个人挣钱的比值；

要素 4＝尚未现实化的生产关系，比如你可以到一个新岗位，挣更多的钱，但你还没去，也就是还没有现实化，还有待充实。

生产关系是个泛函，指向两个算子(个人)，是个能指，只有泛函被国家承认合法或私下里有人愿意违法，而且有了两个人都愿意(不管是否真的愿意还是被迫愿意)来充实这一关系一段时间。时间为零的关系(比如关系交易期间)还不是关系。生产关系的现实性与生产关系作用量有关系，也与生产关系变化率有关系，与时间无关的生产关系并不存在，至少是尚未存在。

生产关系还可以指其他的一些事，只是用钱举例比较好懂。比如资本家 a 和工人 b 一起做一件事 c，这件事是被假设国家认可的合法的，假如这件事只持续一天。工人工资 100 元，生产资料 1000 元(当天耗费的资料 100 元)，卖出去的产品 300 元，资本家赚 100 元，资本家劳动(操心)10 元，净赚 90 元。这里边就可以产生好几个钱的比值以显示生产中结成的关系。

当然这种说法容易造成误解，好像生产关系仅与当事人 a 和 b 以及他们一起做的事有关。其实不然，因为钱就是穿透全人类的场，与全世界的每一个人都有关系。再说事情 c 也需要所在国家的制度认同和制度保障，还有当事人 a 和 b 要不要充实这种关系，也是风险利益共享的。每个人都是社会中的人，自然界中的人，任何生产关系的实现和维护(包括变更)都是有成本的。都涉及每个人的世界观、价值观和人生观，也与这个人的所处自然环境、社会环境、家庭条件、个人自身条件有关系。完完全全是多体关系和丰富的联系。所以本书修改马克思人在现实性上是一切社会关系的总和的定义，而改为一切关联的总和的场来生成各种关系和联系。关系一词马上容易使人想到两体关系，两个人之间的关系。其实关系还有多体关系，多个人之间的关系。照顾到中国文字的历史，用关联显然比用关系更准确一些，但关联不好之处是不太容易让人立即明白含义，但习惯了是一样

的。比如结构主义的结构到底是实在的还是虚的,关系到底是实在的还是虚的,就是历史上哲学家们争论不休的问题。作者对此的判据是持存了一段时间的关系就是实在的,还有待充实(虽然可以充实,但还没有充实)就还只是潜在的关系。比如父母与子女的关系在人的生产意义上,就是一个生产关系,这种关系首先是一个能指,虚位以待。当且仅当父母结婚以后才形成婚姻关系也就有了婚姻关系中 a(父)和 b(母)和 c(a 和 b 已结婚一段时间),才产生了生产子女的可能性,这种可能性对生产子女来说还只是虚位以待的能指,当且仅当子女生出来活了一段时间了,父母与子女的关系才得到充实,才是现实了的父母与子女的关系。能指变成了所指。因为本书哲学体系的时间总是表示时段,所以要判断关系或结构的虚实就不难了,充实了一段时间的关系就是实的,尚未充实的关系也是有意义的,但还没有 make sense(也就是还没有作用量),意义的核心是差异。固定了的比例关系称为联系,变化着的比例关系称为关系。当然联系也是可以随时间而变的,但是为了叙述的方便,本书采用这一约定有其方便之处。社会各成员之间就是联系,生产劳动中结成的关系就是关系。因为本书多数地方已将个人与社会的互动的过程的不同时强制同时,从而使关系凝固为联系。做这样一个区分,好处还是大于坏处的。总的说来社会制度还是相对稳定的,而生产活动的变化比社会制度的变化要快一些。所以主要在人和事的生产劳动中考虑随时间变化的过程。凝固了社会与个人的互动有什么好处呢?主要是时段有起始两个边界点,分别是“前提”和“结果”。现在前提与结果已不可区分,就是说个人首先是对人类社会做出感应(解释过去了的社会),然后是对人类社会做出响应(理解未来社会)。现在简化为每个人都是对社会既能理解又能解释的,同样社会本来也是首先感应每个人的响应形成对过去社会的解释,然后根据社会的意志再对每个人做出响应。现在将时间凝固成一个点或者说将不同时强制同时,社会就是既能理解每一个人又能解释每一个人的形而上的东西,构成了人与宇宙万物的互动。本来物是不能与人互动的,通过社会化历史性的场,就让“死”的物“活”起来了,当然这种“活”仅限于在人类社会中每个人之间或者说人类社会之中,这就是作者让石头和木头也说话的秘密。作者哲学的秘密来自于美学,梅洛-庞蒂费了好大的劲让艺术品对人说话,杜夫海纳也费了更大的劲,试图让死的艺术品对人活起来。中国哲学中也有万物一体与人类中心(民胞吾与)的矛盾,谨慎地限于人类社会中每个人情感上的相通性(见康德哲学)[13]、语言上的可翻译性[22],比如说一支狗在跑这件事,大家都明白是什么意思,尽管可以用不同的语言说出来和写下来。利用人类中心的办法达到了万物一体的目的。如果一开始就万物一体,很多事情就说不通了[13]。物的自明性和客观性分别通过劳动的感性和人与人之间的可理解性来穿透[13]。海德格尔的哲学搞的是万物一体的一套,很难行得通,本书对海德格尔哲学做出改造后,就好用了很多。

这一节只有摘录了文献[1]第十二章和第七章一些话后才能结束:

“生产关系的核心是生产资料所有制关系,人们在生产过程中的地位关系、交换关系、分配关系、消费关系等内容”[1]151。

价值在本质上是一种“生产关系”,商品和货币在本质上也是一种“生产关系”,资本在本质上还是一种“生产关系”[1]273。

马克思严格区分了“生产关系”与“财产关系”。前者是人对“劳动条件”和“劳动产品”现实的“权力关系”,后者则是“生产关系的法律用语”,是法律规定中人的“权利关系”。前者属于“经济基础”,后者则属于“上层建筑”。马克思注重“权力关系”对“权利关系”的首

要性。因为没有前者,后者就会流于一纸空文[1]279。

在马克思看来,离开生产关系去谈论“经济”,就不可能真正理解任何一个历史发展阶段的经济现象、经济关系和经济利益。在此意义上,与其说“生产关系”是马克思主义政治经济学的研究“对象”,毋宁说它是马克思主义的政治经济学所特有的“角度”和“高度”[1]283。

生产关系界定为物质生产过程中发生的人与人之间的“权力”关系,而不包括像分工与协作这样的“技术关系”或劳动关系。生产关系为生产资料的“所有制关系”和劳动产品的“分配关系”所承载和体现,并借助国家与法而成为一种“权利关系”[1]5。

没有生产资料的所有制关系和劳动产品的“分配关系”,在物质生产中就不会结成人与人之间的任何社会关系。[1]5

以房屋买卖为例,权力关系是谁出钱买,谁就有权力,权利关系是产权证上是谁的名字。2008年国际金融危机就是权利关系与权力关系的矛盾为导火线引发的。理论上有产权证就有产权,这是游戏规则。但本质规律在于是否已真正出了买房的钱(真金白银的钱,而不是纸币或证券什么的)。美国次贷危机就是产权证成为一纸空文。虚拟经济也是大同小异的,股权是分割未来剩余价值的资格证书,但却需要你用真金白银的权力关系去买虚拟的权利关系。比如首付百分之二十就可买房,但房价如果跌百分之三十就会产生经济危机,多数人的首付款被金融风暴一扫而空,银行也会欠账。收房不够抵债,银行当然就欠账了,也就可能不收房造成房价进一步下跌。

2.7　生产方式的完备二元论

四大社会形态传统的生产方式理论[1]可以按本书哲学体系解释为:

一个实体＝生产力与生产关系的矛盾与统一
＝两个属性
＝生产力属性＋生产关系属性
＝生产方式

属于完备一元论,在斯宾诺莎哲学的基础上发展而来。

王峰明在文献[1]第七章从生产资料、技术关系、权力关系等多方面阐发了他所理解的生产方式。很明显王峰明忽略了人的生活也是生产方式中的重要元素,而且人的生命只有用人的生命来测度,也就是说,这在讨论生产的时候已经指出了这一点,因为价值的把握必须通过价值作用量和价值变化率来把握[3,22]。本节提出生产方式的完备二元论:

生产方式＝人的生活的生产＋人和物的生产＋人和物的消费＋生产关系的生产
＝生产力＋生产关系
＝宏观时间尺度上的生产力与生产关系的矛盾运动与
微观时间尺度上生产与消费的矛盾运动[26]

从人和物的关系自然推导出四大社会形态:第一,人的依赖性的社会形态(人与物双重依赖);第二,物的依赖基础上的人的独立性;第三,在家庭和睦基础上的社会和谐＝物的独立性基础上的人的依赖性;第四,物的独立性基础上的人的独立性。

在马克思三大社会形态的基础上增加了一种有利于人的生产的社会形态,家庭是社

会的细胞,个人是自然界的原子。家庭关系中的各个人应该逐渐摆脱物的依赖性而以情感和血缘关系作为纽带。到底第三种社会形态先发生还是第四种社会形态先发生还有待人类社会实践的检验,也有可能交替发展一段时间。作为中国人,我觉得中国文化比西方文化具有更大包容性,如果物质产品已充分涌流之后,大家已不用为生活犯愁的情况下,还有什么理由不合家欢乐呢?中国人更看重人与人之间良好的关系。至于西方文化中的自由,相对不是那么看重的,所以中国式的理想社会应该更加接近第三种社会形态。父母与子女的关系很可能还会长期好于其他关系。当然对人的依赖性是对封建宗法社会人的关系的扬弃,由于微信的出现人与人之间的关系确有增强,这是不争的事实。

根据文献[26]中国历史上历次农民起义并不是由生产关系与生产力的矛盾引起,而是由某一小段时间生产与消费的矛盾导致的。本书觉得说得通,生产方式问题确实不能脱离人的生产来谈论,同样社会形态的进步也应该有利于人的生产和人的生活。

2.8　我它与我们的完备二元论

我它关系⇒成人与成物,包括人与自然界的相互关系及人的自然化过程和自然的人化过程(人化自然与自然化人);

我们关系⇒人类精神和空集中(一切关联的总和的社会化历史性的场);

成物=物质基础;

成人=经济基础;

人类社会精神=上层建筑,包括政治上层建筑和思想上层建筑[27];

空集中=当下化的社会化历史性的场,一切意义的生成,过去和将来的社会,尚未和不再与人打交道的事物,历史学、宗教学、美学、信息哲学、意志哲学和不可被本模型穷尽的其他事情。

成物主要是要造物,利用人,利用自然界,利用已有的生产资料造出满足生产和生活需要的物,其中每个家庭衣食住行玩的日用品是头等重要的物。特别是要注意环境保护和生态平衡,考虑可持续发展。如果空气、水都要花大价钱买,生活成本、生活质量、生活的感受(情调)必然下降。

成人首先是要从家庭中生产出人来,所以家庭很重要,健康幸福的家庭产生出健康幸福的子女可能性要大些。托尔斯泰说,幸福的家庭都是相似的,不幸的家庭各有各的不幸。这是从宏观的人意义上说,每个人都要健康、幸福、聪明、心肠好。微观上说,每一个人每一天还要有体力、脑力、待人接物能力和对人处事能力,每天还要进行吃饭、穿衣、住宿、开车或走路、玩耍、睡觉等活动。在这些活动中结成各种生产关系。我不同意将人仅仅理解为关系,因为这样太抽象,应该说人不是一个抽象的人,而是一个具体的人,肩负着生产关系和家庭关系的人,每一个人都要作这样的理解。对于成年人来说,主要就是挣钱中形成的关系和花钱中形成的关系。普通老百姓的大部分钱花在家庭成员身上,所以家庭关系是最重要的经济基础。值得提醒的是经济基础还不是物质基础,本质上是一种权力基础。物质基础以物和生产力为核心。社会权力如果没有实物和可现实化的生产能力保障也是要落空的。真正的钱也可能买不到东西,钱成了废纸。与文献[27]做一点对照,将我它归结为生产,我它中形成的生产关系虽然是受到我们中的各种关系反作用的,但本

书以关系的坐实来讨论问题。一句话落实到人和落实到持续了一段时间的生产关系才算现实的生产关系，才构成经济基础的实际情况。同样，一切的利益关系[28]也都不是经济基础，而是物质基础，因为利益关系哪怕是精神性的，也需要彻底坐实才算是利益，没有坐实到人，没有持续一段时间就还不算利益。所以利益关系比生产关系更根本。

在进一步讨论之前，不难看出，将我它关系与我们关系打通的是生产关系。在社会的意义上就是经济基础，本书的社会指全人类，国家也指全人类，并不指当前某一个国家，这一点已在内圣外元二元论(2.4 节)一节指出过了，再次申明。所以与以前的著作比较一致。社会基本矛盾为两大基本矛盾：一是物质基础与经济基础的矛盾，二是经济基础与上层建筑的矛盾。为了更好的互文性，不得不先停下来把文献[27]中的有关概念抄录如下：

“经济基础和上层建筑是具有对应关系的两个范畴。所谓社会的经济基础，是指同生产力发展阶段相适应的生产关系的总和”[27]105。

“经济基础和上层建筑范畴的提出，同把社会关系区分为物质关系和思想关系密切相关。社会关系包括人们在一切社会领域的活动和交往过程中所发生的联系和相互作用。这种关系之所以称为社会关系，是因为它存在于社会中，是在人们的社会交往中形成的，同人类社会以外的自然界各个对象、现象间的关系有质的区别。”[27]107

“马克思把这一切社会关系区分为物质关系和思想关系，进而指出物质关系是原初的，基础的东西，思想关系是建立在物质关系之上的上层建筑，从而解开了社会关系、社会结构之谜。”[27]107

“作为历史唯物主义专门范畴的经济基础，就其严格意义来说指的是生产关系的总和，不包括生产力在内。”[27]107

“社会的上层建筑是建立在一定的经济基础之上的社会思想、观点以及相应的制度、设施和组织的复杂体系。在迄今为止有文字记载的社会历史中，上层建筑主要是指社会的政治、法律、宗教、艺术、哲学等观点，以及同这些观点相应的政治、法律制度和设施的总和。”[27]108

“政治、法律制度和设施是上层建筑的重要组成部分，在经典著作和日常用语中，通常称为政治上层建筑。政治上层建筑既有国家和法律等制度，又有军队、警察、法庭、监狱、政府部门等设施，以及与之相联系的一套组织。”[27]109

总之上层建筑＝政治上层建筑＋思想上层建筑[27]，“一个特定的经济基础要能够存在，巩固和发展不仅需要强制性(注重号为引者所加)的政治、法律制度和设施来规范人们的行动，把人们的行为限定在一定的秩序之内，而且要有意识形态来论证经济制度和政治法律等制度的合理性，使人们‘自愿’(不管能否做到)地遵守制度，维护秩序。剥削阶级的上层建筑具有这两种职能，社会主义的上层建筑也不例外，也是既有镇压、强制的职能，又有对人们思想意识施加影响的职能。思想上层建筑尽管在不同社会中具有不同的性质和作用，但从一般意义上说，它对任何社会都是必需的。”[27]110

以上是我认为学理工科的人也应该了解的历史唯物主义常识。各个时期的著作大同小异，现在把意识形态并入上层建筑，以前意识形态是单列的，但并入上层建筑更好。

既然这些是上层建筑的问题，我并不准备在此多加议论，请有兴趣者认真学习并深刻领会历史唯物主义的官方说法[27]。本书作为哲学思想的探讨，涉及一点历史唯物主义的讨论[1,3,5-7,12,13,15,26-29]，这与教科书有少许差异。主要是引入了空集，包括了社会化历史性的场，这一数学化的场并不一定是可以证实的。虽然现在大家在使用手机，对场的概念

不陌生了。手机形成的场,既是物质的,又是思想的,把大家的心都能联系起来,可以说有了一点实证意义上的科学性,既是形而上学也有点源于生活而高于生活的意味,是我们在美学研究中发现的场(情场)。但我的这个杜撰会不会偏离马列主义毛泽东思想太远,这是关心我的朋友们担心的,这里不得不找点依据。还好在文献[29]的第190页,孙承叔引用了马克思主义理论家普列汉诺夫在《马克思主义的基本问题》中提出的著名的社会结构五层楼公式:第一层,生产力状况;第二层,被生产力制约的经济关系;第三层,在一定的经济基础上生长起来的社会政治制度;第四层,一部分由经济直接决定,一部分由生长在经济上的全部社会政治制度所决定的社会中人的心理;第五层,反映这种心理特性的各种思想体系,普列汉诺夫的生产力一元决定论也在文献[1]中有专门讨论。

普列汉诺夫还提出过经济基础、上层建筑和意识形态的三层楼说[3]。前面已指出现在官方已将意识形态并入上层建筑,文献[29]将第五层并入第三层,变成了四层楼说,换成本节术语就是物质基础第一层,经济基础第二层,上层建筑第三层,空集第四层。对应于生产力状况的是物质基础,对应于社会心理的是社会化历史性的场。既然文献[29]对普列汉诺夫的社会心理大加赞扬,可以解释很多事情。数学化的场只是一个能指(计算机科学中的地址),对不同的问题可以装不同的所指(数据)进去。既可以是普列汉诺夫的"社会心理",也可以是荣格的"社会无意识",可以是哈贝马斯的"公共领域",也可以是阿尔都塞的"意识形态国家机器",还可以是叔本华的意志本体或尼采的"权力意志"。甚至中国哲学中的"民意"或"人心所向"[29]。所以可以放心地说,本节论述的观点基本上是与专门搞哲学的一些人的观点有相通之处的。

仿照普列汉诺夫,也可以说物质基础决定经济基础,经济基础决定上层建筑,上层建筑决定空集(余集)。但是本书提出了更好的说法以避免文献[29]一会儿说这样生产重要,一会儿又说那样生产重要,因为已把孙正聿的前提和结果在社会的意义上不同时强制同时。

$$\text{社会结果}=\begin{bmatrix}\text{物质基础}\\ \text{经济基础}\\ \text{上层建筑}\\ \text{空集}\end{bmatrix}_{t=\text{时段末}}=\bar{B}_{4\times1},\text{社会前提}=\begin{bmatrix}\text{物质基础}\\ \text{经济基础}\\ \text{上层建筑}\\ \text{空集}\end{bmatrix}_{t=\text{时段始}}=\bar{A}_{4\times1}$$

时段末一时段始>0,则

$$\bar{B}_{4\times1}=\bar{\bar{C}}_{4\times4}\cdot\bar{\bar{A}}_{4\times1}$$

这里

$$\bar{\bar{C}}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14}\\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24}\\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34}\\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44}\end{bmatrix}$$

为一个4阶方阵,$\bar{A}_{4\times1}$,$\bar{B}_{4\times1}$为4行1列的矢量,认为C矩阵是对角线占优的矩阵。物质基础主要由物质基础决定,与经济基础上层建筑空集有关,但关系也没那么直接。同样,经济基础主要与经济基础有关,与物质基础、上层建筑空集也有关系,但关系也没那么大。上层建筑也有其相对独立性,主要与上层建筑有关,与经济基础、物质基础、空集也有关系,但关系没那么直接。举例来说,上层建筑有什么小的问题,主要动一动上层建筑就可

以了。不必先从生产力，再从生产关系再到上层建筑，动了之后也主要影响上层建筑本身，对经济基础、物质基础、空集也有影响，但影响会小一些，可能会有一定的时间上的延迟和空间上的局部化(离得越远影响越小)。空集的阐述很复杂，这里就从简，可仿照其他问题讨论，但空集本身是非当下的东西的当下化，显在的东西的隐式表达，现实的超越化等。

既要追求普遍规律，又要追求具体规律。历史唯物主义是一个方法论，可以用于每天的现实生活，也可以用于研究历朝历代，乃至整个人类的历史，也就是说历史唯物主义还是有历史学的目光的，丢掉历史学的目光我认为不能称其为历史唯物主义。可以称为时变哲学，顶多可以叫时变唯物主义，而不能叫历史唯物主义。怎样把历史收入眼帘的呢?全靠空集。举例来说，研究清朝的事，取时段为清朝，就不能丢掉清朝以前的事和清朝以后的事，这些事都在空集中，不管用什么方法研究历史，总有没有穷尽的历史，也放在空集中，不要认为翦伯赞写的书或别的什么人写的书就能穷尽清朝的历史，总是还有再研究的价值。进一步的讨论见本书 6.4 节。

以上讨论算是与孙正聿[6]的理解的一种交流。与俞吾金[5]的交流仍在于空集中，无化着的与人无关的大自然作为存在着的无，作为前面三个要素(有)的自否定因素[22]已经被放在空集中。历史唯物主义同时也就是辩证唯物主义，想把辩证唯物主义扔掉是扔不掉的，刚刚从前门将与人无关的自然赶出去，马上与人无关的自然又从后门钻了进来。我理解，自然除了可以按文献[16]解释为人的自然化过程和自然的人化过程的对立统一外，其实更到位的说法是人化自然与自然化人的辩证统一。人化自然不用解释，自然化人是我提出的新词语，需要解释一下[16]。思路与文献[16]接近但更为直白一些。自然怎么化人呢，因为劳动创造了人本身，就是说的自然化人，人原来是动物世界的动物之一。正是在人化自然的同一过程中自然化了人，按文献[16]称为人的自然化，显得文质彬彬一点，但意思没有说透。自然化人可以多加一个字，自然变化了人，自然改变了人。哲学概念化一点，在生产劳动和社会实践中，在人改变了世界的同时世界也改变了人。因而存在着人化自然和自然化人的一体两面过程。照样不否认还有没被人化的自然，只要时间取为时段，比如，一天，这个存在着的无总是无化着的，今天的无并不等于明天的无，也不等于昨天的无，所以丢掉这个无，整个哲学体系就会不完备，无是一存在，不存在现身着存在本身，不存在不存在着。

对照俞吾金在文献[5]中的全面生产理论，实际上是从马克思的文本中举出典型的四种生产，所以以四种生产来说的全面生产立即受到挑战，四种不够全面，八种更全面，这多是表面的挑战，其实四种生产比如本节的四个元素代表的四种生产就是完备的。斯宾诺莎说，一个实体有无限多个属性，任何哲学体系都不可能穷尽现实生活的无限丰富性。这种无限丰富就在空集里隐藏着。

稍加修改，俞吾金的四种生产与我的四种生产是可以兼容的，只要把人的生产和社会关系的生产放入本书的第二个元素，就能实现兼容。因为本书认为只有现实化了的关系才是关系，人是肩负着关系的人，人是在关系中的人，所以人的生产可以比较广大一点，那么就是物质生产、精神生产。人的生产和社会化历史性的场的生产、空集中的关系也是有意义的，但有待具体的人、事去充实。场生成能指的结构(包括关系)。只有这样历史唯物主义才能自己给自己奠基，辩证唯物主义与历史唯物主义才能合一，至于叫什么已不再重

要,本书称之为社会唯物主义。更完整的讨论见本书 6.4 节。

再来看一下孙承叔的五种生产理论,只要把人与自然关系的生产放入空集就可以了。同样人的生产与关系的生产并入人的生产,照样是物质生产、精神生产、人的生产和社会化历史性的场的生产。如果有兴趣,读者可以阅读后文。哲学并不神秘,哲学的本性是无定论(无固定的结论也无固定的形式),只有宗教才有定论。具体问题具体分析是马克思主义活的灵魂,毛泽东倡导实事求是,邓小平在实事求是之前又加了一切从实际出发。说明哲学能说明一些事,但不可能说明所有的事。真正遇到事情还得具体问题具体分析,但哲学家提供了多种思考方法,免得人们费劲去想,这也是有少许参考价值的。

孙承叔谦虚一些,没有说全面生产,因为他在另一本书中提出四种生产理论,在文献[29]中又提到五种生产理论,肯定不好用全面的字眼,万一哪天又要用六种生产来说事。作者声称本书哲学是完备的,这只是数学意义上说的,实际上自然在人化,人也在自然化,就是过去的事,谁也不可能真正说得全面,基本上说全了,也就算可以了。本书的学说只是形式上的完备,有不完备的自否定元素含在其中,其实也不完备。完备只在某种意义上完备,在任何意义上都完备是不可能的。俞吾金在马克思哲学的意义上肯定是全面的,但也只能在这种意义上理解全面两个字。现实的每个人具有无限丰富性,哲学是苍白的,只能表征[27]现实,具有有限的表征能力。孙承叔提出第五种生产,天人关系的生产,很有现实针对性,加上是好的。尽管马克思只说了四种生产,并不是马克思没说的事大家就不能说。现在环境污染,人正在被自然所化,自然化人,空气、水等哪一样不在化人?现在城里人吃的蔬菜,打了多少农药,是不是在化人?所以我是赞成孙承叔重提天人关系的。

毋庸讳言,本书第一版引入的社会化历史性的场的思想来源之一是海德格尔的本有之思[22,30]。

人的本有居有(海德格尔哲学的专业哲学术语)=人的现实性确定性生存和人的信息化不确定性生存[22];

同样物的本有居有可以写成[22,31]:

物的本有居有=物的现实性确定性生存和物的信息化不确定性生存[22];

地=物的现实性确定性存在=客观实在;

天=物的信息化不确定性存在=客观不实在;

人=人的现实性确定性生存=现实的每个人=解释着的每个人;

神=人的信息化不确定性生存=有待现实化的每个人=存在中的每个人=理解着的每个人。

所以海德格尔的所谓天地人神四方游戏其实还是一种形而上学[30],只不过是一种时域的我——它和我们的显隐运作。然后再将不同时的我它与我们不同时强制同时而得到的一个体系。这一点在本书后文还要详细论述。

所谓信息化,必有一个时间区间(时段),时间区间的长度为零是谈不上到时的。到时总要等一会儿,这样等了一会儿的结果才与前提发生得了关联。如果将不同时强制同时,前提与结果并存,个人和人类社会的两次不同时的感应和响应同时存在,就成了哲学体系中的社会化历史性的场,是数学化的、能指性的地址,可以存放各种“数据”。海德格尔因为坚持在《存在与时间》中的万物一体的“世界观”,而不是本书采用的“人类社会”人类观,通过人类社会的每个人、所有人来直观世界,所以最后和柏格森一样走入神秘主义[9,10]。

本书因为对问题作了简化，基本上是当下人类可理解可思想的哲学体系，有形而上的特色，有神秘主义的合理元素，但还不是神秘主义。也就是本书第一版总结的，在可知与不可知的意义上，在康德与黑格尔之间打了一个活结。康德在《纯粹理性批判》中先承认物自体（物体自身，自在之物）是完全不可知的，也就是说是神秘的。后来在《实践理性批判》中又有所松动，把在自然形而上学中抛弃了的物自体又请回来，通过自由完成康德哲学体系。相反黑格尔哲学通过引入绝对精神，不仅人作为主观精神是可知的，作为人类社会的客观精神就更可知了，而绝对精神就是全知全能的神了，连自然也只不过是绝对精神的外化。数学化的社会化历史性的场到底是可知还是不可知呢？两可，具体问题具体分析。视讨论的问题而论，采用中国的中庸之道。有的事是完全神秘的，有的事是可以有点眉目的，是可以有一知半解的，有的事则是很清楚的，完全具有人类自明性。有的事甚至是一个人自己就基本能知的，比如我正在写字这一点有什么不可知的呢？因为我已在一个字一个字地写，一行一行地写，一页一页地写。但别人对这件事知的程度就有差异了。看见我在写字的人知的程度比没看见的人就高一些，认识我的人知的程度就比不认识的人高些。

参考文献

[1] 王峰明. 历史唯物主义一种微观透视. 北京：社会科学文献出版社，2014.

[2] 牛变秀，王峰明. 价值存在和运动的辩证法：马克思《资本论》及其手稿的核心命题研究. 北京：社会科学文献出版社，2011.

[3] 鲁品越. 走向深层的思想：从生存论哲学到资本逻辑与精神现象. 北京：人民出版社，2014.

[4] 鲁品越. 深层生成论：自然科学的新哲学境界. 北京：人民出版社，2011.

[5] 俞吾金. 被遮蔽的马克思. 北京：人民出版社，2012.

[6] 孙正聿，等. 马克思主义基础理论研究. 北京：北京师范大学出版社，2011.

[7] 马克思. 资本论（第一卷）. 北京：人民出版社，2004.

[8] 洪汉鼎. 斯宾诺莎哲学研究. 北京：人民出版社，1993.

[9] 柏格森. 材料与记忆. 肖聿译. 南京：译林出版社，2011.

[10] 王理平. 差异与绵延：柏格森哲学及其当代命运. 北京：人民出版社，2007.

[11] 尤承业. 基础拓扑学讲义. 北京：北京大学出版社，1997.

[12] 黄枬森. 马克思主义哲学体系的当代重建. 北京：人民出版社，2011.

[13] 邓晓芒. 实践唯物论新解：开出现象学之维. 武汉：武汉大学出版社，2007.

[14] 孙周兴. 语言存在论：海德格尔后期思想研究. 北京：商务印书馆，2011.

[15] 俞吾金. 实践与自由. 武汉：武汉大学出版社，2010.

[16] 栾玉广. 自然辩证法原理. 合肥：中国科学技术大学出版社，2007.

[17] 孔丘. 论语·大学·中庸. 陈晓芬，徐儒宇译注. 北京：中华书局，2011.

[18] 曾仕强，曾仕良. 大学之道. 西安：陕西师范大学出版社，2012.

[19] 南怀瑾. 原本大学微言. 北京：东方出版社，2014.

[20] 傅佩荣. 朱熹错了. 北京：东方出版社，2013.

[21] 孔丘. 论语·中庸·大学. 思履，文若愚编. 北京：中国华侨出版社，2013.

[22] 任伟. 数学化的场论：球面世界的哲学. 北京：科学出版社，2013.

[23] 张立文. 中国哲学思潮发展史（上下册）. 北京：人民出版社，2014.

[24] 王俊尤.周易经传数理研究.北京:人民出版社,2015.
[25] 陈立夫.四书道贯:陈立夫解读《大学》《中庸》《论语》《孟子》.北京:中国友谊出版公司,2015.
[26] 姜井水.社会系统论.上海:学林出版社,2004.
[27] 萧前,李秀林,汪永祥.历史唯物主义原理.3版.北京:北京师范大学出版社,2012.
[28] 王伟光.利益论.北京:中国社会科学出版社,2010.
[29] 孙承叔.资本与历史唯物主义:《资本论》及其手稿当代解读.上海:复旦大学出版社,2013.
[30] 海德格尔.哲学论稿:从本有而来.孙周兴,王庆节编.北京:商务图书馆,2012.
[31] 邬焜.信息哲学:理论、体系方法.北京:商务印书馆,2005.

第三章　社会唯物主义完备二元论:本体论与认识论的统一

本章集中介绍一些基本概念,使得本章的自足性好于其他各章。这样做是由于本章在前三卷中是极其重要的,也是由于这些基本概念在后续章节将会被反复应用。比如,不理解本章的法哲学,就很难理解第五章的道德哲学,特别是第五章所引用的王海明关于国家治理的二十二条道德原则。同样,不理解利益相关的基础知识,也就很难理解主体间性问题和本书的利益场理论、空集理论、美学问题、宗教问题。本章由于大量引用原文而篇幅相对于其他各章显得长一些,但是相对于所论述的问题的大量信息而言,写得还是很简洁的。因此,采用引用原文而不是转述是非常必要的。也曾考虑将有关背景知识分散在其他各章,权衡再三还是觉得集中放在本章好些。因为马克思哲学的核心是经济哲学、法哲学,所以在此章集中讨论这些问题有益于加深对马克思哲学的理解。而利益论则有助于理解经济哲学的游戏规则,并且高于西方的经济哲学对市场经济行为的把握。整个讨论强烈地依赖于马克思生产关系学说下的主体间性目光,很有本书的哲学特色。

本章紧接 2.8 节的讨论,完成时域辩证法的构建,主要参考文献为[1]和[2]。王金林在文献[1]中对海德格尔的哲学作了解读,按我的理解就是人类社会中的共同此在[2],同时存在的此在,也就是对共同并同时存在的每个人的生存方式做了解读。突出了在用物中和在物的有用性上,看出人生在世的意义关联整体。毫无疑问,海德格尔是在万物一体的意义上做出上述独到见解的。在社会唯物主义的意义上,从物的有用性和用物中,本书更进一步看出人类社会中每个人、家庭、集体、集团、国家、全人类,为了物质利益所进行的争夺和分配,以及争夺后的消费活动。也就是说,人的用物并不是为用物而用物[3],而根本的落脚点还在改善人的生存环境和每一天的现实生活。劳动不是目的,在相当长的时间内还只是谋生的手段。改善生活、缩短劳动时间并争取更多自由时间才是人劳动的目的[3]。这样马克思哲学与海德格尔哲学才能贯通。马克思对人类社会的“看”,主要从生产劳动的角度来看,从生产劳动耗费劳动者的生命和时间的角度来看,从历史性的角度来看。本书认为时间性与历史性是有区别的,历史性必须具有人类历史学意义上的目光,纯粹时间性还不是历史唯物主义。比如一碗饭,是有用的,可以通过吃饭来看出吃饭的意义,是为了满足人的生存需要(食欲)。但马克思要求看出这一碗饭是劳动人民的血汗的凝结,是粒粒皆辛苦的。更要看出原始先民怎样得到一碗饭,奴隶社会中奴隶怎样吃一碗饭,奴隶主又怎样吃一碗饭,封建社会一碗饭对地主和对农民的意义的不同。然后谈到资本主义社会农业的机械化生产,产生这一碗饭的大米是机器与土地一起结合起来,由掌握了现代科技的农场主和农业工人生产出来,由现代化的物流系统流通到超市里的。最后到了共产主义社会,一碗饭的意义又会发生怎样的改变。总之马克思主要从社会化的实践(以生产劳动为主要形式,以生产有用的产品和实现价值的增值为目的)从我它的角度,以人的对象性活动来理解社会历史的本质意义。而海德格尔哲学则以我们的方式,尤其突出了每个人的精神生活的存在方式。然而,将我它与我们在时间域内贯通是哲学史上的难题,这是本书对时域辩证法的主要贡献,将不同时的我它与我们强制同时,这样本体

论与认识论相统一的完备二元论就共含八个元素,与中国传统哲学的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下相对应,实现中西方哲学的“会”通。

3.1　人与事的完备二元论:我它

本节将以实践的观点、以生产劳动的观点来检查人与事的完备二元论,重点说明人在其中的自然是如何从哲学体系中涌现出来的。按照语言学转向后的哲学,人与事的完备二元论是以句子为单位的一种哲学目光,与以单词为单位的哲学体系是不一样的。也可以认为是事的世界观座架的哲学体系[4,5]。维特更斯坦在《逻辑哲学论》中首先明确地表明世界是由事件组成的。马克思的哲学革命也有以事为中心的意味,马克思的“事”主要是生产劳动和社会实践,是一种对象性活动,是人的本质力量的对象化,是人有目的、有意识、有意志地改变世界和认识世界的活动,是人与自然界在人类社会中的具体的历史的统一。

根据第二章阐述的社会唯物主义完备二元论,将讨论的事情定义如下:

人=人类社会在特定时段的每一个人;

事=在特定时段,人类社会所参与,所见证的每一件事;

人和事=在特定时段,每一个人的对人处事,每个家庭、每个集体、每个集团、每个国家、全人类在特定时段的对人处事;

自然=神=天=本时段存在的(自然)包括已过去和将来的人、事、人和事,包括信息、意志等不显在的存在,也包括每件事的时间上同时,空间上不在同一个地方的自然背景、社会背景和个人人生背景、家庭背景等;

自然=神=胡塞尔和海德格尔的每个人的周围世界混合在一起而形成意义显示的境域=本书的自然化人、人化自然、自然化人与人化自然此在、事与人和事中的统一,以及与人无关的无化着的自在自然。

这里的天=神=自然是至大无外的,包罗万象的,以隐的方式显现着世界上的一切人、一切事、一切人和事,以及没有显现的一切过去,已显现的一切和将来要显现的一切。采用了斯宾诺莎的神=自然=主体=实体的概念,与中国哲学中天外无天的天很一致。这是万物一体的宇宙观。这里面有已知的,有未知的,有可知的,也有不可知的,具体问题有待具体分析。

在人的目光下,自然中的每个人相当于坐标卡中的一个坐标系,所有人组成的坐标卡组成一个数学上的流形。在全球化的今天,这已是一个可以理解的描述。每个人对事情的知,既有普遍性,又有特殊性,更有不可通约性。别人对自己的知总是不全面的,自己对别人的知也是很不全面的,有很多的不知、不可知、没必要知和不能知、不许可知的东西。

不完全准确地说,本节标题中的“我它”的它就是自然=神=天。我其实是在它之中的,相当于海德格尔的在世界之中。存在的前提下,人为强制地超越到世界之外,以突出主客二分的主体(人)、客体(事)、主客的结合人与事。换个说法,事总包括人和物,纯粹的人或纯粹的物都不能成为事,物与语词(词语)相对应。海德格尔说,语词破碎处,无物存在。也可以理解为人,物与人的和合(事物与人的矛盾)。人和事或者说人和物总存在斗争性的一面(不满足人的需求),以及被人的劳动或生产劳动或实践所淡化的整个自然界,

自然界只作为背景若隐若现。所以本书第一版强调：劳动、生产劳动、实践都是形而上学的抽象。原因有二：一是实践主体、实践客体、主体与客体相结合，本来是在世界之中的，但在研究实践的时候，是把这些东西放到了世界之外来重新考察的，也就是海德格尔说的西方形而上学对存在的遗忘。就算今天把事情的背景添上去，也主要是把与这件事紧密相关的背景添加上去，做科学研究就是这样的。比如一个老师讲课，他不大可能同时考虑在工厂干活的工人、在农村种地的农民、在边防上站岗的士兵。讲课的背景顶多是这是一门什么课，讲到哪里了，学生是什么样的学生，教室是什么样的教室（是电化教室还是黑板教室），学校是什么样的学校，学校对这门课有什么规定，教师本人有什么教学经验和知识背景，等等。比如今天该讲勾股定理，就只能聚焦于勾股定理，扯远了是不能在规定时间讲完规定内容的。这就是形而上学，将事情越分越细。以前只有一门哲学，包括所有科学。现在各大学不知开了多少门课程。二是就算扯出整个存在，又有什么用呢？很多东西是不知道的、不可知的、不必要知的、不许可知的。所以实践论单独是不能成事的，必然要借助于形而上学，才能讨论形而上学。这里有被称为哲学的丑闻的两个问题：一是主体的超越性问题，二是外部世界的实在性问题[1]。这两个问题都是既可以从认识论上解决，又可从本体论上解决的。从认识论出发，在劳动中亲证了世界的实在性、世界的感性、感性的世界、物质的世界。从本体论上来说，世界就是由事件组成，事件总是在世界中的事件。事件中有人也有物，因而人也总是世界中的人。物也总是世界中的，人与物的合作成为事。人与物的不一致，物不满足人的需要要求，进一步在实践中解决这种斗争性。人与物配合好后就开始生产了，如果人与物还没有配合得十分好，就要不断地在实践中改善人与物的关系，让物按人的目的不断地改变其形式。这样的理解才便于解释微观上的生产劳动（人与自然的关系意义上），也便于社会意义上人与人的关系的实践。思想上层建筑（意识形态）主要促使同一性的达成，淡化分歧，淡化斗争，淡化差异。政治上层建筑、经济基础则要求相对的稳定性，主要是对斗争性的强制消解。以同一性为主，以改良为主。物质基础则只有靠大家创造才行，不是说天上不会掉馅饼吗？一切价值都是劳动者创造的，不劳动就没有价值。使用价值才与自然、社会化的科技和劳动者有关，价值仅与劳动者的劳动有关。

世界为什么可以由事来组成，每个人只要回忆一下每天的生活就行了。比如今天早晨7点起床看书，到8点半吃早饭，吃完早饭散步，散步回来继续看书，……所以这个问题是可以由生活世界来亲证的问题，并不是另一个哲学丑闻。既然历史唯物主义研究每一个人的生活，那每一个人的生活又都可以由事件组成，故人类世界是由事件组成的。

有人进一步争辩说，世界是物质的，确实有些物不能并入事情之中，这是个不错的问题。对事的世界观的肯定理解的同时应包括否定的理解，也就是不是事，没有意义，没有目的的理解。这在对自然＝神＝天的定义中已包括了与人无关的物，当然也就不成为事了。另一方面，物（包括事）的意义都是需要有人才能敞开和照亮其意义的。前文举的一碗饭的例子有点俗气，今天举两个海德格尔举过的例子，说明现代人的生活被物化，被各种劳苦愁烦所累，不能诗性地栖居在大地上。很多时候很有意思的事，也仅仅被当成物，没有多大意思的物。物在事中是需要人的诗性（灵性）才能照亮的。物作为事的背景有时是相当重要的。在文献[6]中有对特拉克尔的诗《冬夜》的详解。

冬夜

雪花在窗外轻轻拂扬,
晚祷的钟声悠悠鸣响,
屋子已准备完好,
餐桌上为众人摆下了盛筵。
只有少量漫游者,
从幽暗路径走向大门。
金光闪烁的恩惠之树,
吮吸着大地中的寒露。
漫游者静静地跨进,
痛苦已把门槛化成石头。
在清澄光华的照映中,
是桌上的面包和美酒。

这里还是通过漫游者带出一些物,物在事中。下面这个例子是从纯粹的物中看出事来。农妇的鞋在"常人"看来完全是一寻常的物,甚至根本都不想多看一眼,更不知什么事会与之发生关联。但在哲学家海德格尔的眼里,凡·高的一幅油画,却让人们体验到一双农鞋的器具存在,昭示了这个器具存在的意义[7]:

"从鞋具磨损的内部那黑洞洞的敞口中,凝聚着劳动步履的艰辛。这硬邦邦,沉甸甸的破旧农鞋里,聚集着那寒风陡峭中迈动在一望无际的永远单调的田垄上的步履的坚韧和滞缓。鞋皮上粘着湿润而肥沃的泥土。暮色降临,这双鞋底在田野小径上踽踽而行。在这鞋具里,回响着大地无声的召唤,显示着大地对成熟谷物的宁静馈赠,表征着大地在冬闲的荒芜田野里朦胧的冬冥。这器具渗透着对面包的稳靠性无怨无艾的焦虑,以及那战胜了贫困的无言喜悦,隐含着分娩阵痛时的哆嗦,死亡逼近时的战栗。这器具属于大地,它在农妇的世界里得到保存,正是这种保存的归属关系,器具本身才得以出现而得以自持。"

3.2 人与物的完备二元论:我们

前文特别呈现出海德格尔对事中之物与纯粹之物引出一个世界(事件)的特别描写。在进入枯燥的人与物的完备二元论之前,请再次欣赏海德格尔由人和物组成的事情[7]。

谢恩

森林伸展
溪流欢腾
岩石持存
雾霭弥漫

草地期候
泉水涌流

山风盘桓
祝祷冥思

前面已经讲过，在关系中本来有每个人与人类社会整体的互动的这一个过程。多数时候将其凝固（将本来不同时的过程强制同时），偶尔才将其展开为一个过程，也就是说人类社会被下列四个元素定义：

元素 1＝社会中的物，作为具体的是有使用价值的物，承载着人与人之间的利益关系，也在自然界的物体系中有对人有用而承载着物的意义，开启了一个属人世界的意义。同时社会中的物作为价值载体，承载着人与人之间的权力关系、生产关系、社会关系的物质部分。

元素 1＝物＝特定时段中的物。

元素 2＝人＝家庭中的人＝每个家庭中的人＝所有家庭中的人＝特定时段活着的人＝权力与权利高度和合的一种人的存在形式＝集体中的人＝集团中的人＝国家中的人＝全人类的人＝人的生产意义上的人＝人口在家庭中生产意义上的人＝非社会（自然界）中的个人作为社会中的人的辩证理解，尽管严格意义上社会之外的人并不存在，有时可这样说简单些，至少在有些时段可以说人在社会之外。

元素 3＝物和人＝事＝社会的上层建筑＝政治上层建筑与思想上层建筑＝特定时段的事。

元素 4＝社会化历史性的场，这是一个必须由人才能照亮的世界，具有人类社会的类特征。存在于特定时段之中，包括过去和未来的非当下的当下化，信息世界、意志世界、历史学世界、未来世界、审美世界、宗教世界等超越性世界。包括客观不实在的信息世界和主观实在的存在（信息化生存）。理想世界、虚拟世界和一切不能被本哲学体系穷尽的事物＝在一定时段的空集。

这里与前面一致，将关系视为关系实在放在元素 1、元素 2、元素 3 中，而将关系视为关系不实在放在一定时段的空集中，关系作为一种有意义的存在，尽管其意义尚未得到充实。人作为各种关系和联系的载体实体化，将人理解为肩负或承载着各类社会关联的载体而持有了一个时段（死人和尚未出生的人不算，要算只能放在空集中作为活着的人的背景而存在）。这是与海德格尔关于此在的根本区分。海德格尔哲学历来将此在（每个人）看成终有一死者，但他的哲学体系中有人类此在，包括死去的人，使问题太复杂。我们限于（比方说）今天活着的人只有有限个，理论上可数，是量子化的、一个一个的，比较简单。元素 4 也就是空集或者说社会化历史性的场只对活着人发出全身心的微笑。而一切死去的人、尚未出生的人、世界上除了活着的人以外的一切万事万物都要靠在这一段活着的人来照亮其意义。也就是以前说的让石头说话得靠现在活着的所有人，不仅让石头说话，还要让石头听话。这一切都得靠现在活着的所有人之间和身心中都存在的社会化历史性的场才能穿透世界万事万物。物某种意义上并不存在，物是人的无机和有机的身体，也就是中国古典哲学的心外无物，但需补充说心外无物的同时心外有社会化历史性的场，身心内也有。

从每个人的角度，物要理解为对你有什么用，你有没有使用权，是单独的使用权还是与别人共享的使用权。你对这个物有没有所有权，你这个所有权与别人比较算多、算少还是比上不足比下有余。个人作为家庭的原子而存在。在物以类聚、人以群分的社会中形

成若干的事。从社会角度是怎样待人接物的,这个事要不要做,要什么人做,给多少钱,给多少物(福利待遇)。个人而言,就是要与人和物打交道,要在物的分配中选择自己喜欢的物,做自己喜欢的事,做自己喜欢做的人,按自己的兴趣爱好消费物,在工作和学习中使用物(作为工具)。身外之物当然还有社会形成的关系和联系,要人们来承载,有强制性的政治上层建筑和教化性的思想上层建筑限制着人们的行为并引导着思想。正如卢梭所说,人生而自由,但却无往不在枷锁中。当然作为一个家庭中的人,还要注意把自己的身心都建设得很健康快乐,少给家人添麻烦。在家里多做家务事,多尽义务,工作上把自己分内的事做好,为家人和家族争光等。从形式上看,关于人和物的完备二元论有三个元素是关于人的,有一个是关于物的(非人的,尽管是属人的),构成了对人的辩证理解。从内容上看,也可以将元素 1、元素 2、元素 3 看成显的,将元素 4 看成隐的,世界的隐显运作要求包括这个空集。这是由于将个人与社会的不同时显隐运作强制同时的缘故。如果将其展开还是合理的。

本节的重点,要费较多篇幅详细地叙述一下社会化的物这一熟知而非真知的概念,首先采用历史唯物主义的观点,追溯物的远古形式、当前形式和将来形式。重点剖析在资本主义社会,特别是当今金融资本主义社会下物的社会化形态。主要参考文献是俞吾金[8]和鲁品越[9]的著作。

按照海德格尔哲学的叙事方式先谈将来,后谈过去(曾在),最后谈当前。历史唯物主义的将来是共产主义社会。在共产主义社会,人是财富的真正的主人,而生产使用价值而不是价值,直接成为共产主义社会生产的目的。财富主要由三个要素组成:一是劳动者的劳动;二是社会化的科学技术、管理方式;三是自然资源。也就是说共产主义社会是生产高度发展的社会,劳动者之间的关系是自由人的联合体。这些自由人是社会化的人,联合起来的生产者,这些联合起来的生产者将合理地调节他们与自然界的物质交换过程,共同控制这一过程,以最有利于人的自由和全面发展的方式来安排生产。对劳动者而言,劳动也不仅仅是谋生手段,而是生活的第一需要。在集体财富的三大源泉都充分涌流之后,超越了资产阶级法权,而实行各尽所能,按需分配的政策。当然共产主义应理解为共产主义运动,而不是一天就能建成的。到底共产主义的最终形式如何,还有待人类社会实践的检验。

俞吾金认为:"事实上,马克思哲学作为实践唯物主义,根本不可能把传统哲学的基本问题——思维与存在的关系,视为自己的基本问题,而是把'人与物的关系/人与人的关系'视为自己的基本问题。因为这一双重关系正好统一在人的生存实践活动中,而从经济哲学的视角看,人的生存实践就是生产劳动。"我基本上同意这样一种观点,只是在解释上更接近于中国传统哲学。无论从个人层面还是社会层面,都是恰如其分地处理待人接物与对人处事的关系。将待人接物按物以类聚、人以群分的方式划归到社会实践领域,而将对人处事划归到生产劳动领域,多少采取了文献[10]将生产力与生产关系稍加区分的办法。当然区分只是为了研究方便,根本上是区分不了的,是耦合在一起的。没有离开我它的我们,也没有离开我们的我它。这样俞吾金讨论的人与物的关系和人与人的关系,大致就是本节重点讨论的物。社会化的物既是人与人之间利益关系的代表,又是人与人之间权利关系的代表。换句话说,社会化的物承载着整个社会的物质基础与经济基础。物质基础由物质利益承载,在工人阶级方面,体现为一种绝对贫困。经济基础最终也要以物质

利益承载，但在工人阶级方面体现为一种相对贫困。在资本家方面，也要由现实的产品来负载绝对剩余价值，这在资本主义早期比较明显，但现代资本主义主要靠相对剩余价值来剥夺工人阶级的权利。大致将剩余价值的生产限制在生产和流通领域。交换、分配作为社会学意义上的事来看待。生产领域的事与社会领域的事还是有些区别的，俞吾金还特别加了一个注释[8]302："现在时尚的提法是'以人为本'，于是，人们突然觉得自己变得高贵起来，似乎摆脱了低贱的物。其实他们搞错了，只有实际上仍然是'以物为本'的地方才需要'以人为本'的口号。当人们见到非洲的饥民而脱口说出'民以食为天'的箴言时，他们才不自觉地意识到'物'(这里表现为'食品')的重要性。物的重要性从来就不应受到忽视。真理既不在单纯的'物'那里，也不在单纯的'人'那里，真理在对'人与物关系/人与人关系'的综合把握中，这正是马克思哲学高于存在主义哲学的地方。"简单地说，就是掌握好待人接物与对人处事的动态平衡。这完全是一种实践智慧，要押上身家性命去实践，才能体会出俞吾金这个注的深意。这也就是中国哲学高于西方哲学的地方。孔子的《论语》就不是僵化的，不同的学生去问他什么是仁，他的回答各不相同。因为每个人就各不相同，对于每个人而言，"仁"的意义当然就不应该相同。比如每个人出生的家庭就不一样，对"仁"的理解当然就不一样。西方哲学的宏大叙事，如康德的三大批判，固然很严谨，但一到实际性面前，又退回到对规则的灵活运用而没有规则的说法上去，与孔子其实区别不大。因为事情本身就是千变万化的，怎么可能用几句话就说得透彻呢？人是目的，以人为本固然是不错的，但如果没有物，没有获得物的手段，人也活不了，这是绝对贫困。就算活得了，那还有相对贫困的问题。邓小平讲的做事情的标准是看人民拥护不拥护，人民赞成不赞成，人民高兴不高兴，人民答应不答应。该标准确实是较全面地反映了事情的复杂性，为什么在拥护不拥护之后还要加上答应不答应，值得大家深思。就是共产主义社会也不能没有一切财富源泉的充分涌流。所以本节的物很有必要展开成为一个过程，也就是说展开为人与物的生产劳动过程和流通过程、人与人的交换和分配过程，这两个过程在人类社会中的统一，以及大家不能忘记的与人无关的无化着一切的大自然。正如俞吾金写道的[8]304："人类始终怀着感恩的思想，把自然界或大地理解为财富的源泉之一。事实上，没有自然界这个取之不尽、用之不竭的源泉，不但劳动失去了对象，人类自身也无法生存下去。"所以，在本书前面部分，批判历史唯物主义不能丢掉辩证唯物主义的主要论点，是俞吾金自己也承认的。这也是本节开头引用海德格尔的《谢恩》这首诗的原因，至少到2016年为止，人类还没有在其他星球上发现与人类相似的生物。换句话说，人类应该感谢大地母亲的哺育。劳动虽然不是一切财富的源泉，到目前为止，可以说财富主要是通过劳动创造出来的，财富就是使用价值。

"在马克思看来，劳动不仅是财富的主要来源，而且也是人类生存的基础。在批评费尔巴哈的肤浅的唯物主义学说时，马克思指出：这种活动，这种连续不断的感性劳动和创造，这种生产，是整个现存感性世界的非常深刻的基础，只要它哪怕只停顿一年，费尔巴哈就会看到，不仅自然界将发生巨大的变化，而且整个人类世界以及他(费尔巴哈)的直观能力，甚至他本身的存在也就没有了。"[8]305

古代的人一无所有，除了劳动工具以外，吃了上顿没下顿。当代有个印第安部落的人，发现我们每顿都有饭吃，觉得真好，他们有可能几天吃不上一顿饭。因为自然再好，风景再美，不一定在你肚子饿了的时候就有食物放在那里，等你去拿。所以古代的人把自己

在劳动中常用的工具理解为自己的财产。古代的战争很多时候也是为了财产,或者是保护自己的财产,或者是掠夺别人的财产。所谓战国无义战,也就是说中国战国时代的战争没有正义可言,很多时候是为了不义之财。战争产生了俘虏,在西方,随着生产工具的发展,当俘虏通过自己的劳动而能带来剩余价值的时候,俘虏就没有必要被杀害了,人与人之间就产生了主奴关系,加上一些其他条件下产生的主奴关系,就形成了奴隶社会[3,8]。而中国社会的情况有所不同,由于长江、黄河、淮河的水灾,中国的土地从来没有真正私有化过。战争中取胜的一方,最好的统治方式还是维持原有的氏族、家庭不变,形成以家庭为生产单位的超稳定结构,这样做的根本目的,也是方便统治阶级掠夺农民的剩余价值。如果再往前追踪,家庭的现在形式也与财富的归属有很大关系。财富的现代定义是:财产就是可以从所有制上确定归属的财富(使用价值)[8],而财产关系只是生产关系的法律用语[8]。仅就人的自然生产而论,母系氏族社会更为合理,因为明显女性对生儿育女起着更重要的作用。但由于男性在体力上的优势,在战争中有优势,容易获得更多的财富。为了将所获的财富遗传给男性自己的子女,才产生了男性权力为中心,具有固定性关系的专偶家庭。这样使死的物(财产)在家庭的时代生成的历史经验中活起来了,有了生命。本来是人与物的关系的利益关系,通过人与人关系而呈现出人与人之间的权力关系。通过婚姻关系的确定和"法律化",权力关系与权利关系完成了统一。所以社会的第一个细胞就由人与物的关系和人与人的关系的矛盾运动,在家庭中完成了统一。我认为是资本主义社会的个人主义造成了家庭成员之间关系的疏离,而等到物质财富的各种源泉都充分涌流之后,家庭关系要重返以人本身生产更加有利的、以血缘亲情为纽带的、更高水平上的统一上去。这也是作者在马克思三大社会形态理论基础上提出四大社会形态的原因,从正反合分的辩证法上来理解[2],人与物的双重独立性是分,而不是家庭关系的正反合中的合。最初的家庭关系是在物的依赖基础上的人的依赖性,由于资本主义见物不见人,形成了物的依赖基础上的人的独立性。在资本主义社会,人首先是个人,然后才是家庭成员。未来社会的一个数学上的可能形态,自然是在物的独立基础上的人的依赖性。因为人要有家的依赖性,只是资本主义社会使得人无家可归,有家不能归(还要加班挣钱)。人第一看重的是有家庭的人,第二才是自然界的人、独立的人,由物的依赖性重返情感依赖性。从母系氏族社会的情感依赖,到阶级社会的以物的依赖为主、情感依赖为辅,扬弃到无阶级社会没有物的依赖而重返家庭成员的情感依赖关系。可能西方民族更看重个人自由,而东方民族更看重人与人之间良好的关系。也许两种社会形态并存也是有可能的。以上思考受到台湾大学历史系教授吴展良的启发。他在网上讲课时,每每从历史学的目光,强调西方社会从古希腊的个人主义开局,而东方社会从中国式家庭开局。我想也不一定非要东方战胜西方,或者西方战胜东方,两种社会形态并存更符合完备二元论的思想,一种社会形态有点过于单调。中国社会主义国家没有被和平演变,原因虽然很多,作为社会细胞的家庭相对稳固,无疑是一个重要原因。

从物的将来谈到过去,又从过去谈到将来,利益关系与权利关系怎样在家庭基础上统一。现在不得不谈论物的当前状态,也就是物的资本主义生产方式。概略地说,就是从商品到货币,货币到资本,资本到虚拟资本,虚拟资本到金融资本。从现象层面看,当代社会是金融资本与实体资本的矛盾。详细讨论是下一节的内容。

3.3 资本主义社会的物

根据恩格斯在马克思墓前的讲话，马克思一辈子有两大发现，一是唯物史观，二是剩余价值学说。特别是剩余价值学说的建立，是通过解剖资本主义这一“人体”，更好地理解以前的原始社会、奴隶社会、封建社会和未来的共产主义社会这些“猴体”。在马克思已经透彻阐释了剩余价值学说之后，我们才恍然大悟，其实从家庭的演变，特别是男性权力主导的专偶制家庭的产生，无不是由于生产力的发展，从而产生了剩余价值。对剩余价值的占有和分割产生了生产关系[9]、阶级、国家，等。也就是说剩余价值不只是资本主义生产方式的产物，剩余价值产生于一切阶级社会之中。统治阶级依靠其强大的经济、政治、军事、伦理、文化、宗教等力量总是参与着社会生产关系的构建，社会生产力的掌控，特别是社会核心资源的掌握。比如历代中国封建社会的皇帝就掌握了全国土地的所有权，掌握了军队，这些东西的存在都是靠劳动人民的剩余价值[9]来供养的。由于历代封建社会的统治阶级主要还停留在占有欲，而没有致富欲，所以历朝历代都是一个简单再生产，有点类似于资本主义社会的经济危机的循环发生。所以在新中国成立前，物主要表现为象征等级制度的物[9]和自然经济下的物（如粮食），商品经济还很不发达。每一个劳动人民虽然也有致富的欲望，但不被社会所许可，主要是统治阶级不许可，因为不利于其统治。文献[9]与通常的理解不同，剩余价值虽然产生于物质生产领域，但一旦这块“蛋糕”做成以后，分“蛋糕”的人就多了，每个人分到的“蛋糕”大小是以使用价值来实现的，是以产品的实在形式来实现的，这种以实物兑现的分配，表面上是人以物的关系，但人与人之间相互有个比例关系（从数量上看）。物品也有好有坏（从质量上看），构成人与人之间的利益关系。而人类社会中的每个人由于分配问题牵扯到自身的利益，都要参与到生产关系的制定和生产关系的充实中来，影响现实形态的生产力和生产方式，包括生产关系，这就是人与人之间的权力关系。对这些权力关系的观念性认同和法律承认，构成人与人之间的权利关系，而利益关系、权力关系和权利关系都是由物负载的，物本身并没有赋予它自身这样的关系，甚至物本身连一个生产关系的原子也没有。但是人类社会的游戏规则赋予了物的映射性价值、“主体间性”价值，或媒介性价值[9]。主要原因是物本身是人的劳动产品，商品是用于交换的劳动产品。在商品中人化的正是人的本质力量和人的生命的感性显现、实践显现，是人用自己的生命换取生命的持存，所以人与人之间能够通过这一物化过程在生产劳动中建立起人与人之间的关系。在狄更斯的小说中专门讲了，不是钱，而是爱钱是一切罪恶的根源。钱本身是人类社会的一大发明，钱本身是一个不存在善恶的自在之物。但钱的资本主义运用就会产生很多罪恶，而钱的社会主义运用又能避免很多罪恶（因为社会主义以人为本，资本主义以物为本）。钱是人们熟知而非真知的概念，只有在运用中把握钱的意义。钱固然很重要，比如美国能用印钞机印美元，开“空头汇票”赚钱。这是与美国在国际上的政治霸权、经济霸权、军事霸权、文化霸权分不开的。脱离了政治和军事谈经济也是不行的。比如 20 世纪 90 年代初，美国与日本之间的经济大战，仅凭经济实力，日本不见得打不过美国。但政治上和军事上的力量悬殊，使得日元不得不升值，在美国本土的日本企业因为“欠税”不得不关闭或撤回日本。几个回合下来，日本就只有认输。再说 2008 年美国“经济危机”走入“经济泥潭”，也是因为美国毕竟还可以转嫁危

机[9]。转嫁并不是那么文质彬彬的。能讲理的时候,就讲一会道理,讲不过去,就强词夺理,强词夺理还不行就大打出手。中国式的历史论(鲁迅语)"成王败寇"也适用于国际间一些战争。美国打伊拉克理由是伊拉克有大规模杀伤性武器。但美国不是有更多的大规模杀伤性武器吗?全世界为什么不向美国开战而偏偏要打伊拉克?结果打完伊拉克以后并没有找到大规模杀伤性武器。也就是说这场战争的根据完全不能成立,那么美国是不是应该对伊拉克战争赔款呢?换一个国家也许会,美国当然不需要。孟子说,战国无义战,现代战争又有多少义战?第二次世界大战,还是因为钱引发的经济危机,再引发了转嫁经济危机的战争。2008年转嫁经济危机是由于国际上没有国家与美国抗衡,如果有可抗衡的国家,打不打仗也还说不清楚。再反思中国历史上一个又一个封建王朝,还不是打下江山来以后,凭借强大军事力量和政治力量,强行颁布一个生产关系,地主和农民各就各位执行而已,执行一段时间出了问题再由皇帝稍加调整。所有生产关系概念并不只是个经济学概念,带有很强的政治和军事色彩。通常说生产关系由生产力决定只是归根结底意义上的。前文讲了对角线占优原则。生产关系主要由生产关系决定。所以马克思的《资本论》的副标题是政治经济学批判,这是很得要领的。实际上,马克思作为法学博士,刚毕业不久就遇到一个立法问题。通俗一点,就是允不允许农民到资本家的林场捡柴的问题。资本家说不行,因为农民会盗窃。通过这件事马克思认识到是物质利益决定了法律的形式。要破解国家法律的秘密,必须深入到经济学领域。反之,经济学领域问题的解决(如资本家对农民的利益冲突)也常常表现为法律解决或战争解决。

3.3.1 三种经济学理论

马克思的政治经济学是认识经济学的本质规律,凯恩斯的货币经济学适合于国家宏观调控,而亚当·斯密开创的而在后来完善的自由主义经济学则适合于在现在政治制度下和现有资本主义经济体制下局部的游戏规则[9]。西方经济学不能揭示资本主义社会的社会存在,只是国家层面和资本家层面的游戏规则。存在着海德格尔所说的对存在的遗忘,沉迷于存在者(物),而对存在本身相当忽视。有点类似于量子学领域爱因斯坦与波尔的争论。爱因斯坦追求的是本质规律,波尔追求的是游戏规则。本质规律更重要,游戏规则也需要了解。

马克思的政治经济学,说通俗一点,就是要说清楚钱的本质和钱的力量从何而来,以及钱从量变到质变的规律。关键是要了解生产关系为什么是一种权力关系,这是马克思的独特视角和对政治经济学的最大贡献。采用述而不作的方式将文献[9]给出的马克思在《资本论》(人民出版社,2004年1月第2版,下同)第一卷到第三卷19处的论述一一陈列如下(需要透彻理解的读者当然需要花三个月时间认真读一读《资本论》,但当前方式不失为一种快捷的从中间开始的阅读方法)。

"自从有可能把商品当做交换价值来保持,或把交换价值当做商品来保持以来,求金欲就产生了。随着商品流通的扩展,货币——财富的随时可用的绝对的社会形式——的权力增大了。"(《资本论》第一卷第154页)

"正如商品的一切质的差别在货币上消灭了一样,货币作为激进的平均主义者把一切差别都消灭了。但货币本身不是商品,是可以成为任何人的私产的外界物,这样,社会权力就成为私有权力。因此,古代社会咒骂货币是自己的经济秩序和道德秩序的瓦解者。"

"人间再没有像金钱这样坏的东西,这东西可以使城邦毁灭,使人们被赶出家,把善良的人教坏,使他们走上邪路,做些可耻的事,甚至叫人为非作歹,干出种种罪行。"(《资本论》第一卷第 156 页)

"在任何情形下,在商品市场上,只是商品占有者与商品占有者相对立,他们彼此行使的权力只是他们商品的权力。"(《资本论》第一卷第 187 页)

"资本家所以是资本家,并不是因为他是工业的管理者。相反,他所以成为工业的司令官,因为他是资本家。工业上的最高权力成了资本的属性,正像在封建时代,战争中和法律裁判中的最高权力是地产的属性一样。"(《资本论》第一卷第 156 页)

"首先,资本主义生产过程的动机和决定目的,是资本尽可能多地自行增殖,也就是尽可能多地生产剩余价值,因而也就是资本家尽可能多地剥削劳动力。……其次,雇佣工人的协作只是资本同时使用他们的结果。他们的职能上的联系和他们作为生产总体所形成的统一,存在于他们之外,存在于把他们集合和联结在一起的资本中。因此,他们的劳动的联系,在观念上作为资本家的计划,在实践中作为资本家的权威,作为他人意志——他们的活动必须服从这个意义的目的——的权力,而和他们相对立。"(《资本论》第一卷第 385 页)

"可见,工人本身不断地把客观财富当做资本,当做同他相异己的,统治和剥削他的权利生产出来,而资本家同样不断地把劳动力当做主观的,同它本身对象化在其中和借以实现的资料相分离的,抽象的只存在于工人身体中的财富源泉来生产,一句话,就是把工人当做雇佣工人来生产。工人的这种不断再生产或永久化是资本主义生产必不可少的条件。"(《资本论》第一卷第 659 页)

"为资本主义生产方式奠定基础的变革的序幕,是在 15 世纪最后 30 多年和 16 世纪最初几十年演出的。由于封建家臣(这些封建家臣,正如詹姆斯·斯图亚特爵士正确指出的,'到处都无用地塞满了房屋和城堡')的解散,大量不受法律保护的无产者被抛向劳动市场。虽然王权——它自己也是资产阶级发展的一个产物——在追求绝对权力时,用暴力加速了这些家庭的解散,但王权绝不是这件事情的唯一原因。不如说,同王室和议会顽强对抗的大封建主,通过把农民从土地(农民对土地享有和封建主一样的封建权利)上强行赶走,夺去他们的公有地的办法,造成了人数更多无比的无产阶级。在英国,特别是佛兰德毛纺织工场手工业的繁荣,以及由此引起的羊毛价格的上涨,对这件事起了直接的推动作用。大规模的封建战争已经消灭了旧的封建贵族,而新的封建贵族则是他们的自己时代的儿子,对这一时代说来,货币是一切权利的权力。"(《资本论》第一卷第 825 页)

"新兴的资产阶级为了'规定'工资,即把工资强制地限制在有利于赚钱的界限内,为了延长工作日并使工人本身处于正常程度的从属状态,就需要并运用国家权力,这是所谓原始积累的一个重要因素。"(《资本论》第一卷第 847 页)

"现在,资本家可以看做是全部社会财富的最先所有者,虽然没有任何一项法律给予他这种所有权……所有权方面的这种变化是由于资本的取息而生产的……同样值得注意的是,整个欧洲的立法者都想取缔高利贷的法律来阻止这件事……资本家支配国家的全部财富的权力是所有权上的一种彻底的革命;然而这个革命是靠哪一项法律或哪一套法律来实行的呢?"(《资本论》第一卷第 860 页)

"生产交往的世界,可以看作是在我们称为经济周期的循环中运转的,一旦企业完成

它相继进行的交易,又回到它的起点,每次的循环就完成了。起点可以从资本家得到收入,从而收回资本的时候算起;从这时起,他重新着手做以下的事情:招雇工人,并以工资的形式分给他们生活资料,或者确切地说,分给他们获得生活资料的权力;从他们那里取得他所经营的制成的物品;把这种物品送到市场去,在那里把它们卖掉,在货款中收回全部投资,而结束这一系列运动的循环。"(《资本论》第二卷第173页)

"最后,我们以前已经说过,工人实际上把他的劳动的社会性质,把他的劳动和别人的劳动为一个共同目的的结合,看成一种对他来说异己的权力;实现这种结合的条件,对他说来是异己的财产,如果他不是被迫节约这种财产,那么浪费一点,对他说来毫无关系。而在属于工人自己的工厂,例如罗奇代尔的工厂中,情况就完全不是这样。"(《资本论》第三卷第100页)

"在资本主义生产中,问题不仅在于,要用那个以商品形式投入流通的价值额,取出另一种形式(货币形式或其他商品形式)的等量的价值额,而且在于,要用那个预付在生产中的资本,取出和另一个同量资本所取得的一样多的或者与资本的大小成比例的剩余价值或利润,而不管预付的资本是用在哪个生产部门的;因此问题在于,最低限度要按照那个会提供平均利润的价格,即生产价格来出售商品。在这种形式上,资本就意识到自己是一种社会权力,每个资本家都按照他在社会总资本中占有的份额而分享这种权力。"(《资本论》第三卷第217页)

"我们已经知道,资本积累的增长包含资本积聚的增长,因此,资本的权力在增长,社会生产条件与实际生产者分离而在资本家身上人格化的独立化过程也在增长。资本越来越表现为社会权力,这种权力的执行者是资本家,它和单个人的劳动所能创造的东西不再发生任何可能的关系;但是资本表现为异化的,独立化了的社会权力,这种权力作为物,作为资本家通过这种物取得的权力,与社会相对立。由资本形式的一般的社会权力和资本家个人对这些社会生产条件拥有的私人权力之间的矛盾,越来越尖锐地发展起来并且包含着这种关系的解体,因为它同时包含着把生产条件改造成为一般的,公共的,社会的生产条件。这种改造是由生产力在资本主义条件下的发展和实现这种发展的方式决定的。"(《资本论》第三卷第293页)

"假定平均利润率是20%,这时,一台价值100镑的机器,在平均条件以及平均的智力水平和合乎目的的活动下当作资本使用,会提供20镑的利润。因此一个拥有100镑的人,手中就有使100镑变成120镑,或生产20镑利润的权力。他手中有100镑可能的资本。如果这一个人把这100镑交给另一个人为期一年,让后者一个人把这100镑实际当做资本来使用,他也就给了生产20镑利润即剩余价值的权力。这个剩余价值对后者来说什么也不花费,他没有为它支付等价物。如果后者在年终把比如说5镑,即把所生产的利润的一部分分付给这100镑的所有者,他就是用这5镑来支付这100镑的使用价值,来支付这100镑的资本职能即生产20镑利润的职能的使用价值。他支付给所有者的那一部分利润叫做利息。因此,利息不外是一部分利润的一个特殊名称,一个特殊项目;执行职能的资本不能把这部分利润装进自己的腰包,而必须把它支付给资本的所有者。

很清楚,100镑的所有权,使其所有者有权把利息,把他的资本生产的利润的一定部分据为已有。如果他不把这100镑交给另一个人,后者就不能用这100镑来执行资本家的职能。"(《资本论》第三卷第378页)

“用拉姆赛的话来说,利息就是资本所有权本身提供的纯利润,不管它是提供给处在再生产过程之外的单纯贷出者,还是提供给亲自把自己的资本用于生产的所有者。它所以也为后者提供纯利润,并不是因为后者是执行职能的资本家,而是因为他是货币资本家,他把自有资本作为生息资本贷给作为执行职能的资本家的他自己。就像货币或一般地说价值转化为资本,是资本主义生产过程不断产生的结果一样,它作为资本而存在,也是资本主义生产过程不断需要的前提。由于它有转化为生产资料的能力,它就不断地支配着无酬劳动,并因而把商品的生产过程和流通过程转化为替它的所有者进行的剩余价值的生产。因此,利息不过是这样一个事实的表现:价值一般——一般形式上的对象化劳动——在现实生产过程中争取生产资料形态的价值,会作为独立的权力与活的劳动力相对立,并且是占有无酬劳动的手段;它所以是这样一种权力,因为他是作为他人的财产与工人相对立。但是,另一方面,在利息的形式上,这种与雇佣劳动的对立却消失了;因为生息资本就是它本身来说,不是以雇佣劳动为自己的对立面,而是以执行职能的资本为自己的对立面,借贷资本家就他本身来说直接与再生产过程中实际执行职能的资本家相对立,而不是与正是在资本主义生产基础上被剥夺了生产资料的雇佣工人相对立。生息资本是作为所有权的资本与作为职能的资本相对立的。但是资本在它不执行职能的时候,不剥削工人,也不是同劳动处于对立之中。”(《资本论》第三卷第 425 页)

“利息本身正好表明,劳动条件作为资本而存在,同劳动处于社会对立中,并且转化为同劳动相对立并且支配着劳动的个人权力。利息把单纯的资本所有权表现为占有他人劳动产品的手段。但是它是把资本的这种性质表现为某种在生产过程之外属于资本的东西,而不是表现为这个生产过程本身的独特的资本主义规定性的结果。它不是把资本的这种性质表现为同劳动的直接对应,而是相反地同劳动无关,只是表现为一个资本家对另一个资本家的关系,也就是说,表现为一种存在于资本对劳动本身关系之外的,与这种关系无关的规定。因此,在利息上,在利润的这个特殊形态上,资本的对立性质固然得到了独立的表现,但是表现成这样:这种对立在其中已经完全消失,完全排掉。利息是两个资本家之间的关系,不是资本家和工人之间的关系。”(《资本论》第三卷第 429 页)

“关于资本在货币借贷上所起的作用,亚·斯密说:即使在货币借贷上,货币也似乎只是一种凭证,这种凭证使某个所有者不使用的资本从手里转到另一个人手里。这种资本,同作为资本转移工具的货币额相比,不知可以大多少倍,同一些货币可以连续用来进行许多次的借贷,正像可以用来进行许多次的购买一样。例如 A 借给 W 1000 镑,W 立即用来向 B 购买价值 1000 镑的商品,B 因为不需要用钱,所以又把这 1000 镑借给 X,X 又立即用来向 C 购买价值 1000 镑的商品。C 又用同一方法,由于同一理由,把这 1000 镑借给 Y,Y 再用来向 D 购买商品。因此,同一些金币或纸币,在数日之内,就可以用来借贷三次和购买三次,而每一次在价值上都和这个货币总额相等。A、B、C 是三个有钱的人,W、X、Y 是三个借钱的人,前者转给后者的是进行这种购买的权力。这些借贷的价值和效用都是由这种权力构成的。”(《资本论》第三卷第 534 页)

“资本,土地,劳动!但资本不是物,而是一定的社会的,属于一定历史社会形态的生产关系,后者体现在一个物上,并赋予这个物以独特的社会性质。资本不是物质的和生产出来的生产资料的总和。资本是已经转化为资本的生产资料,这种生产资料本身不是资本,就像金或银本身不是货币一样。社会某一部分人垄断的生产资料同活劳动力相对立

而独立化的这种劳动力的产品和活动条件,通过这种对立在资本上人格化了。不仅工人已经转化为独立权利的产品,作为其生产者和购买者的产品,而且这种劳动的社会力量及未来的这种劳动的社会力量及其有关的形式,也作为生产者的产品的属性而与生产者相对立。因此在这里,对于历史地形成的社会生产过程的因素之一,我们有了一个确定的,乍一看来极为神秘的社会形式。"(《资本论》第三卷第 922 页)

"正像在资本和资本家——他事实上不外是人格化的资本——身上,产品成为生产者面前的独立权力一样,在土地所有者身上,土地也人格化了,也会后腿站立起来,并且作为独立的权力,要求在它帮助下生产出来的产品占有自己的一份,所以不是土地得到了产品中归土地所有的那一部分,用来高价售卖和挥霍浪费。很清楚,资本是以作为雇佣劳动的劳动力为前提的。但是同样很清楚,如果作为雇佣劳动的劳动是出发点,以致劳动一般和雇佣劳动合而为一好像是不言而喻的事情,那么资本和被垄断的土地,也就必然会表现为劳动条件的自然形式,从而表现为纯粹物的形式和由劳动资料在一般劳动过程中的职能所产生的性质。因此,资本和生产出来的生产资料就又变成了同义词。同样,土地和被私有权垄断的土地也变成了同义词。天然就是资本的劳动资料本身也就成了利润的源泉,土地本身也就成了地租的源泉。

劳动本身,就它作为有目的生产活动这个简单的规定性而言,不是同作为社会形式规定性的生产资料发生关系,而是同作为物质实体,作为劳动材料和劳动资料的生产资料发生关系。这些生产资料也只是在物质方面,作为各种使用价值来互相区别,即土地是作为非生产出来的劳动资料,而其余的东西是作为生产出来的劳动资料而互相区别。因此,如果劳动和雇佣劳动合而为一,那种使劳动条件和劳动对立起来的一定的社会形式也就会和劳动条件的物质存在合而为一。这样,劳动资料本身就是资本,土地本身也就是土地所有权。"(《资本论》第三卷第 934 页)

以上完整地引用了马克思在其哲学著作《资本论》中关于权力的论述。在转述过程中没有发现哪一段话是可以删去的,这也是苏东坡提倡的八面受敌法,是治学方法的一种。马克思的论述可以概括如下[9]:本来劳动是人与自然界的一种物质交换过程,自然界不会自动地满足人的需要。因为人不只是动物的一个物种,只生产满足这一物种本能需要的产品。人的需要具有无限性,人的需要拥抱整个自然界。而且不仅生产自然界已有的东西,还不断创造出自然界原来没有的东西,从物质形态上看,这些都是对人的需要而论有用的东西,是使用价值的物质载体。但在资本主义社会化的大生产下,特别是当前资本主义生产全球一体化的大气候下,每个资本生产的商品都是为了用于交换的劳动产品。资本论开门见山地指出[8]:"资本主义生产方式占统治地位的社会的财富,表现为'庞大的商品堆积',单个的商品表现为这种财富的元素形成。"因此在高度社会化的今天,为他人生产产品或服务的劳动是社会化的劳动,反之不能社会化的劳动成为非劳动。无论劳动者本人也好,劳动的产品也好,甚至资本家也不例外。所以社会化的劳动及其产品,除了负载物自身的使用价值外,还负载着人与人之间在生产中结成的权力关系、利益关系、权利关系等人类社会关系。这是在物与物的关系背后掩藏着的人与人的关系,在商品中表现为等价交换的权利,在货币中表现为在市场上购买任何一种商品购买权力。特别是购买劳动力这种特殊商品的权力,通过劳动力这种特殊商品的使用,与一定的生产资料相结合,将货币转化成资本。榨取工人的剩余劳动创造的剩余价值,从而发展出一切货币的资

本权力，取得利息的权力，包括土地在内的一切生产要素都有分割剩余价值的权力。包括政治的、军事的、文化的、宗教的各种力量都将参与到剩余价值的分割中来[9]。这就是政治经济学。

在一定的生产力与生产关系条件下，人们的生产劳动和服务劳动的产品都必须拿到市场上与别人的产品相交换[9]。这样为了自利（而不是自私，自利指自己与自己的关系，而自私是指自己与他人的关系），就必须先将自己的产品交付给他人，让他人满意（利他），然后从他人那里获得产品以实现自身利益。宛如酒桌上你先要敬别人的酒，别人才敬你的酒，大家都有敬酒吃。这样就实现了在交换领域利益的双向互动和斯密的看不见的手[9]。这也就是说在物质交换领域实现了本书反复强调的社会化历史性的场，尽管这种场受到市场权力体系的制约。斯密的看不见的手，说简单一点就是主观上为自己，客观上为大家的一种机制。这种机制好于提倡主观上为大家的理论，也好于提倡人人都自私的理论。因为自私的本性会导致经济生活中弱肉强食的"丛林法则"；人类社会完全变成了动物世界。这是由斯密开创的有市场"边际利益均衡机制"完善的自由主义和古典经济学。其基本假设是理性经济人假设，没有考虑人的全面丰富性，特别没有考虑政治、军事、文化、宗教、伦理对经济行为的影响。这种自由主义的古典经济学，最大的问题就是会产生生产的社会性和占有制的私人性之间的矛盾，继而又会产生所谓"生产过剩"的危机，专业一点就是"全局性产品危机和总量上的失业"。

1929 年至 1932 年的最严重的资本主义社会的经济危机，不仅导致了世界大战，而且导致了在经济学理论上的凯恩斯主义经济学。这一新理论得到美国总统罗斯福的理解和实践，并且取得了相当的成功。说简单一点就是邓小平说的资本主义也有计划。经济萧条时期，由政府出钱，增加社会的货币流量，拉动内需，提供就业机会。总的说来，这种办法只能短期见效，长期则会导致经济的"滞胀"[9]。而 2008 年这次的"经济泥潭"又有其特殊性[9]，似乎是政府出钱也不行，不出钱也不行，是一种很难摆脱的更深层次的经济危机。当然对美国影响其实是不大的，因为美国早就捞足了，受害的还是广大股民和全世界的劳动人民。

3.3.2　生产劳动的目的性

大家知道，生产劳动是每个劳动者有目的、有意识、有意志的活动。在文献[11]的第三章专门讲创作目的，由于该书将创作活动当做实践活动来处理，所以可以充分移植文献[11]的研究成果到生产劳动上来。

文献[11]认为创作活动由对象、目的、手段、方法、结果构成，创作的目的不止一个，而是三个。创作目的是"三位一体"的东西，创作既有"内在目的，又有外在目的，还有自身目的。"并举例说明为：在改革开放的年代，出现了许多企业家，办好企业就是他的"内在目的"，赚钱就是他的"外在目的"，他同时又很喜爱自己的工作，工作就是他的生命，工作就是他的"自身目的"。……雇佣工人工作的目的是为了拿到工资，这是他的"外在目的"，雇佣工人必须学会制造产品，假如他没有这样的素质，他就不会被雇佣，这就是说他在具体的劳动中也有"内在目的"。但雇佣工人对自己的工作不感兴趣，马克思称"内在目的"与"外在目的"相矛盾的劳动为异化劳动。

文献[11]花了 12 页的篇幅完成清晰论述，并把目的讨论归结到异化劳动这一点上

来,也是专列这一小节的原因。但上述表达如果放到本书体系中来审核,就显得有些不够到位。对于工人的工资和资本家的赚钱,没有做出区分,对于在生产中形成的权力没有做出交代,对于产品的分配和消费也没有清楚的交代。资本家的外在目的是生产社会所需要的产品,资本家的内在目的是为了获得工人的剩余价值,在劳动中支配工人的劳动力;资本家的自身目的是为了获得更多更大的市场权力,至少也要将自己再生产成为资本家,维持工人和资本家在办厂合法化前提下的生产关系。这一切实现的手段当然都是所有制决定的:资本家占有劳动产品的所有权,工人只得工资。资本家通过对劳动产品的占有,特别是对物化在产品中的工人的剩余价值的占有,能够维持资本家和资本家家庭的浪费而奢侈的生活。

从事的世界观上看,生产劳动包括微观和宏观两个层面。微观层面主要是由事实座架的,宏观层面主要是由价值座架的,所以有微观层面主观的关于生产劳动的目的,与正在完成的目的;也有宏观层面的外在目的和已完成的目的。从人的世界观(本书的角度),生产劳动者有主观的关于劳动者自身的目的与正在完成的关于劳动者自身的目的,这是从微观层面看的。再从宏观层面看,则有外在目的和已完成的外在目的。以上微观和宏观均指时间尺度。生产劳动是先由价值尺度座架(要不要做),也就是宏观时间尺度上的价值判断(要不要做,比如今天这堂课要不要上),再由微观尺度(一节课的时间再细分成每分每秒)的怎样做来构成的。文献[11]的所谓三位一体的目的大致可理解为人与自然、人与社会、人与自己的三重目的性。分别称为内在目的、外在目的和自身目的。按本书体系也就是在外王中的格物、致知、诚意的目的性,那么自然也就还可以引出在内圣的正心、修身、齐家、治国、平天下的另外五重目的性,一共八重目的性。哲学就是要能在没事的地方找出事来,要有批判精神。

比如写一篇文章,单位要求写,这是外在目的,在写作过程中,作者始终关注着文章的社会赋予的价值和对社会有用的使用价值。文章写成后有价值和有使用价值,但对写作的人而言,写这篇文章作为事情对他本人而言也是有目的的,有自在的价值、发展的价值。

3.3.3　价值与使用价值

看到本节的这个标题,有的读者可能会觉得这是政治经济学的基本概念,用不着在专著中详细讨论。但复习这些基本概念是有一定现实针对性的[3,8,9,12−14],也有一些比其他文献讲得更透彻的地方,值得读者领会。通过对《资本论》的复习让大家知道马克思本来是怎么说的,现在又有一些什么样的解释。我的立场是回到马克思(本身),马克思怎么说就怎么说。新的说法也不反对,但新的说法的正确性(不管是在事实层面,还是在价值层面、历史理性层面或思想上层建筑层面)还有待时间(比如 100 年后)的检验。

资本主义生产方式占统治地位的社会的财富,表现为“庞大的商品堆积”,单个的商品表现为这种财富的元素形成。因此我们的研究就从分析商品开始。商品首先是一个外界的对象,一个靠自己的属性来满足人的某种需的物(《资本论》第一卷第 47 页)。

商品作为资本论的逻辑起点,比较好懂。需要可以是物质的,也可以是精神的。只要大家去过大的超市,不难发现确实是“庞大的商品堆积”,如果再到劳务市场看一看,也确实有大量失业人员在找工作,体现了劳动力作为商品的“庞大的商品堆积”。所以人(劳动力)也是资本主义社会的财富,所谓人力资源。

“物的有用性使物成为使用价值。但这种有用性不是悬在空中的。它决定于商品的属性，离开了商品体的属性，离开了商品体就不存在。因此，商品体本身，例如铁、小麦、金刚石等，就是使用价值或财物。商品体的这种性质，因人取得它的使用属性所耗费的劳动的多少没有关系……使用价值只是在使用或消费中得到实现。无论财富的社会的形式如何，使用价值总是构成财富的物质的内容。在我们所要考察的社会形式中，使用价值同时又是交换价值的物质承担者。

交换价值首先表现为一种使用价值同另一种使用价值相交换的量的关系或比例，这个比例随着时间和地点的不同而不断改变。”（《资本论》第一卷第 48 至 49 页）

这里所谓使用或消费就是本书所谓要使用或消费一个非零的时间区间（时段），才是现实化了的使用价值，所以使用价值是与时间有关系的，劳动力作为商品，作为使用价值，肯定是要使用或消费了一段时间（非零的）才有使用价值的。这与以前讲到的利益关系的充实有关。

“作为使用价值，商品首先有质的差别；作为交换价值，商品只能有量的差别，因而不包含一个使用价值的原子。”如果把商品体的使用价值撇开，商品体就只剩下一个属性，即劳动产品这个属性。可是劳动产品也已经起了变化。如果把劳动产品的使用价值抽去，那么也就是把那些使劳动产品成为使用价值的物体的组成部分和形式抽去。它们不再是桌子、房屋、纱或别的什么有用物。它们的一切可以感觉到的属性都消失了。它们也不再是木匠劳动、瓦工劳动、纺纱劳动或其他某种一定的生产劳动的产品了。随着劳动产品的有用性的消失，体现在劳动中的各种劳动的有用性也消失了，因而这些劳动的各种具体形式也消失了。各种劳动不再有什么差别，全都化为相同的人类劳动，抽象人类劳动。

现在考察劳动产品剩下来的东西。它们剩下的只是同一的幽灵般的对象性，只是无差别的人类劳动的单纯凝结，即不管以哪种形式进行的人类劳动力耗费的单纯凝结。这些物现在只是表示，在它的生产上耗费了人类劳动力，积累了人类劳动。这些物，作为它们共有的这个社会实体的结晶，就是价值——商品价值。（《资本论》第一卷第 51 页）

这里马克思详细地展示了进行科学和哲学研究的抽象方法，很值得学习。现在进一步追问，根据海德格尔哲学，使用价值作为一种器具性存在，总是面向何所用形成物的世界关联整体，所以马克思抽去的是什么呢？是不是抽去了对人类社会而言物的有用性所具有的意义关联整体？所以，对象性活动的特殊考察总是对存在的遗忘，也就是对存在意义的遗忘。商品的价值通过对物化的抽象变成人化的东西、人化的劳动时间和人化的抽象人类劳动。如果作语言学转向后的模拟，语言由有限持有的音响形象和人类性的意义构成，商品也由有限持有的每一具体劳动的持有时间和人类性意义的人类抽象劳动构成。由于现代全球化生产力和生产关系的发展，早年山西商人的货通天下的理想已基本实现。每个人想到利己首先要利他，从而实现了以物为中介，人与人之间的双向互动，也就是在物质层面构建起社会化历史性的场，已经可以通过马克思的抽象，甩开物质世界的无限丰富性来研究今天（作为一个时段）由有限个人类个体组成的主体间性问题。使问题得到极大的简化。马克思能发现前人没有发现的东西，其方法的秘密其实就在这里。

可见，使用价值或财物具有价值，只是因为有抽象人类劳动对象化或物化在里面，那么，它的价值量是怎样计量的呢？价值量是用它所包含的形成价值的实体即劳动的量来

计量,劳动本身的量是用劳动的持续时间来计量,而劳动时间又是用一定的时间单位如小时、日等作尺度。

在此提一个问题:

商品的价值=? ×时间

似乎马克思的叙述不像晶体一样透明,特别是劳动力作为商品的价值(公开问题):

劳动力的价值=? ×时间=劳动力·时间=钱/时间

钱=劳动力×(时间)^2

劳动力=钱/(时间)^2

从这里不难看出,货币作为资本是以加速度座架的,而资本家付给工人的工资却是以速度座架的,这也是透视资本主义生产方式资本家剥削工人的秘密的方法之一,这个观点是由本书作者提出的。

这就是在本书第一版中声称的,价值要用价值作用量和价值变化率来把握的含义。量子力学上人们正是通过能量作用量(普朗克常数,能量量子化)和能量变化率(与电荷量子化相关的一个物理量)来把握能量的。价值是一个看不见、摸不着、听不见的一个随时空变化的场,存在于当下活着人类之间,可以作为本书数学化历史性的场的一个典型代表[2]。

工人领工资为什么发不了财?因为工资是分段线性的函数,没有加速度。资本家为什么能发财?因为资本家的钱有加速度。只要认真阅读马克思的《资本论》到第 244 页为止的内容就不难明白这一道理。

马克思的劳动力价值论,尽管引入时比较复杂曲折,但总的说来,价值这一概念是与劳动者相关,而劳动又总是需要一个时段来充实的一个概念。因而总的说来属于当下活着的每个人,也就是属于人类社会,因而与胡塞尔的现象学是有某种关联的[14]。而通过引入社会化历史性的场来穿透人类主体间性,从而可以研究价值及其运动的规律,这里只是开了一个头,旨在改变哲学的研究对象和研究方法。从而为研究货币(作为场的货币),为研究资本(作为资本市场的场的资本),为研究劳动力(作为劳动力市场的场的劳动力),为研究商品(作为价值和使用价值的场的商品),为研究私人劳动与社会劳动的互动关系,为研究人与人之间的利益关系、权力关系、权利关系提供了一种有效的工具,从而具有方法论上的重要意义。这样就产生一个问题,似乎唯物主义有点落空了。既然是主体间性,那不变成主观唯心主义了吗?这一点邓晓芒早有阐述[14]116:问题深入一步,实践这个概念本身在马克思的意义上就已经不能撇开现象学的方法作自然主义的规定了。实践在康德、黑格尔那里本质上具有纯精神的意义,在费尔巴哈那里则具有纯物质性的意义。马克思则把实践称为“感性活动”,“自由自觉的生命活动”,它既不能是以唯心主义的精神主体来理解,也不能只从费尔巴哈的物质过程来理解,而是一切精神的主体性和物质的客观性得以理解的前提。当马克思说:“对我说来任何一个对象的意义(它只是对那个与它相适应的感觉说来才有意义),都以我们感觉所感知的程度为限”时,这绝不是贝克莱主义,与自然科学的唯物主义更明显地不同。人把自己相应的对象看作自己本质力量的确证,这是能理解为人的感性活动在现象学意义上的本质结构,即意向性结构,“人同世界的任何一种属人的关系——视觉、听觉、嗅觉、味觉、触觉、思维、直观、感觉、愿望、活动、爱——总之,他的个体的一切官能——是通过自己的对象性关系,亦即通过自己同对象的关系,而

对对象的占有。”正因为人在感性实践中使整个自然界成为人的生活的一部分变成了人的“无机的身体”，所以从理论方面来说，植物、动物、石头、空气、光等，部分地作为自然科学的对象，部分地作为艺术的对象，都是人的意识的一部分，都是人的精神的无机自然界。马克思还把这种关系称之为“感性地摆在我们的面前的，人的心理学”，认为“还未能及历史的这个恰恰从感觉上最易感知的，最容易理解的部分的心理学，不能成为真正内容丰富的和现实的‘科学’。这当然不是什么‘心理主义’，而是把感性学当做一切科学的真正基础，已如胡塞尔也把‘先验的’心理学当做严密科学的基础一样”。

通过这一长段引文可知，一切人建立的学说的真正基础在于人本身，也就是说，自在自然本身并没有意义、并没有目的、没有真理、没有价值。一切的人世间的学说都是主体间性的，一切历史学也都是当代史。物的意义需要人的灵性的光辉才能照亮。这是社会化历史性的场在哲学史上登场的关键所在，也是社会唯物主义一元论、二元论、三元论、四元论的最根本的元素：形而上学的元素。邓晓芒写道[14]118：“总之，在马克思那里，无论自然还是历史，都要以人的感性或感性的‘心理学’为前提才能得到科学的说明。感性本身当然是‘全部世界史的产物’，但世界史无非是感性的自我形成活动的历史。”这与王阳明的心外无物颇有可会通的地方，所以社会唯物主义按中国哲学可以称为灵明学，存在于活着的主体之间，带着人类的全部历史，也带着自然界的全部历史，而每个人的活动可称为明灵活动，类似语言学是人类主体间的活动，而言语活动是每个人的语言活动。语言与言语的相互生成[2]构成了人类语言活动场。而灵明学是人类主体间的哲学活动，而明灵活动是当下活着的每个人的哲学活动，明灵与灵明的相互生成[2]构成人类哲学活动场。而根据王阳明所论，人高于动物和其他万事万物的地方，就是每个人心中的一点灵明。由这个灵明可以感应并接受社会化历史性的灵明场对每个人的作用。同样由每个心中的这一点灵明，每个人还能对社会化历史性的灵明场做出响应和发射，从而生成新的社会化历史性的灵明场。而每个人对社会化历史性的场的感应和响应称为明灵活动。

为了与《大学》更好地接轨，也可以称灵明学为德明学，指人类社会化历史性的哲学活动，而每个人对德明活动场的感应和响应称为明明德活动。根据本书认识论与本体论相统一的原则，明德活动和明明德活动分别代表海德格尔基础存在论意义上的非对象化（前反思）的活动，和（明明德活动）马克思意义上的认识论和实践论意义上的对象性活动。本体论（我们，自然界是人的无机身体，另外，世界上万事万物都有单独的或共享的所有权，占有权）为认识论（我它）奠基。同时认识论也为本体论奠基。通过对象性活动的感性自明性，可以为本体论奠基[14]。由于人类社会同时存在的我们和我它关系，本书还可以认为本体论和认识论同时为本体论和认识论奠基，这是由于可以把本来不同时的我们和我它强制同时，也就是以前说的历史唯物主义可以自己给自己奠定基础。当然不能忘记，自在自然，无化着的自在自然，作为人化自然，自然化人，人化自然与自然化人的本体论与认识论的统一，这第四个元素，包含在完备二元论哲学体系之中。本书的解释不同于孙正聿和俞吾金对历史唯物主义的解释，只是通过这几段的解释，打通西方哲学（现象学）、中国哲学（阳明心学）、《大学》和马克思主义哲学。不知道这种努力能不能看作对邓晓芒的回应[14]121：“目前中国学术界对于理论的形而上兴趣大大削弱，这固然与理论现状的陈旧、僵化有关，更重要的却是因为理论上的开拓和创造精神（而不是赶时髦）的学者太少。人们一时纷纷转向似乎最不需要理论只要‘妙悟’的‘国学’，热衷于发感慨，谈体会和写些

'可读性'很强的漂亮文字。但我认为,中国传统学术在今天绝不能成为一个摆脱理论重压或逃避理论贫乏现状的避难所,相反,它已需要具有高层次理论素养的人去挖掘,去发现,乃至去'重建'。"

本书的哲学观点就是:哲学就是形而上学。如果在一个哲学体系中没有形而上学的成分,那是不能称为哲学的,至少是不能称为古希腊意义上的哲学的,一切都可实证的哲学只能称为科学。科学与哲学(在 2016 年的意义上)是有严格的对象划分的,两者不可等同,但有联系。哲学除了本身的研究范围特别广之外,还能为科学奠定基础,对科学的前提进行批判,对科学的结论进行解释。在科学还毫无头绪的时候,哲学可以提供方法论上的指导,能为科学提供一些哲学上的设想、一些可能性。当科学已经取得成果的时候,哲学能够指导科学进行领域的进一步开拓、方法论上的提升、意义的赋予等。比如,四大社会形态的提出就是一种哲学思维,事先不知道这个问题的答案,但知道马克思有三个社会形态的理论。那么从哲学上来讲,从人和物的关系来看,莫非下列四种可能性:①人的依赖性加上物的依赖性;②物的依赖性基础上的人的独立性;③人的依赖性基础上的物的独立性;④物的独立性基础上的人的独立性。

列出四种可能性之后有两点,一是:③是新的,可不可能存在?经过沉思是可能的,而且很符合中国的传统,孔孟之道也有合理成分。二是:①与马克思的表述有少许差别,仔细检查,马克思没有说物的依赖性,但反复研究后发现①中人的依赖性正是建立在物的依赖性基础上才有人的依赖性,所以更加符合马克思哲学的历史唯物主义精神。所以提出四大社会形态更加符合马克思哲学的真精神,也就提出了四大社会形态理论以扬弃马克思的三个社会形态理论。因为历史的局限性,马克思、恩格斯也有想得不十分周全的地方,但这丝毫也不影响革命导师的伟大性。不够周全的地方大家完善一下就可以了。为什么对马克思的三个社会形态理论情有独钟?主要是文献[3]的立论很多时候指出了这一理论,才引发本书对这一理论进行的研究。

3.3.4 不变资本与可变资本,死劳动与活劳动

马克思《资本论》第一卷第六章的标题就是不变资本和可变资本。书中讲得一清二楚的事情,在这里重述自有重述的道理[3]。先看马克思的定义:

"可见,转变为生产资料即原料、辅助材料、劳动资料的那部分资本,在生产过程中并不改变自己的价值量,因此,我把它称为不变资本部分,或简称为不变资本。

相反,转变为劳动力的那部分资本,在生产过程中改变自己的价值。它再生产自身的等价物和一个超过这个等价物而形成的余额,剩余价值。这个剩余价值本身是可以变化的,是可大可小的,这部分资本从不变量不断转化为可变量。因此,我把它称为可变资本部分,或简称可变资本。资本的这两个部分,从劳动过程的角度看,是作为客观因素和主观因素,作为生产资料和劳动力相区别的,从价值增值过程中的角度看,则是作为不变资本和可变资本相区别的。"(《资本论》第一卷第 243 页)

定义之后,马克思从三个方面论述了不变资本为什么是不变的。有的人会说资本市场上的价值天天都在变,生产过程总要持续一个时段,在这个时段内原材料可能涨价,劳动资料如机器也可能贬值。马克思论述了这两种价值变动本质上都是在指定的这个生产过程以外的。第三是:

“生产资料的价值变动，虽然也会对已经进入生产过程的生产资料产生影响，但不会改变生产资料作为不变资本的性质。同样，不变资本和可变资本之间的比例的变动也不会影响它们在职能上的区别。”(《资本论》第一卷第 244 页)

《资本论》第六章分析了工人的劳动过程的二重性。也就是说工人的在一定时段的劳动过程虽然是在这一时段内的一次劳动，但这一次劳动同时生产使用价值和价值，都是由劳动的物化的产品来体现的。生产资料如果是劳动产品的话，当然也有价值。如果不是劳动产品，也就没有价值。因为马克思的劳动价值学说就是这样定义的，产品的价值是由生产该产品的社会必要劳动时间决定的。生产资料的价值由于劳动力的投入转移到新的产品中去了。另外工人把一定时段的劳动时间加到劳动对象上去，也就把新价值加到劳动对象上。就劳动创造价值的属性来说，既然工人劳动了一段时间就必然创造了价值。就劳动生产使用价值来说，既然工人劳动了一段时间，就必然转移价值，这时转移价值当然包括劳动力加到劳动对象上的价值和转移的生产资料的价值(过去劳动的价值或者说死劳动的价值)。问题并不出在生产使用价值的自然界意义的过程中，这一过程对于工人和资本家都是公平的。问题出在生产使用价值的社会(人类社会)意义的过程中。如果资本家只让工人干活干到转移完他购买劳动力作为商品的价值和生产资料转移的价值，那资本家一分钱也没有赚到。资本家还会让工人在资本家所在的国家政策允许的情况下，多干一会儿而不支付工人任何报酬。固然多干这一会儿也会耗费生产资料(死劳动)，但死劳动不增值，只有工人多干的这一会儿千真万确地加进了价值，产生了价值增值。所以是活劳动在资本主义生产关系决定的资本主义生产方式下生产了剩余价值。这是马克思劳动力创造价值学说的核心和底线。任何人可以不同于马克思提出自己的新的学说，因为马克思是站在工人阶级的立场为工人阶级说话的，所以《资本论》称为工人阶级的圣经。既然马克思白纸黑字在《资本论》第六章写得一清二楚，那就不允许任意地偷换概念，把不是马克思的东西披上马克思主义的外衣，欺骗和愚弄广大工人阶级和劳动人民。任何有初中以上文化程度的人，花十天时间就能看懂马克思的《资本论》第六章，民意还是不可违的。作者也承认资产资级经济学家站在资本家的立场，可以说出很多歪道理，而且可以证明资本主义生产方式的永恒性。但学术研究不同于意识形态宣传，还是实事求是好[9-14]。

马克思在《资本论》第一卷第 240 页的一段话是值得在这里完全引用的：“当生产劳动把生产资料转化为新产品的形成要素时，生产资料的价值也就经过一次轮回。它从已消耗的躯体转到新形成的躯体。但是这种轮回似乎是在现实的劳动背后发生的。工人不保存旧价值，就不能加进新劳动，也就不能创造新价值，因为他必须在一定的有用的形式上加进劳动；而他不把产品变为新产品的生产资料，从而把它们的价值转移到新产品上去，他就不能在有用的形式上加进劳动。可见由于加进价值而保存价值，这是发挥作用的劳动力即活劳动的自然恩惠，这种自然恩惠不费工人什么，但对资本家却大有好处，使他能够保存原有的资本价值。当生意兴隆的时候，资本家埋头赚钱，觉察不到劳动的这种无偿的恩惠。但当劳动过程被迫中断时候，当危机到来的时候，资本家对此就有切肤之感了。”

从这一段引文可见，马克思是用的生产劳动，而不是劳动，所以通过区分生产劳动和劳动变不出什么戏法来。首先，资本主义生产的目的是剩余价值的生产。第二，站在工人阶级的立场，即使资本家不榨取工人的剩余价值，仅仅就工人为资本家的生产资料保值来说，工人的劳动也是有功的。当然资本家生产的根本目的当然是要榨取工人的剩余价值，

吸吮尽可能多的活劳动。第三,我国作家矛盾有部小说《子夜》,后来拍成电影和电视连续剧,对马克思这段话做出了很好的注解。子夜里面的资本家吴松蒲,也就是三先生,在想方设法榨取纺纱工人的剩余价值方面是很有一套的,在工人罢工期间伙同工头做了很多手脚。同样当时英国的资本家比新中国成立前的三先生还要坏,从而说明马克思这段话是说得很有道理的。

3.3.5 劳动的异化

俞吾金在文献[8]第十五章的劳动辩证法论述中,详细地讨论了劳动与对象化、劳动与外化、劳动与异化、劳动与物化。在文献[15]又用专门一章讨论了马克思的异化观新见,认为异化是马克思一生理论思考中的一个基本概念,在马克思异化概念的发展中,存在着一个根本性的视角转换,即从青年马克思的"道德评价优先"转向成熟时期的马克思的"历史评价优先",而这一视角转换的前提则是马克思创立的历史唯物主义理论。文献[16]最后一篇文章借着介绍广松涉(日本人)的物象化理论,间接地表达了作者对劳动异化的理解。文献[15]较早地讨论了劳动异化及其根源。重点讨论了劳动活动本身的异化,提出了劳动意识的概念,重点阐释了精神劳动与物质劳动的分工如何导致异化的加剧并最终会导致异化的扬弃。文献[13]第十章也专门讨论了异化劳动与私有财产。这是一篇比马克思的原始论述清楚得多的阐发异化的论文。

本小节不准备从理论上再做更深入的探讨,仅仅从一个学理工科出身的人的角度谈一谈对劳动的异化的一些感受和领会。首先还是端出劳动活动本身的异化的定义[14],也是马克思的定义:"对劳动者说来,劳动是外在的东西,也就是说,是不属于他的本质的东西,因此,劳动者在自己的劳动中并不肯定自己,而是否定自己,并不感到幸福,而是感到不幸,并不自由地发挥自己的肉体力量和精神力量,而是使自己的肉体受到损伤,精神遭到摧残"。"劳动者自己的肉体的和精神的能力……就是掉转过来反对他自身的不依赖于他的,不属于他的活动。这就是自我异化"。马克思在《1844 年经济学哲学手稿》中提出了"异化劳动"及其四个规定:劳动产品的异化;劳动活动本身的异化;人类的本质的异化;人与人的异化。其中,劳动产品的异化是劳动活动本身的异化的结果[14]289。

劳动的异化的"事情本身"[13-16]大致就可以用上面的定义来刻画,问题是大家对这个事情的看法和态度,我想各种看法都是可能的。作者认为劳动的异化主要在于这一事情的悲剧性,什么是悲剧呢?悲剧就是自己与自己过不去,而又没有好的解决办法。通常的解决办法就是事情走向毁灭。按本书哲学体系,就是在诚意上出了问题,本来我不想做某种事,但还不得不做,没有办法做到诚意,固然可以自欺欺人,但毕竟"事情本身"会如其所是地挥之不去,由不得你自欺欺人。

我的好朋友最近就遇到这样一种劳动异化的事情,持续了好几个月,最终走向毁灭才使他从中走了出来。他本来有很重要的事要做,很想做,但用人单位却不感兴趣,希望他写一些莫名其妙的文章,这些文章对用人单位的科研评比有用。原本他以为可以屈就,写文章就写文章,但由于根本上违背了自己的意志,关键是自己想做的事没法割舍。经过几个月的挣扎,最后选择放弃这一工作,搞得本人和用人单位都浪费了许多时间和精力,做了很多无用功。双方都在这件事上走向毁灭(谈判失败)。但可能更多的人还不得不做一些自己很不乐意做的工作,那就是一个长期的悲剧,所以劳动的异化,以我们的切身感受

而论，是一个相当严重的问题，并不是那么轻描淡写的小事，更不是一个轻松的话题。

造成异化的根本原因，是应该回到康德，以人为目的。现在好些单位，包括一些培养人的单位，没有做到以人为目的，写文章本是身外之物，固然也很重要，但与人相比，那是不重要的。如果以人为目的，还是应该尊重劳动者的意愿，培养劳动者对科学的热爱比对最终成果的强调是更为重要的，科学研究一旦没有了兴趣，那是完全没有办法进行的。而且每个人各不相同，以全国统一或全校统一的标准来衡量科研工作，固然给管理带来了方便，但不可避免地会带来很多的异化劳动。这是给管理工作呈现的一个事实。另外，现在对科研工作缺少自在的评价，就是说这项研究在自在的意义上有没有价值，而不是一些外在的评价，如引用率之类。有的理论成果水平很高，但看得懂的人少，也就没有多少人引用，以引用率为标准完全是用政治标准代替学术标准，违背希腊哲学的精神。中国几千年来，过于看重实用价值，没有希腊人那种哲学始于惊奇的好奇心，所以在科学上处于落后状况。实用主义是高度资本主义化的美国精神，根本上是与马克思哲学重视理论研究、关心劳动人民疾苦不相容的。彭加勒猜想的证明，其实就发表在网上，但因为是对的，谁也否认不了其自在的价值。现在大家一般性的成果，拼命往知名度高的杂志上挤，挤进去又怎么样呢？反而对学术的"事情本身"没有了多少兴趣，我认为这是本末倒置的。学术工作的根本还是要看劳动者到底做了什么事，而不是一些外在的评价。

劳动的异化，其实在中国人从小到大的历次升学考试中就开始了。为了读好一点的学校，不顾自己的学习兴趣，死记硬背一些知识，无用的知识。围绕高考的指挥棒转，失去了很多的兴趣爱好和对世界的惊奇感，少年老成，只知道考大学最重要。我从国内几个亲戚家的小孩身上发现了这个问题。一心考大学，学习成绩还可以，但丢掉了一些比成绩好更重要的东西，以前都觉得很正常，大家都是这么做的。现在我出国多年，就觉得有些不正常了。比如我外甥女，初中都毕业了，放假了还要从成都跑回乐山外婆家吃饭，因为自己不想做。这就是很严重的问题，一个女孩子，不会做饭将来怎么办？当然，男女都应该学会做饭，只是可能现实一点，女孩子学会做饭更好一些。

3.3.6　从商品到货币

从商品到货币，根据马克思的《资本论》，货币起源之谜的破解也是马克思对政治经济学的重大贡献。主要是要理解马克思给出的下列四个公式的意义。

A：20 磅麻布＝1 件上衣，或 20 磅麻布值一件上衣

B：20 磅麻布＝1 件上衣
　　　　　　＝10 磅茶叶
　　　　　　＝40 磅咖啡
　　　　　　＝1 奈特小麦
　　　　　　＝2 盎司金
　　　　　　＝其他

C：1 件上衣＝20 磅麻布
　10 磅茶叶＝20 磅麻布
　40 磅咖啡＝20 磅麻布
　1 奈特小麦＝20 磅麻布

2 盎司金＝20 磅麻布

X 量商品 A＝20 磅麻布

D:20 磅麻布＝2 盎司金

1 件上衣＝2 盎司金

10 磅茶叶＝2 盎司金

40 磅咖啡＝2 盎司金

1 奈特小麦＝2 盎司金

X 量商品 A＝2 盎司金

“商品并不是由于有货币才可以通约。恰恰相反。因为一切商品作为价值都是对象化的劳动,从而本身可以通约,所以它们能共同用一个独特的商品来计量自己的价值,这个独特的商品就转化为它们共同的价值尺度或货币。”(《资本论》第一卷第 114 页)

在公式 D 中,金执行一般的价值尺度的职能,并且首先只是由于这个职能,金这个独特的等价商品才成为货币。金之所以能充当价值尺度,因为金本身也是劳动产品,其中包含有一般的人类劳动。从金矿到金是较为复杂的劳动过程,每克金里面都凝结了相当多的人类劳动。

货币作为人类劳动的社会化身,它是价值尺度。

货币作为规定的金属重量(这里是金的重量),它是价格标准。价值用货币表现就是价格(如 20 磅麻布＝2 盎司金),就是麻布的“价格形式”。价格是对象化在商品内的劳动的货币名称。货币本身没有价格。

货币除了作为价值尺度外,还可作为流通手段,而当前多数国家内部强制流通的是国家纸币。这种纸币是从原始的金银铜流通中产生出来的。货币还可以作为支付手段,货币的支付手段只是产生了信用货币。在国家与国家之间,还是需要真实的黄金和白银。每个经济实体都需要贮存一定数量的货币。

3.3.7 从货币到资本

资本主义生产方式需要几个要素,首先是生产力发展到一定水平。在 15 世纪到 16 世纪,经过血腥的掠夺和积累,资本家阶级形成。同时要有自由工人,自由工人的含义是首先他自己没有办法自己生产什么东西,做生意没有本钱,种地没有土地,办厂没有生产资料,即使他可以自己生产,生产出来的产品在市场上也没有竞争性,私人劳动不能社会化。一句话,工人除了打工(帮资本家干活)外没有别的出路,整个社会必须通过国家机器让工人无路可走,只有帮资本家干活才是“正道”。这在西方资本主义形成时期是有很多历史材料佐证的。另一方面,自由的含义是工人有人身的自由,对于自己的劳动力是有所有权的,出卖的只是劳动力的使用权。而且即便是这种使用权的出让也是在某一时段,而不是终身出让。终身出让,工人就变成了奴隶。自由的另一层含义是虽然工人几乎没有不为资本家阶级干活的自由,但工人有选择为这个资本家干活而不为那个资本家干活的自由。同样,为了使资本家统治下的私人劳动社会化,国家有法律和意识形态支持下的配套措施。比如资本家有生产什么产品的自由,有在市场上招聘工人的自由,有解聘工人的自由等。当然最为重要的是要让资本主义的生产关系合法化,也就是工人只拿工资,赚钱多少都归资本家所有。也就是资本主义私人所有制的合法性要有保证。比如在新中国成

立后的某个时期，私人办厂就是不允许的。我大伯是个木匠，带几个徒弟挣点钱都会受到公社书记大会小会的批评。粉碎“四人帮”以后才允许私人办厂，雇工人劳动。记得当时我大伯有个徒弟是地主家庭出身，还奉劝我大伯不要办厂，怕哪天再被打成地主或资本家，没收财产不说，还有可能被枪毙。资本家就是有钱人，用钱赚钱的人。比如我大伯，开始做桌子卖，后来做棺材卖，做桌子或棺材（使用价值）不是他的目的，赚钱才是他的目的。采用马克思在《资本论》中举的例子，一天投入 100 元，产出 110 元，净赚 10 元，再将这 110 元投入，第 2 天产出 121 元，……一年下来该是多少钱。在马克思《资本论》第一卷第 178 页上有更精彩的叙述（前面的叙述只是为了大家更好地理解马克思的话做的铺垫）：“简单商品流通——为买而卖——是达到流通以外的最终目的，占有使用价值，满足需要的手段。相反，作为资本的货币，流通本身就是目的，因为只是在这个不断更新的运动中才有价值的增值。因此，资本的运动是没有限度的”。

“作为这一运动的有意识的承担者，货币占用者变成了资本家。他这个人，或不如说他的钱袋，是货币的出发点和复归点。这种流通的客观内容——价值增值——是他的主观的目的；只有在越来越多的占有抽象财富成为他的活动的唯一动机时，他才作为资本家或作为人格化的，有意志和意识的资本执行职能。因此，决不能把使用价值看作资本家的直接目的，他的目的也不是取得一次利润，而只是谋取利润的无休止运动。这种绝对的致富欲，这种价值追逐狂，是资本家和货币贮藏者所共有的，不过货币贮藏者是发狂的资本家，资本家是理智的货币贮藏者。货币贮藏者通过竭力把货币从流通中拯救出来所谋求的无休止的价值增值，为更加精明的资本家通过不断地把货币重新投入流通而实现了。”

对这两段话的把握要注意两点，一是使用价值作为价值的物质承担者，也很重要，比如我大伯能在改革开放之初办木器加工厂，是因为他在新中国成立前就是木匠，为地主干过很多活，从地主那里学到了一些贫下中农不知道的“经商”之道。他的桌子做得不错的同时，他的私人劳动如何社会化，也比较精通。也就是说把握好几个环节，哪里买便宜又好的木材，怎样管理好下面的徒子徒孙，怎样销售，怎样与管理部门打交道等。二是在不断更新的运动中谋求无休止的价值增值，这只是资本家的主观愿望，在现实上是受限制的。资本家之间也是有等级的，有的人一辈子都是小资本家，只有越来越少的人才能越做越大，有点类似学术圈的象牙塔。估计资本达到一定的数量，运行模式和增值模式就会改变。我很小的时候，我大伯就给我讲过，要本大才可能利大，小本生意往往赚不了多少钱，因为谁都可以做的生意，门槛太低，赚钱很少。这也就是资本市场上的量变质变规律。马克思这里的论述是本质抽象[12,13]。

资本家赚钱何以可能？马克思举了个非常形象的例子。比如蒸馒头，先要用面粉加上水搅拌成不稀不干的面，但这样蒸出来的馒头比较死，块头也不够大。比较好的是加进酵母，过一段时间和好的面的体积就会膨胀，蒸出来的馒头也会更好吃些。体积的膨胀象征着资本主义生产过程中的价值增值，蒸出来的馒头更好吃，象征着通过工人的劳动使死劳动（生产资料）的价值转移到新产品中，不仅保值，而且作为使用价值更能满足消费者的需要，从而有利于以资本家为代表（资本家统治下）的私人劳动社会化。这是从物的层面看见的现象，更本质的是资本家以表面平等的交换买来了事实上不平等的对劳动力的支配权，这是更为基本的。所以马克思把在劳动过程中显示出的两个特殊现象，将对劳动力的支配权摆在第一，将对产品的所有权摆在第二。因为没有对劳动力的全天支配权，工人

干一会儿就不干了,资本家仍然是没法赚钱的。在《资本论》中马克思假设劳动力作为商品,是以生产劳动力这种特殊商品的劳动来计算其价值的,包括工人的衣食住行玩,包括工人的子女养育和教育费用等。这里面包括两个时间尺度,在微观尺度上,劳动力要能劳动,要以活着的个人面貌出现,就必须给它提供必要的生活资料。在宏观尺度上,劳动力所有者也是终有一死者,要让劳动力市场上始终有劳动力的出卖者以维持资本主义的生产方式,还必须允许工人繁殖后代以维持劳动人口的再生产。所以再生产劳动力所必要的生活资料还应包括工人的补充者即工人子女的生活资料。因此生产劳动力的必要劳动时间,也就归结为生产这两部分生活资料的必要劳动时间。换句话说,劳动力的价值就是维护劳动力占有者所必要的生活资料的价值。什么是必要的生活资料的价值,是一个历史的和道德的要素。各个国家、各个时期必要的标准是不一样的。本质上与生产关系有关。劳动力的价值,也就是劳动力一天的维护费和劳动力一天的耗费,也就是物化在产品中的价值。劳动力一天的维持费决定劳动力的交换价值(也就是资本家支付的劳动力成本),劳动力一天的耗费构成劳动力一天的使用价值。因此,劳动力的价值也就是劳动力一天的维持费和劳动力在一天劳动过程中的价值增值是两个不同的量。资本家以他内行的狡黠,早就看中了这个价值差额。归根到底还是资本家有权力让工人多干几小时的活,并且是资本主义国家许可的,因为不允许不行。允许有利于国际竞争,与生产力水平相适应。按资本论的例子,维持一个工人 24 小时的生活(包括前面提到的两部分生活资料)只需半个工作日(6 个小时),但资本家却可以让工人劳动一整天(12 个小时)。因此在资本主义制度下,"劳动力维护一天只费半个工作日,而劳动力却能发挥作用或劳动一整天。因此,劳动力使用一天创造的价值比劳动自身一天的价值大一倍。这种情况对买者是一种特别的幸运,对卖者也绝不是不公平。"(《资本论》第一卷第 226 页)应该讲这是交换过程中的公平和生产过程中的不公平。因为一旦进入生产过程,资本家为工人准备的不是劳动 6 小时的生产资料,而是劳动 12 小时的生产资料。前 6 个小时的劳动是有工资的,后 6 个小时的劳动其实是没有工资的,资本家的货币就这样转化成了资本。所以劳动力成为商品,是资本主义生产方式的根本所在。劳动力这种商品在资本主义制度下具有独特的使用价值,它不仅是价值的源泉,而且是剩余价值的源泉。以上我们从人与人之间的权力关系看穿了资本主义生产方式,资本家剥削工人的秘密和本质。现在再从物的层面再看一看资本家是怎样用活劳动这一酵母蒸出越来越大的越来越好吃的馒头的。马克思写道:

"其次,产品是资本家的所有物,而不是直接生产者工人的所有物。资本家例如支付劳动力一天的价值,于是,在这一天内,劳动力就像出租一天的任何其他商品(例如一匹马)一样,归资本家使用。商品由它的买者使用;劳动力的占有者提供他的劳动,实际上只是提供他已卖出的使用价值。从他进入资本家的工场时起,他的劳动力的使用价值,即劳动力的使用,劳动就属于资本家了。资本家购买了劳动力,就把劳动本身当做活的酵母,并入同样属于他的各种形成产品的死的要素。从资本家的观点看来,劳动过程只是消费他所购买的劳动力商品,而他只有把生产资料加到劳动力上才能消费劳动力。劳动过程是资本家购买的各种物之间的过程,是归他所有的各种物之间的过程,因此,这个过程的产品归它所有,已像他的酒窖内处于发酵过程的产品归他所有一样。"(《资本论》第一卷第 216 页)

3.3.8　从资本到虚拟资本

前面几节从微观的资本主义生产过程展示了剩余价值的生产。这一节的论题太大了，包括了全球一体化的全球经济。但马克思的劳动力价值学说在本质规律的层面还是对的[9,12,13]。无论资本家怎么游戏，肯定也不会放松对劳动人民的管理。资本家集团还是会牢牢地抓住和控制生产领域，尽可能节约成本。将生产放在发展中国家来搞，以降低劳动力成本、环境保护成本，形成了虚拟经济与实体经济的矛盾。

本节的简要叙述取材于文献[9]。20世纪70年代以后，维护了几十年之久的凯恩斯主义经济政策开始失灵。在资本主义国家新自由主义重新抬头，上演了一出中国戏剧中的你方唱罢我登场。由于“滞胀”危机终于在20世纪70年代的美国，80－90年代的日本发生[9]，也由于与之伴随的福利国家财政赤字的不断增长，为了避免政府债务危机，盘活一部分生产要素退出市场而形成过剩的生产力，只有增大现金流量来进行资本扩张。办法就是发行证券。这种“第一代虚拟资本”在马克思的时代就有了，在《资本论》第三卷也已提到，主要是将实体资本与实体资本对未来剩余价值的分割权利相分离。这是“传统的金融工具”[9]，实体资产通过虚拟化而成为金融资产，对金融资产（已经虚拟化的）再度虚拟化。由此产生了“第二代虚拟资本”，简称“金融衍生工具”。

第一代虚拟资本的典型形式是企业股票，股票不能生产剩余价值，只是分割剩余价值[9]。

第二代虚拟资本的典型形式是将已发放的住房贷款再证券化，创造出债权抵押证券，出售给社会大众。从而集中大众资本，让金融寡头进一步的投资和投机用[9]。老百姓的血汗钱就成了垄断资本支配、使用和分割的“货币材料”，而不在具有资本性，更不可能人人都是老板[9]。

金融资本的本质，从经济学上看就是用别人的钱分钱，用巨额资本优势吸纳几十倍于这一巨额资本的大众资本，是典型的大鱼吃小鱼的游戏规则。这就是本大才能利大的道理。比如大家都知道发行信用卡能赚钱，开银行也可以赚钱，但在美国，肯定也不是人人都可以发行信用卡，人人都可以开银行的。必须只有少数大资本家才可以做。茅盾的小说《子夜》里就写了小资本家三先生要想与大资本家赵伯韬在资本市场上抗衡，最后还是大资本家获胜。日本电影《华丽的家族》也讲述了大规模企业并购中小企业，谋取超额剩余价值的故事。文献[9]总结了以下五种社会力量参与剩余价值的分割[9]：生产要素对剩余价值的分割、社会总生产资本结构对剩余价值的分割、自然资源所有权人对剩余价值的分割、商业资本与货币信贷资本对剩余价值的分割、跨国垄断资本对剩余价值的分割。其实各种政治力量、军事力量、文化力量、宗教力量都要参与剩余价值的分割。作为第一大贸易的毒品交易和第二大贸易的军火交易必然也要参与全球剩余价值的分割。美国巨额的军费开支和庞大的军火工业体系当然也会参与全球剩余价值的分割。

3.4　法哲学基本概念

在进一步讨论本章主题之前，不得不停下来理清一些基本概念，因为这些概念对后面的讨论很重要。这些概念虽然在前面的论述中已经提到，但没有系统的阐述。另一方面，

这些概念在前面的出现，也可以认为是为本节的讨论提供了感性认识，从渗透式学习的角度来看[3]，这也是一种有效的学习方法。

提到法哲学三个字，首先想起黑格尔的《法哲学原理》[17,18]以及马克思的早期著作《黑格尔法哲学批判》导言[19]。新近的著作有张盾等的《黑格尔与马克思政治哲学六论》[20]和文正帮的《马克思主义法哲学在中国》[21]，基本概念主要摘录于文献[21]和国内其他著作。

按黑格尔的说法，如果物质、精神二分世界的话，法本身是一种人为的创制，不是自然的物质。说得稍微准确一点，在阶级社会中任何一种法都是由统治阶级制定和颁布，统治阶级执行，统治阶级修改，统治阶级解释的刚性规范，具有很强的强制性，所以法从根本上代表统治阶级的利益、思想和意志。如果你不属于某一个社会的统治阶级，或者在这件事情上(在这里)你不属于统治阶级，什么是法就是你需要反复思考的问题。这段话算是对凯尔森的所谓纯粹法学的反动。根本没有纯粹理性，康德所谓纯粹理性批判从根本上就是伪命题。理性都是有阶级性的。这可以从哥德尔不完备性定理来证明。

“纯粹法学理论的核心范畴实际上是要将道德和政治问题从法哲学的问题领域彻底驱逐出去，而在法律规范内部从事一种纯技术性的活动。列奥·施特劳斯将这种活动所包含的观念称为‘现代性的浪潮’。这场‘凭借人类的手段在尘世建立天国’的观念运动，为我们今天的法哲学提供了影响广泛但却远非稳固的根据。”[21]37

“纯粹法学创始人凯尔森断定：马克思的‘社会现实的经济解释’及其法哲学是不成功的，它至今仍旧能发挥出如此重大的影响力不得不被看做是一件怪事。因为凯尔森认为，法律应当是独立自存和逻辑严密的规范体系。法律的基本问题乃是法律规范体系的效力与层级问题，而非所谓的社会关系与政治权力的经济结构问题。”[21]36

从以上引文也看出法学，特别是法哲学是人类社会中人与人之间的事情，有很强的主体间性特征。既然现当代哲学有一种实证主义的思潮，凯尔森之类希望法哲学的客观性、实证性也是不奇怪的。应该说是有一定合理成分的，这是与资本的物化逻辑一致的。既然法哲学是关于人类社会中人与人之间的事情，人权就是法哲学的第一基本概念。“列宁说得好：‘什么是宪法？宪法就是一张写着人民权力的纸。’人民权力的最基本、最普遍、最一般、最广泛的存在形态就是人权。”[21]101“2004 年 3 月 14 日十届全国人大二次会议对我国现行宪法进行的第四次修改，明确了‘国家尊重和保障人权’。”[21]87因此中国的宪法也成了人权的宣言书和保障书。

“人权是公民权构成的基础和源泉，公民权是由人权所派生，是它的重要的政治法律表现。公民权的初始形态和萌芽阶段便是人权，所以资产阶级启蒙思想家把它视为‘天赋人权’，并被 1776 年美国的《独立宣言》(其基本内容后来以‘权利法案’的形式载入美国宪法)和 1789 年法国的《人权宣言》(后来以‘序言’的形式载入法国宪法)给予了最高的法律确认。随着近代资产阶级民族国家的巩固和发展，宪法对人权的确认和保障的方式就发展成一方面直接宣布确认和保障人权，另一方面又通过对本国之内具有本国国籍的全体成员即公民‘基本权利’的确认和规定，使基本人权的内容和范围具体化。因为公民权更趋向于参加公共政治生活的人们的共同权利。所以马克思指出：‘权利的最一般形式即人权’，‘这种人权一部分是政治权利，只有同别人一起才能行使的权利。这种权利的内容就是参加这个共同体，而且是参加政治共同体，参加国家。这些权利属于政治自由的范畴，属于公民权利的范畴。’”[21]100马克思本人是法学博士，读者可从马克思的这段话中推导

出经济权利是人权的一部分。

"所谓权利，实际上就是特定主体享有的、通过自由行为行使的、法律所保护的正当利益，它体现着作为社会化了的人的自主性和主体地位。"这是文献[21]在第88页中给出的权利定义。

所谓"权力是权利的纵向衍生，是集中化、强烈化、公共权威化了的权利，尤其是在现代民主制国家就更为明显——公民权利是国家权力的基础和来源，一切公共权力都是由公民权利派生和转化而来的，而权利之表现为或转化为权力，乃是基于从平等主体之间的平位关系转化为以不对等主体存在为前提的上位关系所致，从而形成以自己的意志支配他人意志和行为并使之服从于自己，这就是权力。"[21]88

所谓"义务是权利的横向衍生，是权利的一种特殊形态，是对象化了的权利，是平等主体之间地位和内容发生了转化的权利，法律上不存在为义务而义务，义务的实在内容、设定义务的目标指向仍然是一定的权利和利益。"[21]88

权力有三种存在方式[21]，包括应有权利、法定权利和实有权利。应有权力也称为自在的权利、道德的权利、习惯权利或已有的权利。指特定时代生活在特定社会中的人们的利益和需要的自发反映和合理的权利要求。法定权利是自为的权利[21]，是对人们的利益和需要的自觉认识和概括，是通过立法确认和规定了的权利。法定权利包括利益、待业自由、资格(权利能力和行为能力)三要素。实有权利是自在自为的权利[21]，是公民权利和人民利益的实现和完成。借助于法律的实施和实现，法律调整机制的完成，人们对相应义务的确定承担和合法权利和权益的真正享有[21]。

"公法与私法的划分是大陆法系的一个传统，它对于中国也有重要的意义。这不仅是因为中国自清末开始至民国模仿德国和日本的法律，自1949年之后则模仿苏联的法律，这三者无一不是大陆法系的分支，只不过接近程度有所差异；而且中国一直以来家国一体，因此，公私不分，以至私人领域被独断的权力所侵犯，而公法与私法的划分可以在公私领域之间明确界限以限制公权利保障私权力。在现代国家，公权力的强大是任何个人无法抵御的，而其倾向于滥用的特征更是使得公民权力处于一定的危险之中，所以唯有通过公法及其理论和实践的构建，以便对权力进行有效的规制和约束，才能遏制权力的滥用和腐败，保障公民的权利。"[21]69

这段话说得很符合实际，"文化大革命"中国家主席刘少奇也无法抵御公权力的强大，含冤而死；更不要说像傅雷、翦伯赞这样的高级知识分子。另外从很多古装戏中，也可以看出后宫干政，家国一体的现实。

法律是非常复杂的，我儿子的一个同学在加拿大多伦多大学法学院学法学，我看了一下他书架上的书，单是加拿大宪法的解释，就是厚厚的两大本，几千页。很多中国人认为西方法制社会很好，其实法制社会也有不好。比如任何事情在加拿大，一旦找律师，律师就开始按多少钱一分钟收费，根本不管能不能解决问题。很多时候按程序，等你走完程序，可能上万的加币就没了。最典型的是狄更斯小说中写的贾提斯控贾提斯案，官司打了很久，为了财产，结果打完官司还剩2元钱，这种官司打来打去到底有什么意义？当然肥了律师、法官什么的，是另外一回事。我有一个朋友，重庆人，明显就被一个懂加拿大法律的人害了，想通过打官司出口气，找律师打官司，花了好几万加币，什么气也没有出而不了了之。所以法律这东西，老百姓还是敬而远之的好。穷人是打不起官司的，法律成了一纸空文。

公法的主要范畴与前面讲的权利、权力、义务有关。一个主要矛盾是权利与权力的矛盾,另一个主要矛盾是权利与义务的矛盾。落实到公法领域就是国家权力与公民权利的关系和矛盾;行政主体的职权(权利)和行政主体的职责(义务)的关系和矛盾。"即行政主体在享有和行使行政职权的同时所依法必须忠实履行的特定义务,而职权和职责必须相对应和相统一,即'权责一致'的原则,就是'法律面前人人平等'和'权利义务对应一致'原则,在公法领域的表现。"[21]80

而国家权力与公民权利关系和矛盾就是国家机关的职权与职责与每个公民、每个法人、每个集体、每个集团的权利与义务的相互关系和矛盾。"由此可见,作为公法典型形态的宪法和行政法之所以必要和重要,就是因为它们是专门规范和制约国家权利,以保障公民权利为根本宗旨,从而解决公民权利与国家权力的关系这一公法基本矛盾的法律而产生和存在的,不仅如此,宪法及行政法的重要价值和意义就在于,它不满足和停留于作为私法的民商法主要在于规制市民社会中普通公民的权力与义务关系,进而把国家权力也纳入法律规制的对象和范围,即对国家权力也进行法学分解,分解为职权和职责的关系这一公权力的内在矛盾,或者说还原为法的最基本矛盾关系即权利与义务关系。因为如上所述职权也可以说就是一种公共权利,即国家机关依法享有和行使的特定权利,职责也可以说是一种公共义务,即国家机关在享有行使其职权的同时所依法必须忠实履行的特定义务,从而通过职权与职责的辩证关系和矛盾运动,有效地规范和制约国家权力,保障公民权利。"[21]83

公民的公法权利包括宪法、行政法、刑法、诉讼法等所规定和保护的公民权利[21]。公民的私法权利包括由民商法等所规定和保护的公民权利。私法领域的法律主要将权利与义务的关系落到实处[21]。国家权力虽然一般不干预私法领域的权力与义务关系,但很多私法领域的问题的解决也离不开公法。

现代所谓民主国家拥有立法权、司法权、执法权,按照本书的完备二元论还缺少一个使这三种权力无化的罢免权,这种罢免在美国体现在四年一次的总统选举中,由每一张选票决定。当年布什与哥尔的选票就十分接近。也可以由最高法院对包括总统在内的官员进行弹劾,当年美国总统克林顿就遭遇到最高法院的判决,理论上美国的最高权力在最高法院的七个法官手中。当然,美国作为资本主义国家,无论议会、总统还是最高法院实际上都掌握在资本家手中。选民投票只是一个现象,任何一个权力部门如果从根本上违背了资产阶级的利益,都是会短命的。总统只是打工的,资本家才是老板。

马克思写的《黑格尔法哲学批判》导言,收录在文献[19]第1页到第16页,是一篇写得很好的文章,不仅道理十分深刻,而且文采飞扬,摘录前面几段如下:

"就德国来说,对宗教的批判基本上已经结束,而对宗教的批判是其他一切批判的前提。

谬误在天国为神祇所做的雄辩一经驳倒,它在人间的存在就声誉扫地了。一个人,如果想在天国这一幻想的现实性中寻找超人,而找到的只是他自己的反映,他就再也不想在他正在寻找和应当寻找自己的真正现实性的地方,只去寻找他自身的映像,只去寻找非人了。

反宗教的批判的根据是,人创造了宗教,而不是宗教创造人。就是说,宗教是还没有获得自身或已经再度丧失自身的人的自我意识和自我感觉。但是,人不是抽象的蛰居于

世界之外的存在物。人就是人的世界，就是国家、社会。这个国家、这个社会产生了宗教，一种颠倒的世界意识，因为他们就是颠倒的世界。宗教是这个世界的总理论，是它的包罗万象的纲要，它的具有通俗形式的逻辑，它的唯灵论的荣誉问题，它的狂热。它的道德约束，它的庄严补充，它供以求得慰藉和辩护的总根据，宗教是人的本质在幻想中的实现，因为人的本质不具有真正的现实性。因此，反宗教的斗争间接地就是反对以宗教为精神抚慰的那个世界的斗争。

宗教里的苦难既是现实的苦难的表现，又是对这种现实的苦难的抗议。宗教是被压迫生灵的叹息，是无情世界的心境，正像它是无精神活力的制度的精神一样。宗教是人民的鸦片。

废除作为人民的虚幻幸福的宗教，就是要求人民的现实幸福。要求抛弃关于人民处境的幻觉，就是要求抛弃那需要幻觉的处境。因此，对宗教的批判就是对苦难尘世——宗教是它的神圣光环——的批判的胚芽。

这种批判撕碎锁链上那些虚构的花朵，不是要人依旧戴上没有幻想没有慰藉的锁链，而是要人扔掉它，采摘新鲜的花朵。对宗教的批判使人不抱幻想，使人能够作为不抱幻想而且有理智的人来思考，来行动，来建立自己的现实，使他能够围绕着自身和自己现实的太阳转动。宗教只是虚幻的太阳，当人没有围绕自身转动的时候，它总是围绕着人转动。

因此，真理的彼岸世界消失以后，历史的任务就是确定此岸世界的真理。人的自我异化的神圣形象被揭穿以后，揭露具有非神圣形象的自我异化，就成了为历史服务的哲学的迫切任务。于是，对天国的批判变成对尘世的批判，对宗教的批判变成对法的批判，对神学的批判变成对政治的批判。”

马克思的这几段话往往分别引用在不同的文献中，这里集中引用的目的，除了前面提到的文采飞扬和道理深刻外，作者觉得现实的针对性仍然很强。在这里马克思讲了，不能简单地反对宗教。“宗教里的苦难既是现实的苦难的表现，又是对这种现实的苦难的抗议。”比如西方国家很多人上教堂，在教会里，在上帝面前人人平等，在虚幻的上帝面前人人平等正是对现实的人与人不平等的抗议。“废除作为人民的虚幻幸福的宗教就是要求人民的现实幸福”，这是马克思为人民指出的追求现实幸福的正确道路。所以马克思即使在青年时代都很关心人民的幸福和苦难。马克思通过法哲学的研究，逐步转入政治经济学的研究，从资本主义的生产方式中为广大工人阶级找到了为什么受压迫和受剥削的根本原因，从而提出了消灭私有制的战略目标，提出了共产主义远大理想。在长篇引文的末尾，马克思提出了法的批判和政治的批判。

马克思所谓法的批判，归根到底就是要证伪资产阶级法权。表面上看[20]，德国古典哲学家们都在谈论着自由，有的在公法领域谈自由(如康德)，有的在私法领域谈自由(如黑格尔)，其实都在谈财产权问题，因为财产是自由的最初定在，自由只是在所有权中才能成为客观的[20]。

马克思所谓政治的批判，归根到底就是要推翻资产阶级的统治，实行无产阶级专政，彻底改变压迫人、剥削人的制度。

在即将结束法哲学的讨论之前，引用文献[10]第 249 页上的两段话，以支持本节开始时的断言：

“法律的实质则是统治阶级共同意志的表现,它是统治阶级推行和实施政治措施的工具。”

这说明统治阶级四个字还是可以用的。

“法律是以规定人们的权利和义务为基本特征的,这些权利和义务由国家确认并予以保障。当人们在法律上规定的权利受到损害或威胁时,可以请求国家给予保护,以保证自己利益的实现;负有义务的人拒不履行法定义务时,相应的国家机关可以强制其履行。我国春秋战国时期的一些思想家就认识到法律这种‘定纷止争、定分止乱’的作用,即通过规定人们的权利和义务来协调人们的利益关系,维持一定的社会秩序,避免利益纷争造成的混乱。法律既然是国家制定或认可的,它就具有国家意志性。谁掌握国家政权,谁也就掌握了制定法律的权力,因此,法律必须是统治阶级共同意志的体现。”

王伟光还阐述了法律在以下五个方面具有协调社会的利益关系的基本功能[10]250—252:第一,在阶级社会中,确认和协调统治阶级和被统治阶级的利益关系,调整乃至镇压被统治阶级的反抗行动;第二,在阶级社会中,确认和协调统治阶级与其同盟者之间的利益关系;第三,在阶级社会中,确认和协调统治阶级内部的利益关系;第四,利用法律监督公共事物的实施,以维护社会成员的基本权益,这是法律维持共同利益的社会职能;第五,在社会主义社会制度下,阶级对立已经不存在了,社会主义国家的法律起着确认和协调人民内部不同利益主体之间利益关系的主要职能。

3.5　利益场理论

王伟光的《利益论》是我学习利益这个哲学概念的主要参考[10]。这部著作分历史篇、理论篇、现实篇。在此掐头去尾,从中间开始,在叙述理论篇的同时,顺带夹叙夹议,抛出本书的利益场理论。因为只有在这种比较和对照中,才方便以较短的篇幅,既考虑到读者对基本概念和相关背景知识的不足,又不至于像教科书一样做到完全的自足性。这部著作还有五篇重要的论文作为补遗,分别是:补遗一,讨论社会主义国家的社会危机问题;补遗二,关于新形势下人民内部矛盾问题;补遗三,正视差距,重视差距,选择协调均衡发展战略,推进中西部发展,逐步缩小地区差距;补遗四,正确处理人民内部矛盾,妥善协调各方利益关系,构建社会主义和谐社会;补遗五,运用马克思主义立场、观点和方法,科学认识美国金融危机的本质和原因。其实补遗中的五篇文章都很重要,是比现实篇还要现实的一些重要问题。历史篇写得也很精炼,但信息量很大,有兴趣者可以阅读原著。

《资本论》作为马克思写了四十年的最主要的政治经济学著作和哲学著作,历来评价非常高。但《资本论》有没有写得不够好的地方呢? 在学术界也有人提出了批评和改进意见。比如晏智杰认为[22]13,马克思对使用价值从总体来看持一种排拒态度,其政治经济学研究的对象是生产关系和剩余价值,而不是生产力和使用价值,使用价值被排除在研究的范围以外,缺乏应有的位置和作用,这成为马克思劳动价值论和以此为基石构建的马克思主义政治经济学理论大厦的致命缺陷。关于使用价值的地位和作用,牛变秀和王峰明对上述批评做出了以下回应[12]29—32:第一,作为使用价值的使用价值,不是马克思《资本论》的研究对象,当且仅当使用价值承载一定的作为权力的生产关系的时候,才具有“经济的”意义。第二,同形式规定有关的使用价值,则是政治经济学的研究对象。其一,使用价值

为形式关系所改变，由此和形式规定发生联系，比如商品的使用价值；其二，使用价值改变了形式关系，由此同形式规定发生联系，例如资本既是“雇佣劳动”这种生产关系的载体，又可以有不变资本与可变资本、死劳动与活劳动的区分。第三，一些特殊的使用价值本身就是政治经济学研究的对象，比如金银为什么适合做货币。

基于上述三点辩护，文献[12]认为马克思主义政治经济学不重视或排除了使用价值的地位和作用，是不符合文本事实的。我认为，至少《资本论》对价值的论述、对生产关系的论述是比对使用价值的论述和对生产力的论述要详尽和深入得多的。好在资产阶级经济学家有相关的详细论述，哲学家中海德格尔对意义关联整体（仅仅由使用价值承载的，而基本上与价值无关的）的研究、鲍得里亚关于物体系的研究、海德格尔关于物的追问都可以看做是马克思《资本论》的补充。即将仔细回顾的《利益论》将比《资本论》更加重视使用价值和交换价值，但基调还是继承了马克思重视生产关系的传统，在此特别交代在先。

王伟光的《利益论》[10]理论篇共八章，也就是原著中的第三章到第十章，先逐章摘录与利益场理论有关的内容，同时写出简要评注，再比较自然地引出并展开本书的利益场理论。

文献[10]第三章讲需要。人类社会需要总量是使用价值的尺度。将来共产主义按需分配，说明人们需要的社会性，因而需要产生社会关系。从个人来说，需要是每个人的生命表现，什么都不需要了，人也就死了，所以需要与生命共存亡。“没有需要，就没有生产，而消费则把需要再生产出来。”生产劳动是满足社会需要的源泉。因为“自然界永远不会满足人，人也永远不会满足自然界。不满足怎么办？不满足就会有生产劳动来创造满足人的需要的使用价值。”“需要是需要主体与他所依赖的需要对象之间的一种关系，是需要主体对这些需要对象感到匮乏。因而需要它们，这表明需要主体与需要客体的主观与客观的矛盾关系。”这可以算是本书选取的关于需要的定义。这里对象与客体两个词语同时出现，对象更广泛一些，对象的存在性可以不做设定。也就是说对象可以是不存在而有意义的东西，只要主体想到的有意义的东西就可以称之为对象，对象更合适于描述精神活动的对象。比如我可以想到神，但神的存在或不存在可以存而不论。客体则对现实性或者说存在性的设定要强一些，这里要区分不存在（beingless）与非存在（non－being）。按照本书中的完备二元论，关系范畴除了主体、对象、关系之外还要加上主体背景、对象背景、关系背景这个空集作为第四元素。粗略地说，前三者已代表实事求是了，加上第四个元素则表示一切从实际出发，实事求是。比如需要，张三说我需要100套住房，李四说我需要一万套住房，但这种需要成为必要需要，或者现实化的需要，得从张三和李四的实际出发，看张三和李四有没有买房子的钱。在这个例子中，住房总是有的，住房也是可以买的，都不是问题，强调从实际出发很重要。同样按本书的体系，关系到底是虚的还是实际的，要看持有的非零时段。比如张三买一百套住房这种需要，哪怕他只一天买了，就是实的；如果一秒钟也没有买过，这种作为关系就是虚的，还有待现实化。需要又可分物质需要、精神需要、政治需要、军事需要、必要需要、生理需要、生存需要、感情需要、婚姻需要、同居需要、情欲需要、结社需要、安全需要、归属需要、尊重需要、认知需要、审美需要、自我现实需要、自然（直接）需要、社会需要、个别需要和一般需要、特殊需要和普遍需要、生产需要和生活需要、现实需要和理想需要、必要需要和奢侈需要等[10]。

文献[10]第四章讨论社会利益与利益范畴。以社会关系为核心，利益范畴有以下四

个构成要素：第一，需要是形成利益的自然基础；第二，社会关系是构成利益的社会基础；第三，社会实践是形成利益的客观基础；第四，人的需要对象是利益形成的主观因素。

这里需要解释的是第四项，因为需要对象中对象两个字引起的复杂性，按文献[10]第76页的进一步解释，何为利益？“利益必须给人以某种方式、某种程度的满足，也就是说，利益的实现必须以需求对象的存在为前提，离开了任何实际的需求对象，哪怕是精神的需求对象，也就无所谓利益了。”因为需求是主观的，同时又涉及精神的需求对象，所以什么是存在什么是不存在，什么是非存在就很有一些歧义性。解决办法仍然是以持存了一段时间为存在，以没有持存一非零时段为不存在，而对精神对象的现实存在性作为非存在看待。也可能现实存在，也可能现实不存在。也就是说对于精神需求的现实存在性存而不论，即使现实上不存在的对象，只要在人的精神需求活动中持存了一段时间，就是文献[10]意义上的存在，也就是从需求对象变成了需求客体。因此理解的需求客体除了物质产品、精神产品外，还要有观念性持存的精神活动中非现实存在的对象。比如听歌，持存33分钟，在内在精神中带来了审美的愉悦，但这种审美的愉悦尚未外化为精神产品，而是听完也就过了，这也是作者理解的需求客体。这种客体并不是记录歌的介质而是听歌者内在心灵的真实情感体验。它只在于听歌者的心中，并不外显，外人不知道。听歌者也并没有将其感受写下来或者说出来。表面上看还是在需求记录歌的介质，实际上介质只是手段，真正需求的是介质中的歌给听歌者带来的审美愉悦。同样，喝酒的人，要的其实不是酒，而是喝酒带来的精神上的持存一个时段。更进一步，毒品也是这个道理。精神现象确实比物质现象复杂一些。

在文献[10]第81页给出了利益的一个较短定义：“所谓利益，就是一定的客观需要对象在满足主体之间进行分配时所形成的一定性质的社会关系的形式。”注意这里强调了利益是主体之间，也就是多个主体之间争夺某一或某一些客体而形成的社会关系。就这么一块蛋糕，你多了，他就少了。有一种所占百分比的性质，或者说相互之间有一种比例关系。而需要更多地是指某一特定主体对某一客体需要的绝对的量，主要不从比例关系，而是从绝对大小上来把握。绝对大小是用欧几里得几何来刻画的，比例关系则是用射影几何来刻画的，射影几何当然比欧几里得几何复杂一些。所以利益比需要复杂，利益是多体问题。

在文献[10]第80页给出了利益的一个较长定义：“利益是需要主体以一定的社会关系为中介，以社会实践为手段，以社会实践成果为基础内容，以主观欲求为形式，以自然生理需求为前提，使需要主体与需要客体之间的矛盾得到克服，使需要主体之间对需要客体获得某种程度的分配，从而使需要主体得到满足。换句话说，利益上对客观需求对象的更高的理性上的意向、追求和认识，是需求在经济关系上的体现，它反映了人与人之间对需求对象的一种经济分配关系。利益在本质上是一种社会关系。从本质上说，利益是关系范畴。总之，从利益的构成要素中反映出这样一个重要问题，利益必须以一定的社会关系，首先是经济关系为中介才能形成。利益虽然是需要主体和需要客体之间矛盾的解决，是对需要对象的一种分配，但其实都是一定社会关系的体现和反映，成为人与人之间的一种利害关系。”这段话的理解最终落脚点是利益，是人与人之间的一种利害关系。前面已经说过，就这么一块蛋糕，你多了，他就少了，所以构成利害关系，对你有利，对别人则有害。利益也可以看成人们争取利益的活动，实际上是一场博弈。利益首先是物质的、实物

的，是物质生产的产物。作为人与人之间的关系，首先也是物质的关系、经济的关系，然后才是思想的关系、政治的关系、伦理的关系。利益的得与失是一个可正可负的问题，利益的多少是个数量的问题。

“需要与利益既一致又有区别，需要本身不是利益，不能把需要和利益混为一谈。需要是人的生命活动的表现，是人作为需求主体对需求对象的需求和满足，反映了作为需求主体对需求对象，即人维持生命的物质生活条件和精神生活条件的直接依赖关系。而利益则是在需要基础上形成的，是人对需要的兴趣、认识、追求、分配和满足，反映了人与人之间对需求对象的分配关系，社会关系。”[10]

文献[10]重点论述了个别利益、特殊利益、一般利益、共同利益、个人利益、群体利益、社会整体利益、阶级利益、民族利益、国家利益、物质利益、精神利益、经济利益、政治利益等，还顺带提及了家庭利益、企业利益、单位利益、地区利益、阶层利益、长远利益、眼前利益、根本利益、暂时利益、将来利益、既得利益、现实利益、理想利益等。文献[10]第 85 页特别提到“列宁对阶级下了一个完整的定义：所谓阶级，就是这样一些集团，这些集团在历史上一定的社会生产体系中所处的地位不同，同生产资料的关系(这种关系大部分是在法律上明文规定了的)不同，因而取得归自己支配的那份社会财富的方式和多寡也不同。所谓阶级，就是这样一些集团，由于他们在一定社会经济结构中所处的地位不同，其中一个集团占有另一个集团的劳动。”

文献[10]第五章讲利益主体与利益客体，因为前面已对利益客体做过详细讨论，唯一值得讨论的是利益主体的六个类别：个人、家庭、集体、集团、国家、人类社会。关于集团不必像文献[10]限于某个国家以内，经济上有很多跨国集团；政治上按列宁的定义，比如无产阶级、资产阶级作为集团是完全可以跨国的，这也是本书以列宁的阶级定义来说事的原因。列宁的阶级定义其实是用集团来定义的。另外，集体中的一个典型就是民族。如果将家庭、集体、集团、国家这几个群体按本书人类学的划分称为类群，那么利益主体的纵向关系就是个人、类群、人类社会三级。横向关系就是个人与个人之间、类群与类群之间、个人与类群之间、个人与人类之间、类群与人类之间、个人与类群与人类之间六种横向关系。按照本书的完备三元论，利益主体、利益客体(非常类似于需求客体，主要差别是利益客体对应着多个利益主体)、利益主体与利益客体的关系，还有空集或者说利益主体的背景、利益客体的背景、利益关系的背景(时间、空间、自然、社会等)共四个元素，到底关系怎么坐实还是以持存了一段非零的时间区间来定义[23]。这里有必要提及这里的主客关系，实际上多个主体同时作用于一个客体，这个问题曾由任平详细讨论过[24]，因为不及本书即将给出的场论解释，所以这里不准备介绍文献[24]中费力的构建。好在本书早就申明，本书所提的关系并不限于两体之间的关系，也可以推广到多体之间的关系。关系可实(作为第三个元素)也可以虚(作为第四个元素)，到底是实还是虚取决于时间。换句话说关系实在是一个可以有条件成立的结论，比如地球绕太阳转动的自旋为 2 作为一个结论，就以时间区间为一年或至少半年为条件[2]。时间区间与时段在本书中不加区分地使用，时段通常意味着非零时段。

文献[10]第六章讨论利益个体和利益群体，因为本书的体系将人类群体称为类群，而利益群体当然是指人类利益群体。所以以下讨论利益个体和利益类群，以突显利益的主体是人，而不是一般的动物群体，这似乎有少许的好处。利益个体是指单个人独立存在的

利益主体。加上讨论总是在某一时段内的讨论,所以认为利益个体除了文献[10]提到的单独性、个别性、具体性、差异性、社会依赖性之外,还应加上稳定性,因为每个人都有相对稳定的人格、有限性或者说有死性、信息性(人是一种未完成的存在,在每个人没死之前都是还有一些不确定性有待排除),其实还有贪婪性。面对利益客体,利益主体往往显示出贪婪性,比如张三想要 100 套住房,李四更想要 10000 套住房,这是故意举出显示个人贪婪性的例子,只是由于空集的限制,每个人还不得不从实际出发,要个一两套住房就行了。

利益类群是比阶级宽泛得多的概念。一个人可以属于多个类群,很多类群都有一个内在的灵魂把类群中的成员凝聚在一起,而这种内在的灵魂归根结底还是物质利益。利益类群的多样性,是由于利益的多样性造成的,在利益多样性的基础上又产生利益类群的多元性,世人本来就形形色色,由多样性、多元性必然产生矛盾性。

在文献[10]第 117 页,王伟光写道:"在我国的现实社会中,由于其内部在经济上、政治上、思想上,还带有旧社会遗留下来的残余,其外部存在反社会主义势力在经济、政治、思想、文化上的影响和破坏,这不仅会使社会主义现阶段存在一定数量的敌我矛盾,而且还会使人民内部存在某些个别的对抗性矛盾。比如,在经济上就存在着私营企业主和雇工之间的剥削和被剥削的根本对立的矛盾现象。"王伟光在文献[10]第 120 页写下的这段话也是理解政治哲学关键概念——利益集团的准绳:"任何利益集团首先是经济利益集团或受经济利益集团支持的,其次才是政治利益集团,任何政治集团背后总是隐藏着一定的经济利益,任何政治权力集团总是受一定经济利益集团支配的,是为实现经济利益集团的经济利益而从事政治活动的。"记得很多年前在日本九州大学发生了留学生学生会干部改选的事情,这本是大家并不怎么关心的小事情。但那天我刚好在留学生中心下围棋,上一届学生会主席在那里和我交谈了很久,感慨没有真正的群众组织,就连留学生学生会都是有人在背后支持的。这一事情给我留下了很深印象,今天看王伟光写的这段话才更深刻地感觉到它的真实存在性。

文献[10]第 180 页写道:在生产过程中,人与人之间所发生的关系就是生产关系,人与自然所发生的关系就是生产力。生产力与生产关系的矛盾统一构成了社会生产方式,即人们对生活资料的谋取方式。生产力决定生产关系,生产力和生产关系的矛盾运动推动生产方式的发展和变动,社会由此向前发展。生产力是全部社会的前提、基础和动力。先给出几个基本概念的定义,否则就没法理解文献[10]第六章第五节的经济分析、阶级分析和利益分析。

以上术语的定义当然可以挑出一些毛病,但以前政治教科书就是这样写的,所以本书采纳这一"教科书体系"的老定义。同样对生产关系,文献[10]第六章第 133 页的定义是:"人们在生产过程中结成的社会关系就是生产关系,生产关系就是人们的经济关系,它从本质上来说是一种物质的关系,生产关系包括生产资料所有制关系、人们在社会生产中的地位作用和相互联系、劳动产品的分配关系这三个方面,这三个方面又贯穿于人类社会生产、交换、分配和消费四个环节。在这里,所有制关系是生产关系中的主要内容,它是判断社会性质和社会进步的直接标准"。

前面提到《资本论》对生产力重视不够,这一点已被列宁、邓小平补充。列宁指出:"只有把社会关系归结于生产关系,把生产关系归结于生产力水平,才能有可靠的根据把社会形态的发展看作自然历史过程。"[10] 文献[9]第 208 页指出:"资源的所有权只是对资源所

有者的法律规定,它必须通过使用过程才能实现。对资源的支配权、使用权以及其生产出的利益的享用权——我们可以合称为'所用权',所有权的最重要的实现形式。完整的所有权是法律规定的所有权与实际的所用权有机结合。""所有"只是手段,"所用"才是目的。而社会资源究竟为谁所用,既取决于社会生产力对资源的利用能力,更取决于社会的主体力量结构。在社会主义革命时期,失去生产资料的无产阶级理所当然地以政治上夺取政权、经济上夺回核心资源的所有权为中心。而当革命取得胜利之后,已经建立了核心资源公有制的无产阶级,应当把社会主义制度建设的重心转移到资源的"公有制"上来,即最大限度地使用一切社会资源,包括公有制和非公有制下的资源,最大限度地为公有(社会)所用。而资源是否"为公所用",主要看由它生产出来的利益,最终"是否有利于发展社会主义社会的生产力,是否有利于增强社会主义国家的综合国力,是否有利于提高人民的生活水平"(《邓小平文选》第三卷第372页)。邓小平理论和党的第三代领导人在社会主义思想建设上伟大的历史性突破,正在于实现了社会主义制度建设重心的这种历史性转移。毫无疑问,邓小平作为改革开放的总设计师起了关键的作用。记得我读初中的时候,"四人帮"批判邓小平的唯生产力论,这也从反面说明邓小平早就重视发展生产力。党的十三大报告是1987年党的十三大召开前写成的,邓小平当时在党内正起着重要的领导核心作用。党的十三大报告明确提出"生产力标准"这个概念,并具体指出:"是否有利于发展生产力,应当成为我们考虑一切问题的出发点和检验一切工作的根本标准。"所谓生产力标准,实际上就是要把是否有利于生产力的发展,作为衡量社会进步和一切工作的根本标准,作为认识和说明社会历史问题的根本方法。运用生产力标准来认识社会历史问题,就必须把生产力看做是衡量一个社会形态的生产关系、上层建筑及其具体体制是否适合的根本标准,把生产力作为鉴定社会的性质、衡量社会发展阶段的特征、评价社会进步的主要标准。把生产力作为评价一个政党的路线、方针、改革、措施及其工作好坏和成败的最高标准。把是否有利于生产力的发展作为判断一个人、一个阶级、一个政党的言行是非的标准。正如王伟光在文献[10]第132页写道:"毛泽东在民主革命时期指出,是否有利于生产力的发展,是检验中国一切政党的政策及其实践的作用的好坏和大小的标准。"从王伟光的论述可见,十三大政治报告确实十分强调生产力的发展。那么怎样理解经济分析、阶级分析和利益分析的关系呢?文献[10]从三个方面阐述了这个问题:首先,从总体上来说认识社会现象必须从经济分析入手,这一点已多次强调。其次,由于阶级是由经济划分的,所以阶级分析是经济分析的具体化。从数学上来说,本来应该对每个人进行经济分析,但人口数量太多,中国就有十几亿人,不得不采用简化分析模型。这一方法数学上称为奇异值分解,只要将人分成少数几个顶多几十个类型,抓住了主要的脉络,便于分析。最后,利益分析不仅比阶级分析更加看得见、摸得着,而且可以作为阶级分析的补充,淡化阶级意识,有利于和谐社会建设。

文献[10]第七章讲利益矛盾和利益冲突,分为利益关系、利益差别、利益矛盾和利益冲突四个小节。再次强调了利益关系是人与人之间物质的、经济的关系,其他政治的、伦理的、法律的、思想的关系都建立在利益关系的基础之上,至少在归根结底的意义上是与利益关系有关的,而阶级社会利益关系是有阶级性的。

利益本身包括三层关系:一是利益主体与利益客体之间的关系;二是利益主体关系,人与人之间的社会关系,主要是分配关系;三是利益客体之间的关系。关于利益主体,文

献[10]将利益主体在前面各章分为个人、家庭、集体、集团、国家、社会等六个层次的基础上,在第七章又改为个人、家庭、集体、国家、社会等五个层次。但在此还是借用六个层次的说法,利益主体分为个人、家庭、集体、集团、国家、人类社会等六个层次,其中家庭、集体、集团、国家称为类群利益主体。这样似乎前后一致一些,其中利益集团不必特指利益主体中利益集体和利益国家那部分[10],而仅仅指出利益集团是指基于共同利益联系起来的、相对稳定的、长期固定存在的、带有很强凝聚力和竞争力的人类群体(简称类群,属于类群还有家庭、集体、国家),例如阶级、阶层、政党、企业等。利益集团在利益争夺与利益分配中比利益个人有更大的力量,个人也往往通过参与利益集团的方式来参加社会利益的竞争和冲突[10]。这里的论述有点不够清楚了,利益客体之间的关系一笔带过,没有突出利益主体对利益客体的本体论上的理解和解释,只讲了认识论上认识与被认识、欲求与被欲求、谋求与被谋求、满足与被满足。也就是说,由于缺失对于利益客体作为意义关联整体的深度剖析,也缺失前面在认识论意义上对意义的生成和意义的充实的区分。整个煮成了一锅粥,利益主体的真正主体性没有突显,利益主体在理解和解释、选择与建构利益关系方面的作用没有摆明。好像利益关系是现成的摆在那里的利益体系,而缺失了利益主体(人)与利益客体(物)的双向互动。我认为,如何从人双向互动地通达物是任何哲学的根本难点,也就是让物的感性光辉向人发出全身心的微笑。让物对人"说话",听人"说话"。在这个最难的问题上文献[10]恰恰语焉不详。当然文献[10]前面章节确实讲过利益主体的实践性,而实践又可以看成主体对象化和对象主体化的双向互动。但以前的所有哲学著作也就达到这个高度,离穿透主体间性、穿透客体间性、穿透主客体间性还是隔着一层纸。最后这层纸并没有真正捅破,这是为什么花了这么长篇幅耐心地等待要研究的问题出场的根本原因。当然利益体系与即将引入的利益场已比较接近了,但由于没有分清主次,用简单的主客体关系模式,哪怕推广到前述的主体间性[8],客体间性和主体客体间性也仍然是无济于事的。文献[8]第十八章"主体际性"理论的扩展,可以看作走向本书利益场理论的一个环节。正如俞吾金在文献[8]第338页写道的:

"综上所述,马克思的实践唯物主义学说蕴含着一种内涵极为丰富的关系理论。尽管马克思从来没有使用过'主体际性'、'客体际性'和'主客体际性'这样的表达方式,但它对这些概念所意味的内容却有大量的论述。实际上,他把社会生产关系理解为'主体际性'、'客体际性'和'主客体际性'的内在灵魂和秘密。一旦人们把握了这一内在灵魂和秘密,也就很容易理解现代资本主义社会内部的一切神秘关系了。另一方面,马克思的世界观也与当代西方哲学家们(如海德格尔)的世界观之间存在着原则性的差别。假如说,当代西方哲学家们只讨论'主体际性',而完全撇开对'客体际性'和'主客体际性'的思索,那么马克思则全面地反思了这三个方面的关系,从而赋予当代西方哲学家们谈论的'主体际性'以真正地现实性。"

从俞吾金的上面一段话来看,其实文献[8]业已触及"主体际性"、"主体际性"和"主客体际性"的问题,只是在马克思已研究的基础上还有待深入,并不是马克思已穷尽了这个问题的研究,应该说还有很多问题有待进一步阐释。

在文献[10]利益差别一节,王伟光对共产主义的个人所有制做了比别的书都更清楚的阐释,为了避免由于理论和政策水平而转述走样,我不得不再一次长篇引用。政治、法律,包括哲学都不是我的本专业,所以不得不谦卑一点,多原文引用,少转述,少改写。在

文[10]第 157 页，王伟光写道：

"生产资料公有制仅仅决定利益差别的非阶段对抗性，但并不能消灭利益差别。这是由于公有制不是消灭个人所有制，而是真正实现个人所有制。马克思在《资本论》中说道：资本主义生产由于自然过程的必要性，造成了对自身的否定。这是否定的否定。这种否定不是重新建立私有制，而是在资本主义时代的成就的基础上，也就是说，在协作和对土地及其劳动本身生产资料的共同占有的基础上，重新建立个人所有制。私有制是对原始共产主义社会占有制的否定，而资本主义的社会化生产又是对自身私有制的否定，而这种否定不是重建私有制，也不是恢复原始公有制，而是在新的公有制的基础上建立个人所有制[25]。在这里，个人所有制有两层含义：一是指每个人作为联合劳动的一员对生产资料和全部生产力综合的真正占有。马克思认为，在共产主义社会，'许多生产工具应当受每一个人支配'[26]。它是'联合起来的个人对全部生产力的占有'[27]。在原始社会，人是受自然力支配的，人不可能真正成为生产力的主人，生产高度发达的公有制社会才使个人成为社会生产力的主人。二是个人对生活资料的占有和支配。在公有制的高级阶段，生产力高度发达，每个人都可以获得充分满足个人全面发展需要的社会生活资料。因此，公有制不是消灭个性，而是发展个性，不是取消个人需要，而是充分满足个人需要，不是否认个人利益而是更多地承认个人利益。公有制社会的个人利益不仅从联合生产者共同占有生产资料的经济关系中产生，而且从个人消费品的分配关系中产生。在公有制高度发展的社会中尚且存在个人利益和利益差别，更何况公有制发展不完善，多种所有制并存的社会主义初级阶段。当然，在社会主义初级阶段，生产资料占有的差别是影响利益差别的决定性因素，但不是唯一的因素。"

从王伟光的上述论述可知公有制会带来个人需要、个人利益、个人生活方式的丰富性而不是枯燥性。在共产主义社会，每个人都有丰富多彩的人生。即使在社会主义初级阶段，也不应该像"四人帮"横行时期，全国很多年都只有几个样板戏，电影都是"南征北战"，没有多少新电影。

利益矛盾比较好懂，因为矛盾无处不在，无时不有，大家都是人，而不是神，怎么可能事事都做得恰如其分，矛盾在所难免，只是人民内部矛盾尽量不要发展成矛盾冲突就是了。王伟光在文献[10]第 169 页提到："当然，剥削阶级内部的私人间的争夺也是十分残酷的，资本家之间大鱼吃小鱼，小鱼吃虾米，角逐吞并，尔虞我诈的现象，就是资本主义社会统治阶级内部残酷的冲突现象，这类冲突并不弱于利益根本对立的群体外部冲突。"记起矛盾小说《子夜》里的一个小地主，本来在老家有几千亩良田，跑到上海来炒股，不仅赔进了女儿的嫁妆和贞操，而且最终自己也只能上吊自杀。另外日本电影《华丽的家族》中，资本家父子之间为了角逐吞并，斗得你死我活，最后导致儿子开枪自杀。资本主义社会任何巨额财产的非正常转移都伴随着罪恶。

文献[10]第八章论述利益激励和利益动力。这是历史唯物主义的一个所谓历史深度问题。我的论述深受文献[25]第八章的启发，但由于这是一个学术研究的问题，政策性不强，也不便再引用了，而是试着用自己的话给出对人类社会活动动力问题的探索。我是在接受文献[10]介绍的恩格斯的社会合力论和追问动力的动力的前提下来开展讨论的。

首先，世间是奔腾向前的，不管每个人怎么想，社会怎么架构，过去了的事总是一去不复返的，按照民间的说法就是"世上没有后悔药"。所以人类社会尽管有人的参与，但人总

是自然界的一部分，特别是人是动物界的一部分。因此，人类社会首先是一个自然历史过程。这一点是比较好懂的。

其次，每个人尽管有自由意志，紧扣本节标题的话，就是每个人都在追逐自己的利益，哪怕外人看来某个人挺不划算的行为，在某个人自己看来往往也有其充足理由或者迫不得已的理由，或者是在无论怎样都不好的情况下选择的一种风险利益共享的方案。但总的说来，每个人的日子这样过，总有每个人的道理。也许不符合外人的道理，但绝大多数情况下总是符合他自己的道理的。以上推论照样适用于其他利益主体，如家庭、集体、集团、国家、人类社会。大家共同博弈的结果，形成一个总的历史发展的趋势。这一历史之势既可以从已过去的事情中提炼出来，也可以从过去适度推断未来。将这个"客观"存在的大势和大势所趋，称为社会合力。这种社会合力有与大势不一致的时候(大多数时候)，也适用于每个利益主体。把一致称为正利益，把不一致称为负利益。因此以时间的视角来看，利益从自然历史过程的奔腾向前(只为正)变为因人介入后的可正可负了。前者服从椭圆几何，后者服从双曲几何。另外，当然时间不可逆转，但人的思想可以作观念性运动，可以回忆过去，还可以展望未来。这样就形成了利益追逐过程中每个利益主体围绕着其根本利益的客观稳定趋势以及微观上的起伏。比如新中国成立前，地主要为贫下中农说话通常就很困难，这是客观的稳定趋势，但并不排除偶尔或少数地主也是好人。而宏观的稳定趋势，按文献[10]是由生产力水平决定的，这很好懂，马克思也没有使用过手机，这是由生产力水平决定的。孔子没有坐过飞机，所以按马克思主义社会存在决定社会意识的说法，孔子也产生不了坐飞机的意识。所以这就是唯物主义的唯物论前提下的历史观。这里的物，可以理解为与人相关的物，包括人作为生产力中的核心要素，唯一创造价值的元素和创造使用价值的主要元素。也可以理解为物都指事物，与人相关的事物。比如古时候皇帝权利再大，但由于没有汽车、火车、飞机、电话、无线电等与人相关的物，也只能用500里加急的快马来实现通信，往往某地农民起义的信息要等很多天才能传到京城，这样就失去了将冲突在萌芽状态中解决掉的可能性。从日常生活来说，皇帝也没有空调，夏天没有太多的降温手段，也只能到避暑山庄，让太监打扇，还有将冬天的冰储存在地窖里以备夏天使用。而现在普通老百姓家里都有空调，这就是生产力水平，这就是大势所趋。所以，总的来说个人相对渺小，社会化的生产力更加伟大。与人相关的物，消费的物，大多数是人劳动的结果，每个人都是劳动的结果。所以本书崇尚劳动第一的观点，按老百姓的说法就是要勤快，不要懒惰，也就是俗话所说的"天干饿不死勤快人"。

再次，尽管伟人如爱因斯坦，对科学的发展有很大贡献，但他也不能超越自己的时代。爱因斯坦说过即使自己不搞狭义相对论，再过五年别人也能搞出来；即使自己不搞广义相对论，再过五十年也许别人也能搞出来。相反，引力场与电磁场如何统一，就多多少少超出爱因斯坦的时代了，很多准备工作没有就绪，即使是爱因斯坦也没法创造。首先，在人类思想史上爱因斯坦能与马克思、爱因斯坦、牛顿、达尔文、阿奎那、霍金、笛卡尔、康德、麦克斯韦、尼采等齐名，说他是百年出一个的人物并不过分。这个例子是说创造性劳动也有必然的大势和偶然性的起伏。大多数科学工作者，则仍然受到人类社会的看不见的手和各种各样看得见的手的左右，受到政治、经济、文化、军事等各种因素的左右。本书中反复提及军事，其含义是比军队更广泛的概念。现在的产品有军品和民品，涉及很多工业部门，比如微波专业，那就绝不只是微波炉的问题，扩频(保密)通信、雷达、隐身飞机等都与

微波有关。特别是作为宇宙本体的宇宙微波背景辐射，既然有微波两个字呈现，那当然就是微波的问题，因为0.01至1米的波长正好属于微波频带。宇宙微波背景辐射因为是四面八方的波都向观察者的汇集，因而是自旋为2的微波，而不是自旋为1的微波，因此可合理推断电磁波方程中有自旋为2的解。将真空理解为宇宙微波背景辐射这一科学的进步，当然也是科技发展水平的标志，一百年前人类是不知道这些东西的。第二次世界大战导致雷达的应用和发展，战争作为阶级斗争的最高、最激烈地表现，某种程度上也有推动社会进步的作用。第二次世界大战结束后，美国才出版了十多本有关雷达的著作。当然战争的目的归根到底还是争夺物质利益，争夺生产力中的核心资源[9]。这一段从科学技术是第一生产力的角度论述了人类精神生活，包括创造性劳动在内的精神活动也是唯物主义的，不是旧唯物主义的世界的统一性在于它的物质性的与人无关的物质本体，而是与人紧密相关的，特别是与特定历史时期生产力发展水平紧密相关的事物。所谓事就是有人在其中才称为事，包括现在写论文这种很阳春白雪的个体化行为，现在也搞成了社会化大生产，有的大型实验文章的署名多达好几十个人。好的论文往往出自大型的研究团队、有名的研究机构，这些单位或个人有充分的研究经费，有名家把关，有各种档次的研究人员（人力资源），还有各种看得见和看不见的政治资源、学术资源、经济资源、军事资源等。学术研究在相当程度上已经工业化，有所谓学术工业的说法[25]。在文献[28]的前言中张汝伦写道："由于哲学在我国同样成了一种学院职业，哲学研究（德国哲学研究也不例外）往往成为学术工业的一部分。但那种学院哲学式，而不是世界哲学式的研究，恰恰不能把握德国哲学的真精神。"这里提到的德国哲学的真精神，张汝伦进一步的解释为："人们之所以认为德国哲学滥觞于13世纪，是因为出现的第一批确切可靠的从事哲学的是日耳曼人，他们大都是教会中人。德国哲学一诞生，就处于政权与教权、帝国与教皇的冲突中。即使德国哲学家小心翼翼回避政治，哲学与政治的关系都始终构成德国哲学的一个内部的重要问题，这是其他西方哲学所罕见的，忽略这个问题，就无法真正理解德国哲学"。从张汝伦的这段话可以看出反映利益的哲学与政治和宗教不能分离。张汝伦的十论中的代表人物分别是康德、黑格尔、马克思、狄尔泰、胡塞尔、海德格尔、卡尔施米特、伽达默尔、阿伦特、哈贝马斯，这其间百分之八十都是与政治紧密相关的人物。可能胡塞尔与伽达默尔和政治的关系小一些，伽达默尔可能是"小心翼翼回避政治"的典范，50年不吃药活了102岁安详地死去。但尽管回避政治，伽达默尔所研究的哲学解释学也是来自于圣经诠释学，至少与文化大有关系，第二次世界大战期间他躲得很远，主要研究柏拉图。胡塞尔本来是个数学家，用心理学的意向性理论搞着纯粹哲学，前半辈子一直与政治关系很少，但他不讲政治，政治却找上了他。先是世界大战中儿子战死，后是由于犹太人的出身问题被希特勒排挤，最后葬礼十分冷清。政治迫使胡塞尔晚年返回生活世界的现象学，探讨欧洲科学的危机，实际上是欧洲人的危机，胡塞尔的主体间性问题实际上与马克思的阶级斗争学说是有某些关联的。

最后，结论与本书第一版基本相同，每个利益主体的命运都是由这利益主体所处的时代和历史背景决定的，是该利益主体的一切关联的总和决定了该利益主体的命运，或者说历史的大尺度规律在小尺度上，利益主体的主观能动性起着一定的作用，构成对大势的一种起伏并同时生成会改变这大势。在整个人类社会的意义上，人类历史是由生产力的数学期望和方差刻画的唯物主义历史观。在面向未来的意义上，是一切从每个利益主体所

处大气候与小气候的实际出发,根据已有的实际性大气候下,力争更好的小气候的一种奋斗、搏斗和挣扎过程。数学期望代表大势,方差表征起伏。

文献[10]第九章讲礼仪制度与利益协调,还是先从文献[10]第131页、233页、239页摘录几个关键性的政策性很强的概念。

“政治利益的核心和本质是权力资源的占有,权力是政治斗争争夺的焦点。在某种意义上来说,政治斗争就是权力斗争。斗争的最高状态是暴力斗争,暴力斗争集中到一个焦点上就是争夺政权的武装斗争。争夺政权的斗争说到底是利益之争的最高形式。”

“社会制度说到底就是社会利益制度,社会体制说到底就是社会利益体制。每个利益群体,在利益角逐中都力图建立一定的社会利益制度,形成一定的利益分配体制,以达到争夺和保障本派力量背后的阶级和阶层的利益的目的”。

“什么是社会体制呢?所谓社会体制是指在一定社会制度的基础上所建立起来的生产关系,上层建筑的‘具体的形式’,即社会制度在一定时期内的具体表现,又称为‘具体制度’。与一定的经济制度相一致的经济体制,是一定经济关系的具体结构和形式。譬如,社会主义市场经济体制是与社会主义公有制的经济制度相联系的具体经济运行体制。与一定政治制度相适应的是政治体制,政治一直是指政治制度的具体结构和形式,即政体问题,也就是说一个国家采取什么样的形式来实施国家权利的问题。政治体制主要包括国家政治权利的合理构成,结合国家的领导体制、社会管理体制、干部人事体制、行政管理体制、国家政治生活的运行体制等。”

本书认为利益制度与利益协调最终要落实到人,或者说从利益代表的角度看利益由谁代表。蒋介石是大地主、大资本家、大军阀的代表,李自成和洪秀全则是农民利益的代表,毛泽东是广大劳动人民利益的代表。文献[10]第232页的一段话很精彩:“震惊世界的法国大革命前后经历了五年时间,在这短暂的历史舞台上,各派政治力量进行了充分的较量,活灵活现的演出了一场由经济利益所牵动的、各派政治利益的政治斗争的‘傀儡戏’,各派政治力量是在前台表演的政治傀儡,而受一定经济关系所致的经济利益就是后台的导演。无论是推翻一种制度或体制,还是建立一种制度或体制,其目的都在谋取一定的利益,保障一定的利益”。在文献[10]所列经济协调、政治协调、法律协调和道德协调中,通常行政协调起着支配作用,民间协调有时也起辅助作用。

文献[10]第十章是关于利益原则和利益观念的论述。王伟光引用了很多邓小平的话,作者觉得最朴实无华的真理是邓小平所说的:“不重视物质利益,对少数先进分子可以,对广大群众不行,一段时间可以,长期不行。”这几句话充分体现了邓小平一切从实际出发、实事求是的观点。另外,邓小平还把“人民拥护不拥护”“人民赞成不赞成”“人民高兴不高兴”“人民答应不答应”的格言作为制定各项方针政策的最终依据。从西方哲学的知、情、意三方面来理解,人民拥护不拥护体现为外显的行为,实干中则表现为面向未来的视野;人民赞成不赞成体现了人民对各项方针政策的认知,体现了人民可以有不赞成的可能性;人民高兴不高兴体现了人民的情感;人民答应不答应体现了人民的意志。记得1989年邓小平接见戈尔巴乔夫时谈话的标题就是“结束过去,开辟未来”。人民拥护不拥护体现了邓小平面向未来的哲学思想,对过去的很多事情采取结束式的不争论方式,关键在于行,在于组织落实,落实到人。

王伟光在文献[10]第272页发表的观点很正确:“宋明理学明确提‘存天理,灭人欲’。

这些禁欲主义说教都是非利主义利益观的典型论点。在长期的中国封建社会中,统治阶级推崇儒学的非利主义利益观,实质是为了维系封建社会制度,维护封建剥削阶级统治,推行的是一种'愚民'政策,有利于剥削阶级对被剥削阶级的利益剥夺和政治控制。非利观实质不是不言利,而是不准人民群众,甚至他人言利。'文化大革命'中'四人帮'提倡'精神万能论'等论点,无非是封建社会非利主义的现代变种。站在历史唯物主义的立场上看,人是离不开饮食男女这些物质利益的追求的,只有满足人的合理的利益要求,才能调动人的积极性,才能不断推进社会的进步和发展。因此,非利主义是社会历史客观事实不符的唯心主义的利益主张。"

在文献[10]第十章的最后,也是理论篇的最后,王伟光提出了牢固树立工人阶级利益观的严肃要求:第一,人民的利益至高无上是工人阶级利益观的根本原则;第二,全心全意为人民谋利益是工人阶级利益观的集中表现;第三,为人民的利益是共产党利益观及价值判断体系的核心。

共产党在利益面前要处理好以下几种关系[10]282−285:

第一,正确处理好个人利益和人民利益的关系,以人民的利益为重,坚决反对极端个人主义。共产党的利益观是人民的利益至高无上,但这并不等于共产党不讲个人利益,共产党讲的是合理的个人利益,是个人利益服从人民利益。如何对待个人利益,有两种截然不同的观念。一种是极端个人主义,把满足个人利益作为人生的出发点和目的,个人主义是以个人利益为核心的思想体系,强调个人利益至上,主张个人价值的实现在社会生活中具有至高无上的作用,为了实现个人利益可以不择手段。再一种是把个人利益统一于人民利益,个人利益服从人民利益。共产党人的利益观认为,个人利益总是同人民利益联系在一起的,是融合在人民利益之中的。人民利益是基础前提,个人如果脱离人民,脱离集团,个人利益就没有保证。以人民的利益为重,自觉地把个人利益建立在人民利益的基础上,个人利益服从人民利益,这就是共产党的利益选择、价值选择。

第二,正确处理好个人价值实现和社会价值实现的关系,主张人的社会价值的实现是最大的个人价值的实现。人的价值包括个人价值、社会价值两个方面。所谓人的社会价值,就是指个人对社会的贡献,贡献越大,社会价值的实现就越完善。一个对社会没有任何贡献的人,也就是对社会没有任何价值的人。所谓人的价值,就是社会给予个人物质和精神方面多大程度的满足,给予的程度越大,个人价值实现程度就越大。共产党人是个人价值和社会价值统一论者,人只有实现社会价值,才能实现个人价值。共产党人应该以社会价值的实现作为最大的个人价值的实现。最大限度地实现人民利益,就是共产党人自身价值的最大实现。共产党人的价值观是以实现人民的利益为个人价值的最高实现标准,用这样的价值标准来指导和衡量,就要求共产党人必须做到:用社会主义的集体价值观来指导自己的言行,时时处处把人民的利益摆在首位,把为人民谋利益作为个人价值实现的最高形式。正确处理好个人和集体利益的关系,坚决克服个人主义,坚持集体主义,允许合理的个人利益追求,但一定要服从人民的根本利益。

第三,正确处理好党员标准和现行政策的关系,做带领群众共同致富的模范。在现阶段,党既坚持长远的最终的奋斗目标,又制定了现阶段的现行路线和政策。党的奋斗目标和基本路线,要求党员规范地执行党的路线,按党员标准要求自己,不能以符合政策做借口,降低党员的标准。在市场经济条件下,可以允许共产党员用自己的劳动,按照市场经

济原则获取个人利益,但不允许超越制度和政策规定,利用职权,以权谋私。党员不是普通群众,不能只顾个人发家致富,追求个人利益,不去带领帮助群众共同富裕,否则就不是合格的党员。

第四,正确处理好奉献和索取的关系,提倡奉献精神,反对拜金主义。讲奉献,反对拜金主义,这应该是共产党人的价值原则。

第五,正确处理好权力和利益的关系,用人民赋予的权力,为人民谋利益,提倡联系群众,艰苦奋斗,反对官僚主义。共产党的权力是人民赋予的。共产党人必须为人民利益掌好权,用好权。以权谋私还是以权谋公,这是共产党区别于其他党派的试金石。官僚主义与党的宗旨是水火不相容的,是根本违背人民利益的,是权力腐败现象,必须坚决反对。

以上王伟光的论述给人以亲切感,应该说代表了党的多数干部的立场,对带领全国人民脱离贫穷、共同致富有很好的促进作用。作为一个普通人,应该以生在这样的时代而感到幸福。王伟光为党员和群众提供了正确的政治方向和亲切感人的利益观,这也是本书中提出的利益场理论的根本立场和指导思想。在正式进入论述之前,有必要补充的是利益牵动千家万户,好像主要是个分配问题。当然首先是分配问题,其次就是与交换价值相关的交换问题,再次就是生产流通领域的价值创造和价值的生产和分割问题[9,12,13],这一观点的文本学依据是王伟光在文献[10]历史篇第 28 至 37 页转述的马克思、恩格斯关于利益范畴的科学论述。这里不得不以更加简略的方式来重述这一基础问题,以突出分配领域外利益与交换价值有较大关系,也就是说利益范畴,因为与直接的实物挂钩,又与实际的交换价值(价格、钱)关系密切,所以更加贴近现实、贴近生活、贴近群众,这是相对于马克思的抽象价值论而言。

第一,要坚持马克思以生产关系等一切经济行为的观点,显示的每个人就是承载这一定经济关系的每个人,也会是生产和分割剩余价值的每个人。也就是说,讲利益也不能脱离马克思的价值学说,这是基础、原则和根本立场。

第二,利益实际上体现社会经济交换关系,本来个人与个人之间的利益可能是有差异、有对立的,通过了交换可以实现交换双方的利益,这一点在亚当·斯密的《国富论》中有详细论述,当然在马克思的《经济学手稿(1857—1858 年)》中有更精确的提纯。

第三,需要把利益与效用区别开来,利益体现的是社会的人与人之间的经济关系本质,尽管要求以使用价值的物质形式来兑现,但兑现的方式是以交换价值(也就是价格和金钱)的社会化形式来体现的,使用价值是商品的有用性组成的物体系,是商品所包含的自然效用,是一个意义的体系,而不是意识的价值体系。使用价值、价值、交换价值在文献[12]和[13]中有很好的厘清,请读者认真学习。

回顾本节的细致论述可以得出以下简化模型,每个利益主体都进行着逐利的活动,所有利益主体的逐利活动构成共时性的利益场。这是狭义的利益场,可以用价值、利益、权力、权利四个分量来刻画。而历时性的逐利活动构成历时性的利益场,由需要、生产劳动、消费、使用价值构成。历时性的利益场代表我它关系,与生产力或生产方式大致对应,共时性的利益场代表我们关系。本来我们关系与我它关系在时间上是不同步的,看得见我们的时候,我它隐而不显,看得见我它的时候,我们隐而不显。但本书将我们与我它的不同时强制同时,我们与我它就同时存在了,因此在本书的哲学体系中,我们与我它就用八个元素来刻画了。也就是在每个利益主体身上都负载着需要、生产劳动、使用价值、消费

价值、利益、权力和权利。每个利益主体都由它的需要活动、生产劳动活动、使用价值活动（意义理解与解释活动）、消费活动（需要的再生产活动）、价值实现和价值分割活动、利益活动、权力活动和权利活动，构成它内心感应和对外响应的利益场。变化的个人利益场产生变化的社会利益场，变化的社会利益场产生变化的个人利益场，而将个人与社会之间的相互作用关系凝固起来，就构成了社会化历史性的利益场。按本书的哲学体系可以放在人、物、事相对的社会化历史性的场之中。本节较长篇幅的论述使读者对空集，也就是社会化历史性的场有了感性认识。这个场中的一切都是由人来照亮的，是主体间性的。如果更加主体间性化，可以利用 3＋5＝4＋4 的办法，将价值、权利、权力这三个完全是主体间性的东西作为核心，将消费、需要、生产劳动、利益、使用价值这五个元素作为空集或者说本体，作为每个人的身外之物和身外之事物，作为每个人的无机身体的代表，这样物就能"对人说话"了，也能"听人的话"了，完成了历史唯物主义的主体间性建构。既适合于革命时期的阶级斗争学说，又适用于建设时期的和谐社会建构。这是一个物质基础、利益基础、经济基础和上层建筑构筑的体系。前五个元素是历史唯物主义的物，利益基础打通经济基础和物质基础，经济基础又打通利益基础和上层建筑。3＋5＝4＋4 的优点在于突出了在物质生产领域，也是由主体间性的利益关系来座架，使得生产关系落到实处，落实到绝对的人和绝对的物的层面。突出了在生产领域也不是为生产而生产，为劳动而劳动。生产劳动的根本目的除了满足人的需要和消费这一绝对目的外，还要满足各个利益主体的合理的相对目的，也就是说政治层面的公平与效率在生产领域的五个要素中要体现出来。按照文献[11]的方法，可将生产劳动从对象、目的、手段、方法、结果等五个要素来考察。生产资料的生产是手段，劳动的结果是可用于人的生活消费的生活资料，劳动的对象是使用价值为代表的生产资料，包括人化自然与自在自然。劳动的目的是人的生命的生产和再生产，也就是人口的生产、人体的生产、体力的生产和脑力的生产[29]，以利益追求（需要）和利益协调为方法。也可以说劳动的结果是劳动力的生产和再生产，劳动的目的是人的需要的满足，劳动的对象是使用价值的利用和生产，劳动的手段是以消费拉动生产，劳动的方法是利益的追逐和协调。前一种说法是以公平为第一优先，后一种说法是以效率为第一优先。粗略地表征社会主义以人为目的和资本主义以物为目的的两种思维方式。这两种思维方式到底哪个好，还要针对不同的情况才说得清楚。总的说来，当然是社会主义的思维方式好。

可以仿照索绪尔的《普通语言学教程》研究历时态的利益场，也可以依照普通语言学教程研究共时态的利益场。限于时间和篇幅这里不再展开，而将这种细致的讨论留待将来的机缘，只是这里先行占领这一高地。这在本书第一版第八章（也就是本书第二版第一卷第八章）已有两节细致地讨论过了。

在结束本节讨论之前，介绍一下姜井水的一种二元论哲学[29-31]，在本书第一版手稿中曾列出过他的三本著作，正式出版时记不清为什么又没有了。文献[29]提出生产与消费的矛盾为社会能源系统的基本矛盾，很能自圆其说。文献[30]将一些没有时间性的范畴（或者说已被凝固的范畴）引入时间性，按本书哲学术语，就是将已同时的东西再人为不同时，主要强调将本不同时的东西人为强制同时。文献[31]能够指导科学研究，在第 207 页姜井水写道："长期以来，人们总把阴电和阳电看作一对矛盾，认为双方是相互依存，不可分割的"。"没有阴电就没有阳电，没有阳电也没有阴电"——这是一个无可置疑的观

点。然而,不讲情面的物理学家在实验室中,却把阴电和阳电完全分离开来,并且制造出阴电池和阳电池,使双方都取得独立的形态。这一事实立即引起自然科学家和哲学家的争论。西方某些自然科学家据此认为:自然界没有矛盾规律,辩证法不适用于自然科学等。但哲学家们虽然不同意这种观点,但在事实面前又感到目瞪口呆,拿不出令人信服的理论和证据予以解释,从而使问题的谈论陷入迷雾而无法摆脱,这是至今20多年的现状。

对于姜井水提出的问题,本书中第一版就提出了解答,辩证法不应理解为黑格尔和马克思的正反合,而应理解为正反合分。正电和负电作为矛盾着的双方统一于电中性的自然界大多数物质中,而完备二元论的矛盾论还包含着分,作为第四个元素,也就是矛盾的解决或者说不存在的一种方式。利益也存在正反合分的问题,比如男女由于相爱相恋而结婚,体现了矛盾。但离婚虽然是偶然的,但也应该作为矛盾的正反合分的第四个元素包括在完备二元论中。又比如一个企业也有以倒闭作为解决矛盾的一种清算方式。指出这些是为了让人们更好地理解王伟光在其《利益论》[10]中讨论的许多矛盾。关于矛盾问题本书作了"宏大叙事",但仍然不够具体,民间哲学家有很多好的见解。陈书栋深切感觉到"关于两个事物共同作用于第三事物(即生成矛盾的基础)生成了矛盾"[32],通过36年思索,写成了近30万字的著作——《矛盾基础论》[32],仅就这么一个小问题进行具体分析。本书可以为其补充第四个元素——空集。这个问题本身就是受空集支配的问题。其实陈书栋的问题也就是本书详细论述的主体间性问题的最简单的情况。好在陈书栋用了双向的箭头,表明基础也是用人来照亮的(按本书哲学术语)。

同样,对于前面简单回答的阴电阳电矛盾问题,姜井水根据他的矛盾论用了四个整页的篇幅进行论述,十分哲学化。也就是将矛盾放到电荷、电荷加速度、磁南极、磁北极的四元对立中来考虑,认识到负电的本质是电荷加速度,因为$(j\omega)^2=-\omega^2$,$(-j\omega)^2=-\omega^2$,如果时间采用时谐形式的话,同样磁总是偶极子,因无磁单极,可看成电荷的左右旋(自旋向上或自旋向下)$(j\omega)(j\omega)=-\omega^2$,$(-j\omega)(-j\omega)=-\omega^2$,$(j\omega)^3(j\omega)^3=-\omega^6$,$(-j\omega)^3(-j\omega^3)^3=-\omega^6$,但是$j\omega+(-j\omega)=0$,$(j\omega)^3+(-j\omega)^3=0$,这就是磁单极不存在的道理,所以地球磁场的南北极与地球的机械的南北极有对应。$(j\omega)^4=(-j\omega)^4=\omega^4$,所以电荷与磁偶极子形成了4阶循环群。这里的讨论整合了姜井水在同一本书中关于波粒二象性的讨论,也就是将量子的波粒二象性理解为物质粒子、辐射粒子、物质波、辐射波。如果再进一步将两个4阶循环群在同一圆周上错位45°放置,那么4阶循环群就变成8阶循环群,而如果将空间反演、时间反演、时间和空间全反演和恒等变换考虑在内,则构成4阶反演群,也就是皮亚杰在其著作《结构主义》中提到的克莱茵群。大致电磁场与引力场研究就可以这样逐步地深入。

生产与消费的矛盾被解释为"两种生产"关系的争论之谜[31]203和生产和消费矛盾运动的立体模式[31]40,并且在消费和生产矛盾运动的立体模式[29]65、消费和生产的过去形态[29]114、能源系统故障引起的社会革命[29]157等多处进行了十分具体和详细的论述。简单地说就是将这一矛盾理解为4个元素:人的生产、人的消费、物的消费、物的生产。姜井水的体系没有被采纳的原因是不可以推广到8个元素、16个元素、32个元素等,虽然很机智,但缺失普遍性。而本书的矛盾体系则可以任意推广到2^N个元素,比如1024个元素。

3.6　我它与我们:本体论与认识论的统一

其实3.5节末尾已经通过利益场理论实现了从完备二元论4个元素向时域的推广,

将本来不同时的我它关系与我们关系不同时强制同时，形成了 8 个元素。回到第三章的总问题，就是由以下 8 个元素实现本体论与认识论的统一：①从事对象性活动的人（某一时段内）；②对象性活动中的事（某一时段内）；③对象性活动中的人和事（某一时段内）；④作为自然化人、人化自然、自然化人与人化自然的统一，与人暂时无关的自在自然（某一时段内）；⑤从事非对象性活动，共在中的与人和物打交道的存在论上的每个人；⑥物，与人与人之间的分配和交换、利益、权力、权利有关的物，社会化的物；⑦由待人接物组成的事，物以类聚、人以群分；⑧空集和余集。作为社会化历史性的场，过去和未来非当下的当下化，意志论、信息论、超越性宗教学、超越性美学、历史学意义上的历史、不确定排除意义上的每个人的去存在（主观意义上的信息化生存）、不能由本书哲学体系所穷尽的其他事情。

以上的前 4 个元素，按照马克思和王伟光[10]的理论主要指生产力中体现的人与自然的关系，尤其指物质生产劳动为代表的改变世界和认识世界的实践活动，对象性活动中对象主要指自然界。

根据最近几十年的多个世界的划分，实现了从 4 个世界的学说到 8 个世界的“扩大容量”。空集中的场是一个能指，根据问题的不同，可以指不同的东西，这一章费了很大力气构建了社会化历史性的利益场作为一个具体的所指。①②③④中有事，⑤⑥⑦⑧中也有事，但两者中的事是不同的事。一种是对象性活动的事，从管理的角度主要指行政系统；另一种是非对象性活动中的事，主要指立法、司法、执法和整个政治上层建筑和思想上层建筑。对象性活动中的事主要是与社会生产力相关的事，非对象性活动中的事主要是指与社会生产关系相关的事。当然两者不可能截然分开，事实上我们有：

$$A_{n+1} = \begin{bmatrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \\ ⑦ \\ ⑧ \end{bmatrix}_{T=(n+1)\Delta}$$

$$= \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} & B_{17} & B_{18}B_{21} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} & B_{37} & B_{38} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} & B_{47} & B_{48} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} & B_{57} & B_{58} \\ B_{61} & B_{62} & B_{63} & B_{64} & B_{65} & B_{66} & B_{67} & B_{68} \\ B_{71} & B_{72} & B_{73} & B_{74} & B_{75} & B_{76} & B_{77} & B_{78} \\ B_{81} & B_{82} & B_{83} & B_{84} & B_{85} & B_{86} & B_{87} & B_{88} \end{bmatrix}_{8\times 8} \cdot A_n = \begin{bmatrix} ① \\ ② \\ ③ \\ ④ \\ ⑤ \\ ⑥ \\ ⑦ \\ ⑧ \end{bmatrix}_{T=n\Delta}$$

这里$\triangle t$ 为某一时段，n 为自然数，上式可简写为：

$$(A_{n+1})_{8\times 1} = (B_{8\times 8})(A_n)_{8\times 1}$$

在此 B 矩阵是对角线占优的，例如人主要与人相关，空集也主要与空集相关。当然

B 矩阵可以是非线性的、时变的。对角线上的元素可以按重要性或历史本来面目的先后次序排列。

参 考 文 献

[1] 王金林. 世界历史意义的本质道说:从海德格尔的解读看马克思哲学的当代性. 上海:上海教育出版社,2002.
[2] 任伟. 数学化的场论:球面世界的哲学. 北京:科学出版社,2013.
[3] 孙承叔. 资本与历史唯物主义. 上海:复旦大学出版社,2013.
[4] 广松涉. 存在与意义:事的世界观之奠基(第一二卷). 彭曦,何鉴译. 南京:南京大学出版社,2009.
[5] 广松涉. 事的世界观的前哨. 赵仲明,李斌译. 南京:南京大学出版社,2009.
[6] 海德格尔. 在通向语言的途中. 孙周兴译. 北京:商务印书馆,2004.
[7] 孙周兴. 语言存在论:海德格尔后期思想研究. 北京:商务印书馆,2011.
[8] 俞吾金. 被遮蔽的马克思. 北京:人民出版社,2012.
[9] 鲁品越. 走向深层的思想:从生成论哲学到资本逻辑与精神现象. 北京:人民出版社,2014.
[10] 王伟光. 利益论. 北京:中国社会科学出版社,2010.
[11] 杨景祥. 艺术哲学. 石家庄:河北人民出版社,2011.
[12] 牛变秀,王峰明. 价值存在和运动的辩证法:马克思《资本论》及其手稿的核心命题研究. 北京:社会科学文献出版社,2011.
[13] 王峰明. 历史唯物主义:一种微观透视. 北京:社会科学文献出版社,2014.
[14] 邓晓芒. 实践唯物论新解:开出现象学之维. 武汉:武汉大学出版社,2007.
[15] 俞吾金. 重新理解马克思:对马克思哲学的基础理论和当代意义的反思. 北京:北京师范大学出版社,2013.
[16] 王南湜. 辩证法:从理论逻辑到实践智慧. 武汉:武汉大学出版社,2011.
[17] 黑格尔. 法哲学原理. 范扬,张企泰译. 北京:商务印书馆,1982.
[18] 高兆明. 黑格尔《法哲学原理》导读. 北京:商务印书馆,2010.
[19] 马克思恩格斯选集(第1卷). 2版. 北京:人民出版社,1995.
[20] 张盾,等. 黑格尔与马克思政治哲学六论. 北京:学习出版社,2014.
[21] 文正邦. 马克思主义法哲学在中国. 北京:法律出版社,2014.
[22] 晏智杰. 劳动价值学说新探. 北京:北京大学出版社,2001.
[23] 高新民,汪波. 非存在研究. 北京:社会科学文献出版社,2013.
[24] 任平. 走向交往实践的唯物主义. 北京:人民出版社,2003.
[25] 马克思恩格斯全集(第23卷). 北京:人民出版社,1972.
[26] 马克思恩格斯全集(第3卷). 北京:人民出版社,1960.
[27] 马克思恩格斯全集(第2卷). 北京:人民出版社,1960.
[28] 张汝伦. 德国哲学十论. 上海:复旦大学出版社,2004.
[29] 姜井水. 社会系统论. 上海:学林出版社,2004.
[30] 姜井水. 范畴结构论. 上海:学林出版社,2005.
[31] 姜井水. 现代科学辩证法与现代科学认识论. 上海:学林出版社,2003.
[32] 陈书栋. 矛盾基础论. 郑州:河南人民出版社,2006.

第四章　社会唯物主义完备三元论:本体论与认识论的统一

这一章涉及很多内容,不可能详细展开,严格意义上只是一个提纲。

4.1　完备二元论与中国传统哲学的关联

本书第二章已按照西方的思维,沿用哲学是研究自然、社会、人类思维的最一般规律的科学这一个老定义。根据 $2^3=8$ 的原理,“推导”出从西方而来的科学思维(在稍带点牵强附会的前提下),可以与中国传统哲学的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下接轨。这一节则根据 $2\times4=8=2\times2^2$ 的原理,将本书第三章的时域辩证法对应于中国的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下。

作者认为,在人与自然的关系中的人可以对应于诚意,在人与自然关系中的事可以对应于格物,在人与自然关系中的对人处事的人和事可以对应于致知,在人与自然关系中的空集中的人化自然、自然化人、人化自然与自然化人、对某一时段暂时与人无关的无化着的自然对应于平天下,主要指天人关系。在人类社会领域的物对应于修身,在人类社会领域的人对应于齐家,主要指人口的生产和私人生活,在人类社会领域的事(包括人和物)对应于治国。社会化历史性的场对应于正心,在中国传统哲学中,心是有超越性,心可以到身体之外去的。海德格尔将人生在世理解为操心,心也是有超越性的,形而上学的。

柏拉图专门写了一本《理想国》的著作,阐释了柏拉图认为的理想国应该是如何的。老子有小国寡民的“理想国”。在这里也不妨以中国的家国同构的模式,勾画一下中国式的“理想国”=大同世界。

根据第三章利益场理论,参考古今中外的历史,尤其是社会管理阶层以家庭为单位的收入控制,参考英国和古代中国的文官制度,我认为百万年以后也许应该执行下列官员工资制度:设想理想社会中每个家庭的人均收入为 1,那么根据古希腊的制度,收入需高于一定水平的人才能做官。建议县级(包括县级)以下官员,应在家庭收入为 1 到 1.618 之间的人员中选拔,越是基层干部工资越高,比如村长的人均家庭收入要接近 1.618,县长则只能接近于 1 左右,而一切高于县长的官员的收入则应控制在 0.618 到 1.0 之间。一句话,官越大,工资越低,家庭总收入越低。总统每年按社会平均水平的 0.618 发工资,反正总统只当 4 年或 8 年,也穷不到哪里去。其他社会成员的家庭收入则控制在 0.1 到 10 之间,相差 100 倍,超过 10 倍则被视为非法收入立即没收。

日本退休人员的工资大致也就在 0.618 到 1.618 之间,当然这里的 1 应是社会平均退休工资,各类人员差别不大。而百万年以后,物质财富已充分涌流,退休与上班的区别也应逐步缩小,因为上班人员与退休人员在按需分配意义上的差异变小。每个人挣多少钱与岗位有关系,但与家里有几个人更有关系。如果上有老、下有小,则应多发工资。只有从利益上落实才能去除官本位,变成人本位。企业家、科学家,包括“哲学王”的人均家庭收入也不能高于社会平均水平的几倍。成天玩的非劳动人员也要有 0.1 以上以保证其

基本的生存权利。再次提醒,百万年后的平均收入已很高,十分之一已不少了。要想多得,只能多劳动。

这里的“理想国”,自知缺点很多,很有片面性。但优点有三点:一是避免了以强凌弱,贵族(收入在平均收入的 1.618 到 10 倍之间的人)无权,有权的人不是贵族。实现了经济与政治的相对弱耦合,避免了资本干政。二是避免了以多胜少,也就是避免了穷人因为人多对富人的专政。穷人也不能掌权,哪怕最基层的官员,收入必须达到人均收入的 1.618 倍才有资格参选。而高级官员由低级官员竞争上去。三是彻底避免了官本位、升官发财的中国传统,升官并不能发财,升官后收入还要降,升官意味着更多地为人民服务。

4.2 意向与所意向的八重性

前文已将格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下作为完备三元论的 8 个元素,现在进一步从意向与所意向[1]的八重性来将本书的哲学扩展为 16 个元素,每个个人的对象性活动作为一种意向性活动,必然指向相对具体的感性形象,这是对言语活动中“音响形象”8 倍“扩容”,透过这个感性形象,必然所意向到人类社会共在中的意义世界,这是对语言学中语言的意义的 8 倍“扩容”。对象性活动的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下构成中国古代政治哲学的历时态研究,形成我它关系。而中国古代政治哲学的共时态研究则形成格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下的我们关系。也就是说按海德格尔哲学的范式来理解和解释,在一定时段的人类社会的共在着的每个人,每个人做的每件事细想起来总是牵物、牵知、牵意、牵心、牵身、牵家、牵国、牵天下的。海德格尔哲学仅仅涉及牵心和牵物,这很不够。本书提出的基础存在论则总是牵物、牵知、牵意、牵心、牵身、牵家、牵国、牵天下的。避免了海德格尔哲学的局限性[2]。具体地说,海德格尔的牵念=我们的牵身,海德格尔的牵心=我们的牵物、牵意、牵心、牵家、牵国、牵天下、牵知。举个例子,我现在写书当然是牵物的,得有纸和笔、桌子、凳子。也显然是牵知的,没有世事人生的各种知识是没法写书的。当然是牵意的,如果我不想写,就没法写书。当然也是牵天下的,因为我所在之地的大气候、小气候,交通是否便利,看病方不方便等都有影响。肯定也是牵身的,身要动,眼睛要看,手要写,脑子还要动,整个身体都得处于正常状态。牵家也是显然的,为家里挣着钱,写书是一份工作。也是牵国的,比如 20 世纪 90 年代初出版一本书要困难一些,现在社会经济文化发展迅猛,出版就比较容易一些了。最后也是牵心的,全人类都有情感相通性,每个人的心都是相通的,语言也是可以互译的。张祥尤在主持翻译《海德格尔》[2]这本书时,这个牵字译得好,使作者不费吹灰之力就将其从牵念、牵心扩展到牵物、牵知、牵意、牵天下、牵身、牵家、牵国。而早年的操心=牵心,操持=牵念就不好推广了。操物、操知、操意、操天下、操家、操国均不通,所以翻译也很重要。另外将此在译为缘在,也很好,除了显示出在一起的随机性,也多少能暗示出面向未来时的不确定性和不确定性的排除的去存在。而中国古代哲学的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下本身都是动词性的,省略了作为人的主语,我、我们、你、您、你们、他们。因此不加修改就可以用来表示对象性活动的我它关系。按本书体系,对象性活动的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下主要属于生产力范畴,而共在中的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下主要属于生产关系范畴。不要与

第二章的说法相混。按照这一节的新定义,参照第二章,可以将外王看成对象性活动的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下,而将内圣看成共在中的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下。内圣对应于意向,外王对应于所意向。外王对应于感性世界,实践的感性、劳动的感性、生产劳动的感性、社会实践的感性、交往的感性等,反映人的本质力量的对象化,主要体现物与物、人与物、人与事物的关系,对应着自然的意义世界。内圣对应于映射性[3]的意义世界,也就是价值世界、利益世界、权力世界、权利世界、真理的世界、善的世界、美的世界、神圣的世界、信息的世界。内圣完全是一种主体间性的东西,与历史唯物主义对应更好,外王则与辩论唯物主义对应更好。每个人的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下的活动与社会化历史性的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下场相互生成着对方。这样就能回答邓小平为什么在人民拥护不拥护之后还要加上人民答应不答应,因为每个人与人类社会之间存在着两次作用,一次是对格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下的响应,体现为拥护不拥护。所有人的响应,经过各种整合后又变成下一个时刻的社会化历史性的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下场,重新作用于每一个人,要求每个人重新感应并做出响应。

4.3　十六个世界组成的人类社会

格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下作为对象性活动,每一种对象性活动称为一个世界,一共就有 8 个世界。这 8 个世界是以物为本的世界,属于认识论。

格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下作为共在的非对象性活动,作为主体间性问题,每一个问题称为一个世界,一共就有 8 个世界,这 8 个世界是以人为本的世界,属于本体论(按本书体系,读者可以不同意)。

本体论与认识论都是完备三元论的,主要是本体论有 $2^3=8$ 个元素,认识论与本体论相统一之后就有 $8+8=16=2^4$ 个元素,所以由 2^3 走向了 2^4。本体论与认识论相统一的完备三元论就变成了完备四元论。同样道理,完备二元论相统一的完备二元论就有 $4+4=8$ 个元素,也可看成完备三元论。这就是本书的辩证法的"变戏法",是建立在拓扑空间的完备性之上的。

格物作为主体间性问题,主要指在生产劳动中结成的各种技术关系、利益关系、生产关系、权力关系、权利关系,尤其是现在资本全球化,很多跨国公司的产品之间在有用性或者说使用价值层面的联系越来越紧密,越来越专门化,可以在使用价值意义上形成意义关联整体[4,5]。

致知作为主体间性问题是可以的,因为每个个人除了少量知识来自自己的亲自实践和独特体验外,很多知识还是来自别人的传授或示范。来自人类一代又一代的生物学上的遗传和社会化的遗传。现在什么知识都可以上网查查,或者打电话、发短信、微信、电子邮件问问别人。像数学、物理等基础学科,基本不再有中国物理、日本物理或美国物理之分,全人类共享着一种物理学。

诚意也可以作为主体间性问题,第三章详细讲解了恩格斯的社会合力论,亚当·斯密的看不见的手,好像意志和每个人的人生是很没有主体间性的,顶多是弱主体间性。因为通过社会化历史性的场,每个人的意志都受到别人的影响,才有邓小平的人民拥护不拥

护,人民赞成不赞同,人民高兴不高兴,人民答应不答应的问题。正如卢梭所说,人生而自由,但却无往不在枷锁中。现在哲学上更有所谓主体死亡论[6],你以为你在过你的人生,其实你已经死了。

正心更是一个主体间性问题,不用说政治上层建筑和思想上层建筑,也不用说美学和宗教,单是作为不确定排除的去存在就与多少人和事相关联。统一思想就是正心的问题,中国古典哲学这方面讲得很多。

修身更是个主体间性的问题,人活着莫非自己的身体和自己身体外的物,所以费希特哲学的自我设定非我是很有自明性的,但一旦社会化,身外之物往往是有主的。物的所有权、使用权、继承权、分割权之类开始进入眼帘。第三章讲了,你分多了,他就只能少分,这涉及个人利益问题,也就是主体间性问题,共在主体的主体间性问题。

齐家更是一个主体间性问题,即便你没有结婚,还未成家,但你有父母、有兄弟姊妹。只是有个房子,房子里还没有除你以外的别人还不是家。家庭内,是主体间性问题,真正体现了物是人的无机身体,家是人的安身立命之所在,是人的避风港。通过婚姻关系,家庭内的主体发展到家庭外,再通过亲属关系发展到更多的人,可以认为社会就是由家庭组成的。

治国在本书体系中指治理全人类,并不特指现实中的某一国家。地球表面村已经通过货通天下,钱通天下,通过各种交通工具联系起来。只是政治上暂时还没有变成一个国家。有理由相信在不久的将来,人类会取消国家,这样军队就不需要了,只需要少许警察就行,减少很多开支。

平天下指在人类中心意义下的天人合一关系的和谐,这一点现在变得很重要。因为环境污染总是意味着有人在污染环境,个体污染环境就会影响到另外的主体。比如多年前某乡镇企业为很多农民脱贫致富提供了帮助,但所排污水祸害几百里,很多年后几百里外的农民把官司打到这里来,不得不关闭停产了。而治理污染成本又是很高的,所以一定要在发展过程中减少对环境的污染。

总之,每个利益主体的一举一动,其实都是牵物、牵知、牵意、牵心、牵身、牵家、牵国、牵天下的,详细地讨论这八牵不是本节的任务,这可以写出一本厚厚的书了。但特别强调,除了人的本质力量对象化之外,将目光更多地投到主体间性问题也是一种现代哲学的新趋势,值得每一个人深思。按海德格尔哲学,基础存在论为各门分支哲学奠基,特别是为对象性活动奠基。我认为这是对的,人们在开始对象性活动前总是牵物、牵知、牵意、牵民、牵身、牵家、牵国、牵天下的。所以在承认物也很重要的情况下,重提康德的人是目的老问题。

4.4　文明的八重性与生产的八重性

先谈八种文明:

格物的共时态人类社会研究=物质文明建设

致知的共时态人类社会研究=行政文明建设

诚意的共时态人类社会研究=精神文明建设

正心的共时态人类社会研究=心灵文明建设

修身的共时态人类社会研究＝利益文明建设

齐家的共时态人类社会研究＝家庭文明建设

治国的共时态人类社会研究＝制度文明建设

平天下的共时态人类社会研究＝环境文明建设

八种文明对应于八种生产：

格物的历时态人类活动研究＝物质生产

致知的历时态人类活动研究＝经济基础生产

诚意的历时态人类活动研究＝精神生产

正心的历时态人类活动研究＝心灵生产

修身的历时态人类活动研究＝利益生产

齐家的历时态人类活动研究＝人的生产

治国的历时态人类活动研究＝上层建筑生产

平天下的历时态人类活动研究＝天人关系生产

如果用第二章 2.4 节的知、止、定、静、安、虑、得、道表示认识论与本体论相统一的格物、致知、诚意、正心、修身、齐家、治国、平天下，则有：

知＝物质生产活动与物质文明建设

止＝经济基础生产与行政文明建设

定＝精神生产与精神文明建设

静＝心灵生产与心灵文明建设

安＝利益生产与利益文明建设

虑＝人的生产与家庭文明建设

得＝上层建筑生产与制度文明建设

道＝天人关系生产与环境文明建设

以知、止、定、静、安、虑、得、道构成八行一列的列向量 A，得到：

$$A_{n+1,8\times1}=[A]_{8\times8}\cdot A_{n,8\times1}$$

$$A=[A]_{8\times8}\cdot A_n=[A]_{t=n\triangle t}$$

$$A_{n+1}=[A]_{8\times1}\cdot A_{n+1}=[A]_{t=(n+1)\triangle t}$$

这样的 A 矩阵就有 $8\times8=64$ 个元素，表示 8 种生产之间的相互关系，进一步再将每个元素分解为历时态的生产和共时态的活动，也可以再写出两个矩阵方程：

$$B_{n+1,8\times1}=[B]_{8\times8}\cdot B_{n,8\times1}$$

$$C_{n+1,8\times1}=[C]_{8\times8}\cdot C_{n,8\times1}$$

这里 B 矢量代表物质生产、经济基础生产、精神生产、心灵生产、利益生产、人的生产、上层建筑生产、天人关系生产组成的八行一列的矢量。下标 n 为自然数，表示时间 $t=n\triangle t$ 时间值；下标 $n+1$ 为自然数，表示时间 $t=(n+1)\triangle t$ 时间值。同样 C 矢量代表物质文明建设、行政文明建设、精神文明建设、心灵文明建设、利益文明建设、家庭文明建设、制度文明建设和环境文明建设。C 矩阵虽然也包括 $8\times8=64$ 个元素，但一般我们可以假设 C 为对称矩阵，独立变化的元素仅有 36 个。这样根据中国易经，过去的历史可以由 B 矩阵的 64 卦来刻画，过去的历史不同时强制同时后可以由 64 卦对称排列以后来刻画[7,8]。我已经得到了对称排列后的 64 卦。至于 8 卦的初始设定，各位读者可以随心所欲，而 A 矩阵的 64 卦，也可

以由 64 卦需要预测未来的特点对于 64 卦进行重排,所以 3 个矩阵都是有用的。

这样对易经 64 卦进行重排以后,体现了一切从实际出发(时间有先后,用牛顿力学的目光),实事求是(总结过去,用爱因斯坦相对论的目光)的前提下,思考未来怎么办(时候未到,但既然不得不去存在,用信息论的目光筹划一下未来还是比较必要的,用海德格尔哲学的目光)。用数学的目光来看,周易并不神秘,主要涉及 3 个 8×8 的矩阵。当然展开来写,故事就多了。

参考文献

[1] 任伟. 数学化的场论:球面世界的哲学. 北京:科学出版社,2013.
[2] 帕特里夏·奥坦伯德·约翰逊. 海德格尔. 张祥龙,林丹,朱刚译. 北京:中华书局,2002.
[3] 鲁品越. 走向深层的思想. 北京:人民出版社,2014.
[4] 海德格尔. 存在与时间(中文修订版). 2 版. 陈嘉映,王庆节译. 北京:商务印书馆,2015.
[5] 张汝伦.《存在与时间》释义. 上海:上海人民出版社,2012.
[6] 段德智. 主体生成论:对"主体死亡论"之超越. 北京:人民出版社,2009.
[7] 廖名春.《周易》经传与易学史新论(修订版). 北京:中国人民大学出版社,2014.
[8] 廖名春. 周易经传十五讲. 北京:北京大学出版社,2004.

第五章　道德与信仰哲学

本章提出一种道德来源于信仰，信仰又来源于生活的哲学观点。这里的信仰可以指宗教的信仰，也可以不指宗教的信仰。某种意义上对信仰作了某种泛化，认为每个人都有信仰。这是本书提出的一种哲学的信仰概念，低于宗教的信仰，但又高于普遍的信念，或者人格概念。信仰代表每个人在对人处事和待人接物的现实生活中逐渐形成的生存方式和生活方式，代表每个人相对稳定和连续变化的世界观、价值观、人生观。代表每个人对人处事和待人接物方面的一些基本的原则立场和行为惯性、话语方式、行为准则等。信仰指每个人通常在和平共处情况下的人格和在有冲突时把什么作为第一优先的内在信念和行为方式。这种第一优先是可以视情况变化而改变的，但变中还有不变的充足理由，也许别人看不出的充足理由，但自己深知的充足理由。第三章长篇引用了马克思对宗教的观点，算是先行地为本章的信仰学说做出了某种铺垫，说明信仰来源于生活的合理性。这样才能达成人与人之间对每个人信仰的理解和宽容。信仰学说之所以能为道德奠基，也是因为其来源于生活。

记得外甥女五岁的时候，她希望自己当一个乖巧的小朋友。但乖巧固然很好，马上她就遇到了难事，既想乖巧又想吃零食。而我已有言在先，再想吃也不能吃，做不到这一点就不乖巧。外甥女很真诚，很想暂时不乖巧一下，还是先把零食吃了，并且坦言做不到不吃。但通过一年的训练，这里训练可以理解为一种教化，道德教化，外甥女再不吃零食了，因为她建立了再想吃也不能吃的信仰。即使外公想买好吃的给她，她也不要了，还建议外公也不要吃，而且能说出充足理由。孩子既如此，成人更应奉行。

5.1　信仰的八种典型

按照本书哲学体系，诚意至上，就是把自己当做神，其实是一种无神论，自己就是神，其他没有神，这是一种极端利己主义。现代西方人，以及部分中国人现在实际上就这种信仰。早年美国石油大王洛克菲勒教育他的孙子，不要相信任何人，包括不要相信自己的爷爷。因为爷爷也可以把你摔在地上，话音刚落，还真就将他孙子摔在地上。说明世界上只有自己才会替自己着想，而任何别人都有可能害你。第三章已提到在日本电影《华丽的家族》中，就有亲生父亲逼死自己也当了资本家的儿子的故事，这从反面说明了这种信仰的现实合理性。从正面来讲，哲学家和经济学家亚当·斯密为利己主义作了最大限度的辩护。因为利己主义是一种正当的权利，根本上不同于自私自利。而且不仅如此，提倡利己主义比提倡自私好，提倡利己主义也比提倡大公无私好，据此亚当·斯密提出了看不见的手调节社会矛盾的著名学说。换成中国哲学的术语，民间早就有“人不为己，天诛地灭”的说法。因为随着社会化大生产的到来，全球一体化，真要为己，往往只能先为他人，才能达到为己的目的。比如自己要挣钱，就得先为别人做事。不管多么能干的政府，都不可能为每个人考虑周全，因而还得个人自力更生。做好自己，才能成全大家。

与个人至上主义类似,存在着家庭至上主义,本书多少有一点家庭至上主义。家庭至上主义往往伴随着祖先崇拜,中国民间至今都还有清明节,农历 7 月 15 日也要为逝去的亲人烧纸祭奠。烧纸的意义是为祖先“带去”钱,象征着祖先虽然死了,但仍然由子孙后代赡养,没有被子孙后代忘记。清明节子孙还要去上坟,同逝去的祖先说一会话,缅怀一下祖先的丰功伟绩。现实生活中,中国人就十分看重家庭成员的情感联系,关心每个家庭成员的成长,尊老爱幼。家庭成员之间可以同呼吸共命运。父母自己再苦再累都要把自己的子女培养成才。我妈妈是一个农村妇女,把我供到博士毕业,十分不容易。我妈妈基本上十多年没有休息过一天,到了大年三十晚上还要赶做布鞋,为的是五个子女大年初一有新布鞋穿。以前也有一部《世上只有妈妈好》的电影,十分感人,很多人看了都会流泪。孟子的妈妈为了孟子好好读书也三次搬家,并且对孟子要求很严格。对于多数中国人而言,家庭和睦是十分重要的,而父母离婚多数情况下对子女不好。

对中国人而言,成为圣人也是一种信仰。什么是圣人,就是善于对人处事的人就是圣人,比如孔子、司马迁、司马光、曾国藩之类就是圣人。大家都要向圣人学习,虽然明知做不到、达不到圣人的水平,但是也应该心向往之。所以可以不严格地称之为信仰(信念)。王阳明早就说过,满街都是圣人。当然不可能满街都是已达到圣人标准的圣人,实际的意义在于满街的人都有做圣人的信仰。古时候圣人是供在孔庙里让大家敬拜的,现在虽然不拜了,但这种流淌在血液中、浸透到人格里的东西在现实中还有很大力量,很多人还是以孔孟之道作为对人处事和待人接物的标准。这就是信仰的结果。

西方的泛神论,理解为斯宾诺莎哲学中的神(神即为大自然),不是对人处事圆滑练达,而是一切按自然(这里的自然比汉语的意义广,近似于中国的天)必然性来行事,根本就不用思前想后,一切所作所为全是必然的、和谐的,也就是莱布尼兹所谓的前定和谐。斯宾诺莎的神不仅前定和谐,后定也是和谐的,任何时段的中间也是和谐的,一切都是铁的必然性。这要求人们对宇宙中的万事万物有多么通透的了解和把握啊。后来黑格尔的绝对精神有斯宾诺莎的神的意味。斯宾诺莎的神包括过去、将来、现在,包括自然界,包括人类社会、天,也包括天外之天。因为斯宾诺莎的神是至大无外、至小无内的实无限,具有最大的包容性和最高的完满性。既有人们理解的,也有人们不理解的,既有人们可知的,也有人们不可知的无限丰富性,神=人和物,一个实体两个属性。

作者认为,按本书体系,基督教的上帝在造物主的意义上可以等于格物,也就是物质生产劳动的神圣化、崇高化、神秘化。基督教的上帝也是可以用完备二元论来理解的,圣父、圣灵、灵子加上非神的自然,不是神的自然作为第四个元素。这样就改写了德国哲学家谢林的启示神学。人世间有罪恶,并不能否认上帝的全知、全能、全善。因为自然界是非神,上帝在我们之中更在我们之外。要到神那里去还有很长的路要走。耶稣说我是光,是真理,是生命,但光只是照亮每个信徒到达神国的道路(完备二元论的第四个元素),脚下的路却要靠自己来走。作者认为,基督教教义也可以按中国文化来解释,为此岸世界的信仰,不必非分彼岸和此岸。设定一个时间区间,一切过去的事都有上帝的应许,一切将来的事都有上帝的看顾,一切当前的事都有上帝的同在,我们还愁什么呢?完全是此岸的,不必过于强调永生不永生,因为每个人离死还远,永生不永生并不要紧,要紧的是在这个时段有什么用?这里面涉及本章要讨论的道德的信仰基础问题,永生的设定是对没有永生的虚幻的反映,是对死亡的叹息和慰藉,是对今生苦难的抗议,是对当下困境的麻痹,

是人民的鸦片。按马克思的说法，还得从现实找原因。不是上帝造人，造万物，而是人造“上帝”，造万物。斯宾诺莎从自然的意义上否定了神的真实存在，我们从社会的意义上否定了神的真实存在，说明了“上帝”的本质。

佛是一些人信仰的对象。按本书的哲学体系对应于修身，或者社会化的物。按照斯宾诺莎规定就是否定的说法。大家争来争去的产权证书、资格证书，分割未来剩余价值的股票、债券、金融衍生品，乃至人世间一切万事万物，都是妄，不值得去追求，不就是一些利益吗？这是人对身外之物解脱的一种态度。佛学本身博大精深，有兴趣的读者可参考熊十力的《新唯识论》。惠能所作的偈颂：“菩提本无树，明镜亦非台，本来无一物，何处惹尘埃”是较为彻底的否定[1]。同时也使佛教信仰生活化、当下化。挑水砍柴都能成佛，使道德的信仰基础推进到日用常行。对佛的信仰深深影响着中国传统文化近千年，我们应去除佛学的糟粕，保留佛学的精华，比如生态环境保护、看淡物质等，但我们还是应提倡积极入世。

包括人在内的自然至上主义就是老子的道。道也是中国很多人的信仰对象[2]。老子《道德经》的开篇就很有哲学味：

“道可道，非常道，名可名，非常名，无名，万物之始，有名，万物之母。故常无欲，以观其妙，常有欲，以观其徼。此两者，同出而异名，同谓之玄，玄之双玄，众妙之门。”

在本书第一版第 243 页进行了独特的翻译，在此重译这段话如下：

自旋为 1，自旋为零，是光；

自旋为 2，自旋为 1，自旋为零，是引力。

万物之始，无质量，

有了质量，才有万物。

引力没有方向，因此可正可负，

光有方向，所以时间有正定性，

光与引力，同出于宇宙微波背景辐射。

虽然名称不同，对应于 $\omega^4=1$ 和 $\omega^4=-1$。$\omega^8=1$ 是质量的现身，$\omega^4\times\omega^4=\omega^8=1\times1=-1\times-1=1$，这就是玄之又玄的含义。我认为老子《道德经》最让人不可思议的是在几千年前就“发现”了宇宙微波背景辐射。其实老子《道德经》里的这段话体现了本书第一版中“绝对静止＝绝对运动”的思想。

同谓之玄，但既然异名，就不可能一样，一个对应于 $\omega^4=1$，另一个地应于 $\omega^4=-1$，玄之又玄代表 $\omega^4\times\omega^4=\omega^8=(-\omega^4)\times(-\omega^4)$，真是众妙之门。

以下仅摘录文献[2]关于道的现代汉语翻译如下：

“道是那样神妙而永恒，它就是深妙莫测的母体，深妙莫测母体的生殖之门，它就是天地的本根。绵密不断，川流不息，它的功用无穷无尽。”[2]25

宇宙微波背景就是从四面八方拥抱着每一个人的母体。绝对温度 2.75K，是绝对运动的，也是绝对静止的。为时间和空间奠定绝对的基础。

“道体虽然空虚无形，它的作用却无穷无尽，深邃而博大犹如万物的主宰。它不露锋芒，消解纷争，与日月齐光，与万物同生，它是那样深不可测，仿佛是若存若亡，我不知它从何而来，似乎是天帝的祖先。”[2]18

本书认为宇宙微波背景辐射就是道的物质化现身，它有没有生命性和精神性暂可存而不论，它是自有永有的，不需要是谁的儿子。

“想看看不见叫做‘夷’,想听听不到叫做‘希’,想摸摸不着叫做‘微’,这三者难以深究,它们原就合为一体,这个‘一’,它的上部不太明亮,它的下部也没太昏暗,难以名状,无边无际,回归于‘无物’的境地。它是一种没有形状的形状,没有物体的形象,所以把它叫做‘惚恍’,迎着它却看不见头,尾随它却看不见背后。秉承这亘古已有的道,就可以驾驭现存的万物,能够知晓宇宙的本始,这可说是‘道’的规律。”[2]55

这说明了道的另一面,也就是不同时强制同时的一面,说明了宇宙微波背景辐射的各向同性性。它是与光很不一样的东西,光有头也有尾,而道无头无尾。光的前面明亮,后面昏暗,而道却是前后、左右、上下都一样不明不暗。所幸人类社会发展到今天,已经可以用各种方法探测到这个“道”了[3]。

“有物浑然一体,先于天地生成。无声而又无形,独立长存从不改变,循环运行永不停,可以说是天地之本根。我不知它的本名,给它取号叫‘道’,勉强取名叫‘大’。大到天边又无所不至,无所不至而运行遥远,运行遥远又回归本原。所以说道大,天大,地大,王也大。宇宙间有四大,王居其中之一。人取法于地,地取法于天,天取法于道,道本性自然。”[2]99

海德格尔的天地人神四方游戏很可能来源于老子《道德经》。道法自然,说明自然至上性。

“道总是无名的,是朴。‘朴’虽然细小,天下却没有谁能支配。侯王如能保有它,万物自然会宾服。天地之气阴阳交合,就会有甘露降下。民众不曾给它指令,却自然分布均匀,万物开始制作就有了名。既然已经有名,就应知道有个限度,知道这个限度,就能避免危险发生。‘道’为天下所归,如同河川流入江海。”[2]124

这一段讲道为万事万物提供了度,而无人可改变道。为什么万物归于道呢,因为它的温度接近绝对零度,只 2.75K,温度总是从高温到低温。

“后者道之动,弱者道之用,天下万物生于有,有生于无。”“道的运动是反复的,道的作用是柔弱的,天下万物生于有,有生于无。”[2]155

道的起伏产生光,光伴随着引力。天下万物生于有质量的东西,而有质量的东西生于无质量和电中性的光。

最后一种信仰对应于本书体系中的社会化历史性的场,也就是对天理的信仰,对本书空集的信仰。天理二字是程氏兄弟程颢(公元 1032－1085 年)、程颐(公元 1033－1107 年)自身体贴出来的,经过朱熹的发扬光大,长期成为中国封建社会的主流意识形态。程颢说:“吾学虽有所受,天理二字却是自家体贴出来。”[4]虽然存天理,灭人欲已经非常不得人心,而且饿死事小,失节事大,更是违背人性。但排除这些古典解释的负面结果之后,天理还是有其哲学意义的。天理其实就是社会至上性意义上的人理,主要是统治阶级的理,是有很强的阶级性的,是对康德二律背反的反动。一方面,根据康德二律背反必然存在,另一方面,根据哥德尔不完备性定理,必有一个真命题是既不可证实也不可证伪的,在任何复杂于加减乘除的体系内。但是,如果从体系外附加一个条件,也就并不存在二律背反了。康德的纯粹性批判根本就不对,因为没有纯粹理性,只有阶级理性、集团理性。天理之说作为官方意识形态当然是有它的问题的。但作为老百姓,相信天理存在的人也还是有的。按马克思的说法,这只能从现实生活来找原因,往往意味着现实生活中天理不存。在西方哲学中有历史理性之说,包括在德国古典哲学之中,甚至更早的斯宾诺莎哲学之

中，都有历史理性。但社会化历史性的场在中国语境中还是称为天理更好。因为天理可以是不说出的理，是人心中的理。每个人心中某种意义上就有天理，天理与良心也可相通。这是为道德奠基的信仰，在本书意义上的信仰，是源于生活的，不必畏惧天字，毛泽东有“天若有情天亦老，人间正道是沧桑”的著名诗句。

以上根据本书的哲学体系，对每一个世界进行至上化，得到了八种基本的信仰，当然，人世间绝不仅仅只有这八种信仰，甚至这八种信仰也不是人世间最主要的信仰。后文论述道德时需要讲这八种信仰，比如将物至上化，就得到商品拜物教、货币拜物教、符号拜物教、品牌拜物教。

5.2　善与至善的辨析

道德离不开善恶，但在讲善恶之前，很有必要先讲清楚善本身。

根据康德人是目的的口号，认定善本身就是人本身，每个人本身在自在之物的意义上就是善，这是认识论上的善本身，脱离一切有善恶的事。同样在社会意义上的善本身就是家庭，每个家庭都是善本身，在自在的社会意义上的善就是善本身，有别于个人、集体、集团、国家和全人类，个人是作为自然界的善本身而存在的。所以在道德领域，我们是彻底的人本主义者。因为善本身是一切善的事物的根据和源泉，有如宪法对于国家其他法律的统领作用。强调人的道德意识、道德情感、道德行为、道德语言都起源于善本身，为善本身服务，来源于善本身而归于善本身，道德之道在于善本身。

而止于至善则指对人处事（自然意义上，或者说生产力意义上）和待人接物（社会意义上或生产关系意义上）。所以，在本书中的至善相当于一般书上的道德或伦理。在本书的哲学体系中分别对应于致知和治国。而格物之事和关于物的修身则分别对应于自然意义上的善恶和社会意义上的善恶。而自然界的人和物在本书看来是无善无恶，社会化历史性的场也就是空集包括当下的善恶、善本身、至善、超善恶和隐藏在每个人心中的心照不宣的、秘而不宣的、没有道理可讲的信仰性的善恶评判。

将善恶的标准推进到生产劳动领域，善恶并不完全是思想上层建筑或者政治上层建筑的问题，道德必须推进到物质生产领域、人的生产领域，这也是第三章费了大量篇幅来关注生产领域的原因。因为道德为利益关系、生产关系、权力关系、权利关系奠基，直接影响着生产力的发展，资本主义最大的恶只有从生产领域才看得清。所以道德的善恶只在意识形态上是说不清楚的，必须深入到物质生产领域的生产、流通、交换、分配、消费等物质层面才能讲得清。当然一旦到了生产领域就不是几个条文、几个文件就能讲得清的，事情复杂了不只百倍，重在具体问题具体分析。案例有了至上性，而不是规范条文。不是理论智慧在道德领域生效，而是实践智慧——一切从实际出发、实事求是的实践智慧。正是由于引入的社会化历史性的场具有主体间性的穿透性，可以穿透物，才能在人世间一切地方建立起道德的场、道德的天理、道德的法庭。

所以本书的道德哲学主要研究社会化历史性的道德场，一切外在的规范只是作为外加入射场来起作用，而一切道德主体实际的道德意识、道德情感、道德行为、道德语言才是社会化历史性的道德信仰场的关键。根本的意思按本书体系当然是要持存了一个时段才谈得上实际。

从人与自然界的关系角度看,本书的道德哲学包括作为无善恶的自然界(包括人在内)和有善恶之分的事,作为善本身的每个人和止于至善的人和事。从人与社会的关系角度来看,本书的道德哲学包括非善非恶的社会化历史性的场的空集,包括有善恶之分的物作为善本身的每个家庭和止于至善的人和物。物在社会意义为什么有了善恶呢?因为社会意义上的物是与所有权、使用权、收益权、转让权、继承权等相关的,涉及物的分配和消费,当然是有善恶的了,不同于无善无恶的自然界的物。这是根据哲学体系的一种自然的划分,但为了将来讨论方便,将八个世界分别两两配对,变成四个对子如下。

个人与家庭配对代表人的生产领域和人的家庭生活领域。这是道德的根本领域,因为这是一个善本身的统一的领域,是善在自然界和人类社会中的统一。这个领域的追求目标是幸福的生活,幸福的家庭生活和幸福的个人生活。按社会唯物主义的观点,社会要落实到家庭,唯物要落实到个人,因为个人属于自然界,当然是物。但个人又是与家庭相关的物,很好地体现了辩证唯物主义与历史唯物主义。对应于古典政治哲学的齐家和诚意。每个人在自己家里总是应该讲诚意和诚信,过一种真诚的无伪的生活才好。在自己家里都不诚,走上社会还怎么诚。同样,尽管在生产劳动中有时不得不过异化劳动的生活,在与人交往中有时为了利益、权利、荣誉、金钱不得不戴上面具,做一些违心的事,说一些违心的话,但不主张在家庭中也来这一套的。王伟光讲共产党员不能在党内讲等价交换,我想大多数人也会赞成在家庭内部也不能讲等价交换。面对家庭成员之间的权利和义务是不能按技术理性来算计的。在家庭内部要讲一点按需分配。如果按等价交换,父母的哺育之恩价值几何,儿女又如何偿还?之所以提到这件事,是因为在生活中时常出现晚辈给老人算这笔账的怪事,是很不道德的行为。不能把资本主义的那一套用于家庭成员之间的权利和义务。以我个人而论,如果算账的话,父母供我到博士毕业,也就花了720元人民币而已,与前面提到的我父母供我到博士毕业很不容易,似乎颇有些矛盾,如按资本主义的一切算账的方式,当然720元并不算多。不过当时720元比现在72万元还要多,价值尺度上错了位。但是不是给父母72万元就行了呢?我想给720万元也不够的,父母对子女的恩情是无价之宝,是不能只用金钱来计算和回报的。应当永远感激父母的养育之恩。给钱只是对父母的养,关键还要从情感上孝。孔子早就批评了这种做法。无论给多少钱都是不够的,子女对父母要始终认识到自己做得还不够,还要争取做得更好。我想除国家法律规定的赡养义务、生活上照顾、精神上慰藉外,从道德层面,主要是对父母要敬重、要亲切、要关心、要爱护。这里爱护包括爱戴和保护,保护包括护短,父母的短处不要去揭,而要尽量帮助将父母的短处变成不是短处。比如有多个子女的父母,很容易护着生活相对贫困的子女,而且很可能护来护去效果也不佳,作为其他子女则不应该去揭父母的这个短处,而是应该协助父母帮助困难姊妹脱贫。这也是孝敬和孝顺的道理。

道德哲学的第二个重要领域发生在作为自然界的事和作为社会中的物这两个世界中,对应于中国古典政治哲学的格物和修身。这两个领域按本书体系也就是马克思的整个物质生产领域,包括生产、流通、交换、分配、消费领域。这个领域是技术理性第一优先的领域,也就是说是生产力发展和变化的领域。这是生产在本体论和认识论上的统一,但也有道德问题贯穿始中。在这个技术理性主导的物的生产的世界里,照样可以看到道德行为、道德语言、道德情感、道德意识。同样,在前面讲过的个人与每个家庭的第一对矛盾中,以幸福为主要追求目标,但同样存在道德行为、道德语言、道德情感、道德意识。前面

讲了，将道德深化到物质生产领域是本书的一大特色，反映了学习资本论的成果，反映了对马克思的理解和解释的深度和高度。同时也是对中国古典哲学的一种吸收和扬弃。修身当然不能只是关起门来读圣贤书，也要到生产劳动中与广大工人、农民、劳动者等打成一片才能真正做到修身。修身必须落实到每个人每一天的生产劳动中去。要在对象性活动中显示每个人的本质力量。要在现实的生产劳动中显示自己的体力、脑力、创造能力、意志能力、认知能力、情感能力、交际能力和领导才能、学习能力、适应能力、应变能力、具体问题具体分析的能力、理论联系实际的能力。要通过格物而修身，在修身中格物。在改变世界和认识世界中改变自己和认识自己，在认识自己和改变自己之后加入到改变世界和认识世界的实践活动中去。在实践活动中显现自己的道德行为、道德语言、道德情感、道德意识，并在共在的实际生活中学习和懂得他人和大家的道德行为、道德语言、道德情感、道德意识。

第三对矛盾是自然界（或生产力）意义上的对人处事和社会（或生产关系）意义上的人和物，对应于中国古典哲学的致知和治国。从个人来看就是对人处事能力的培养和待人接物能力的形成，从国家（本书国家总是指全人类，再次说明）层面就是行政能力和整个上层建筑能力的建构能力。这是一个价值理性主导的世界，将行政专门从上层建筑中抽出，是为了强调与社会生产力紧密相关的行政能力对整个国家的综合国力和每个人和每个家庭的幸福感都至关重要。因为每个人、每个家庭生活的小圈子很重要，每个人往往都在某个单位上班，每个家庭往往都在某一社区。单位领导怎么样和社区领导怎么样与每个人和每个家庭的幸福感关系极大。单位和社区是通过若干个领导人代表上层建筑的具体化和现实化。比如以前生产队的社员主要与生产队长、大队支书打交道，家庭当然就在生产队里。现在城里人往往都有一个依托单位和住宅小区，这些领导人的道德行为、道德语言、道德情感、道德意识对人民构建幸福生活起到至关重要的作用。所以行政从上层建筑中单独抽出有其合理性。这一领域绝对是追求公正的领域，是政治挂帅的领域，毛泽东的德智体全面发展的次序肯定是正确的。一方面，道德是由每个人每个家庭为了每个人每个家庭建立的；另一方面，道德作为国家法律的必要补充，又总是通过各级领导机关提倡、宣传、教化，并通过各级领导干部以身作则加以示范的。这既体现了马克思市民社会决定国家的唯物主义观点，又体现了上层建筑对经济基础的巨大的反作用。每个时代都有国家塑造的道德典范，古有《列女传》，近有黄继光、邱少云、雷锋、焦裕禄、陈景润等，现有社会主义荣辱观和社会主义核心价值观。

第四对矛盾是包括人在其中的自然界和由每个活着的人照亮的社会化历史性的场。对应于古典政治哲学的平天下和正心。我认为自然界是无善无恶的，包括人在自然界的意义上是按本能生活的，与其他动物按本能生活一样，因此没有善恶的分别，人是与自然界万物一体的，是一个使用价值的世界，是完全感性的世界。本书理解的自然界是在天人合一前提下的天人二分的自然界，包括自然化人、人化自然、自然化人与人化自然、与人无关的无化自然（总是在某一时段讨论问题）。自然界完全是可以按辩证唯物主义理解为世界的统一性在于它的物质性的无意义、无价值，无目的纯粹的自然而然的自有永在的自然界，有铁的必然性，也就是斯宾诺莎的无神论的神。而社会化历史性的场是每个人都有了他的属于人的无机身体的世界，一切的人、物、事都有了意义，是一个属于人的意义世界。社会化历史性的场完全是由活着的每个人参与建立并共同感应着并响应着的。按照王阳

明哲学,就是靠人心中的一点灵明来显现出来的。这个世界很好地显示出人区别于动物的一点地方在于人的那么一点灵性。这里面也包括很多尚未现实化的心思意念和没有显现出来而存在于每个人心中的有待充实的关系和联系。作者认为王阳明是继老子之后有点哲学意味的中国古代哲学家[4-7]。社会化历史性的场既可以理解为是有善有恶的(就个人与人类社会的相互生成而论),也可以理解为非善非恶的,因为很多善恶的心思意念,包括善恶的关联,如果还只在心中,还没有实行,还没有持存一段时间,既然法律都还不追究其罪行,按照对人宽容的原则,也不定性为有善有恶。当然非善非恶并不等于无善无恶,比如自然界的无善无恶是理论的预设,是不用讨论的,不能争论的。而非善非恶是可以争论的,可以追究的,可以转化的,是与善和恶有关联的,是有待充实的善和恶,是有待进一步查证的善和恶。比如过去几千年的事,很多难以查实,仅以非善非恶论处。又比如有些宗教,只要有了恶的念头就是罪过了。有了爱心,尽管尚未行动也是好的。所以无善无恶与有善有恶之间的辩证统一或有无之辩在于非善非恶。同样完全感性的,看得见、摸得着、听得见的自然界与看不见、摸不着、听不见的社会化历史性的场也通过人的灵性统一起来了,通过人与人之间物与物的交换、语言的沟通、行为的交往、情感的交流而客观地(也就是主体间性地)存在着。

总之,道德哲学的研究可以通过人类生活的追求真、追求善、追求美、追求平安的四种目的性活动来刻画。个人与家庭这一对矛盾只追求善的活动,这一问题以善为第一优先,以追求幸福为具体内容,社会层面就是追求亲民。以道德意识为主要形式,产生出四种存在方式,也就是以善为第一优先(信仰)的道德行为(涉及整个物质生产领域,经济基础)、道德语言(包括文字、规范、文件、规定、规则,涉及整个上层建筑领域)、道德情感(涉及自然界与社会化历史性的场)、道德意识。同样以事与物的矛盾出发,这一问题是以每个人追求本真的生活的真为第一优先的,从社会层面就是追求效率,本来道德不是主要目标和主要问题,但同样可以从道德行为、道德意识、道德情感、道德语言四个方面来把握。相仿地,从人和事与人和物的本体论和认识论的统一,这本来是以社会公正为第一优先的领域,从个人层面是追求平安的领域,国泰才能民安,道德是个相对次要的领域,不苛捐杂税,政府不折腾,老百姓才能平安。照样可以产生出道德行为、道德语言、道德情感、道德意识。最后从平天下到正心,这本来是自然而然无善无恶与超越性的领域,从社会层面表现为自由和爱民的领域,从个人层面则体现为以美为代表的超越性的追求自由、追求美、追求超越、追求文明、追求快乐的领域。同样,道德不是最主要的矛盾,但从这种追求快乐的、追求愉悦的人类活动中照样可以有道德行为、道德语言、道德情感、道德意识的问题。一言以蔽之,本书以 $4\times4=16$ 的方矩阵或者说张量来刻画道德的来源。柏格森探讨了道德与宗教的两个来源[8],倪梁康探讨了道德的三个来源[9]。按照本小节的研究范式,柏格森的学说可以写成 $2\times2=4$ 的方阵,按对角线占优的方式变成 4 个来源。倪梁康的学说可以写成 3×3 的方阵,同样按对角线占优的方式变成 9 个来源。这里对道德第一优先(信仰)占据对角线上的元素,写成张量形式,借鉴了爱因斯坦广义相对论对引力场的来源 $4\times4=16$ 个元素来刻画的方式。这样避免了以前很多说不清楚的问题,当然第一个元素是道德的善本身。也就是由个人与家庭产生的个人与家庭的道德问题(用矩阵就是 a_{11},如果道德问题写成矩阵 $A=[a_{ij}]_{4\times4}$的话)。这又可以从个人和家庭的历时态和共时态进行研究,有一本《家哲学》的著作大致处理了这里的问题[10],当然不是按本书的范式来展

开的，主要讲了西方以个人为中心的家庭和东方（包括中国）以家庭为核心的个人，以及家庭的历史演变和现状。而孟子的所谓："恻隐之心，仁之端也，羞恶之心，义之端也，辞让之心，礼之端也，是非之心，智之端也。人之有是四端也，犹其有四体也，有是四端而自谓不能者，自贼者也。"[7]按照本书体系是以道德情感为第一优先（信仰）来抒发的道德情怀，排在矩阵中的位置是：

a_{21}＝羞恶之心，礼之端也（从情出发论人和家庭）

a_{22}＝恻隐之心，仁之端也（从情出发论情）

a_{23}＝是非之心，智之端也（从情出发论事物）

a_{24}＝辞让之心，礼之端也（从情出发论对人处事和待人接物）

a_{33}＝从事物出发论事物＝道德行为

a_{44}＝从人和事与人和物出发论人和事与人和物＝道德语言

a_{22}＝道德情感

所以本书哲学体系道德意识决定道德情感，决定道德行为，决定道德语言。因为中国式的快乐是在幸福前提下和幸福基础上的快乐，所以道德情感还得让位于人本身，先要有人本身，才能有情感。人本身有了幸福的个人和家庭生活，所追求的物质上的感官快乐和精神上的审美愉悦才是健康的和幸福的。就算是论美，中国人历来强调尽善尽美的最高境界，善在前，美在后，所以如孟子的学说在本书哲学体系中不得不让位于人是目的的康德哲学，只是本书对康德哲学进行了唯物主义改造。本书的道德哲学继承了爱有差等的中国哲学合理内核，秉承了康德道德哲学德福一致的信仰，中国人大多数人相信"善有善报，恶有恶报，不是不报，时候未到"。也就是道德与幸福是一致的信仰，占据着大多数中国人的心，"不做亏心事，不怕鬼叫门"。凡事强调一个问心无愧，所以道德本质上是一种以自律为主的信仰。当然这里的自律是充分他律情况下的自律。a_{33}就是事物问题上的功利主义优良道德的寻求，这方面王海明的《新伦理学》有深刻阐释[11]。王海明也是从研究马克思的《资本论》开始研究关于优良道德的学说——伦理学，是把研究经济基础的功利主义推广应用到上层建筑研究，乃至关于国家治理的功利主义学说[12]。王海明还论述过国家学说，在此不做引用，感兴趣的读者可自行查阅。这里只引用王海明关于国家治理的22条道德原则体系[12]491－494。

（1）公正总原则：等利害交换。

（2）公正根本原则：权利与义务应该相等，亦即一个人所享有的权利应该等于他负有的义务，而他所行使的权利则应该至多等于他所履行的义务。

（3）贡献原则：亦即社会根本公正实在原则，社会分配给一个人的权利应该与他的贡献成正比而与他的义务相等。

（4）德才原则：亦即社会根本公正潜在原则，社会应该用人如器，根据每个人所具有的品德与才能的性质而分配与其相应的职务等权利。

如果运用这些社会公正原则解决每个人的各种具体权利的分配问题，那么便不难从中推导出如下四个社会公正分配原则，亦即四大平等原则。

（5）平等总原则：一方面，每个人因其最基本的贡献完全平等——每个人都同样是缔结、创建社会的一个股东——而应该完全平等地享有基本权利，完全平等地享有人权（这是完全平等）；另一方面，每个人因其具体贡献的不平等而享有相应不平等的非基本权利、

非人权权力,也就是说人们所享有的非基本权力、非人权权利与自己所做出的具体贡献的比例应该完全平等(这是比例平等)。

(6)政治平等原则:一方面每个人无论具体政治贡献如何,都应该完全平等地享有政治自由,亦即完全平等地共同执掌国家最高权力从而完全平等地共同决定国家政治命运;另一方面,每个人又因其具体政治贡献(政治才能+道德品质)的不平等而应该担任不平等的政治职务,从而使每个人所担任的政治职务的不平等与自己的政治贡献(政治才能+道德品质)的不平等的比例完全平等。

(7)经济平等原则:一方面每个人无论劳动多少,贡献如何,都应该按人类基本物质需要完全平等地分享基本经济权力(即按需分配);另一方面,应按每个人所贡献的社会必要劳动时间,而分配给他含有同量社会必要劳动时间的非基本经济权利,以便使每个人所享有的非基本经济权利的不平等与自己所贡献的社会必要劳动时间的不平等比例,完全平等(即按劳分配)。

(8)机会平等原则:社会所提供的发展才德、做出贡献、竞争职务和地位以及权利和财富等非基本权力的机会,是全社会每个人的基本权利,是全社会每个人的人权,应该人人完全平等。反之,家庭、天赋、运气等非社会所提供的机会,则是幸运者的个人权利,无论如何不平等,他人都无权干涉;但幸运者利用较多机会所创获的较多权利,却因较多地利用了共同资源"社会合作"而应补偿给机会较少者以相应权利。

以上 8 条道德原则属于公正范畴,以下 14 条道德原则属于人道范畴,人道有广义与狭义及正面与负面之分。

(9)广义的人道总原则:把人当人看(视人本身为最高价值而把任何人都首先当做人来善待的行为)。

(10)狭义的人道总原则:使人成为人(视人本身的自我实现为最高价值而使人实现自己的潜能,从而成为可能成为的最有价值的人的行为)。

(11)人道正面根本原则:"使人自由"。该原则具体表现为接下来 6 个原则。

(12)自由法治原则:一个社会的任何强制,都必须符合该社会的法律和道德,该社会的所有法律和道德,都必须直接或间接得到全体成员的同意。

(13)自由平等原则:人人应该平等地享有自由,在自由面前人人平等,人人应该平等地服从强制,在法律面前人人平等。

(14)自由限度原则:一个社会的强制应该保持在该社会的存在所必需的最低限度,该社会的自由,应该广泛到这个社会的存在所能容许的最大限度。

(15)政治自由原则:一个社会的政治,应该直接或间接地得到全体成员的同意,应该直接或间接地按照每个社会成员自己的意志进行,说到底,应该按照被统治者自己的意志进行。

(16)经济自由原则:经济活动应由市场机制自行调节,而不应由政府强制指挥,政府的干预应仅限于确立和保障经济规则,而在这些经济规划的范围内,每个人都应该享有完全按照自己的意志进行经济活动的自由,都享有完全按照自己的意志进行生产、分配、交换和消费等经济活动的自由。

(17)思想自由原则:每个社会成员都享有创获与传达任何思想的自由,或者说每个社会成员创获与传达任何思想都不应该被禁止。

(18)人道负面根本原则:“消除异化”。该原则具体表现为接下来的 4 个原则。

(19)经济异化原则:经济异化起因于人身占有、人身依附等非经济强制和私有财产、资本等经济强制,所以其消除可以归结为三个原则:一是消除人身占有,二是消除人身依附,三是消除私有制。

(20)政治异化原则:政治异化一方面源于一定的国体,源于阶级专政,这是整个阶级的政治异化,其消除原则是:消灭阶级专政和消灭阶级、消灭剥削、消灭经济异化,最终实现共产主义;另一方面则源于一定的政体,这是个人的政治异化。

(21)社会异化原则:社会异化源于社会之非法治、不民主、无人权和个人之缺乏自我实现的热烈追求,所以其消除原则是:创造法治、民主、人权的社会和培养热烈追求自我实现的个人。

(22)宗教异化原则:宗教异化一方面源于人们的情感渴求,神灵的信仰是人们摆脱在现实社会无法摆脱的苦难的手段,另一方面则源于人们的理智迷信,神灵的信仰是人们对于梦幻、死亡、命运等错误认识的结果。所以宗教异化的消除可以归结为四大原则:一是发展科学,破除引发神灵信仰的理智迷信;二是正确对待死亡,避免引发神灵信仰的死亡恐惧;三是发展生产力,消除导致神灵信仰的自然压迫;四是消除经济异化和政治异化以及社会异化,摆脱造成神灵信仰的社会苦难。

王海明示范了国家治理的道德原则,按本书哲学体系属于元素 a_{41},但还没有包括完全,因为还没有对基层单位的行政道德做出道德原则概括,也还没有包括家庭与行政主体(国家各级机关)、家庭与国家治理的道德原则,也就是说 a_{41} 这个元素只论述了 1/4,还有 3/4 有待展开。没办法,功利主义本来就来自西方,是以个人为本的,大谈自由和权利。但无论如何,对具体道德细则的研究,王海明确实深入细致得多,在这里主要是宏大叙事。对道德哲学画好框图,有 16 个元素有待研究,王海明的著作仅仅研究了一个元素的 1/4,还有很多的问题有待深入细致地讨论。

在陈来的《有无之境》第八章,关于有与无特别讨论王阳明的四句教[4]:

无善无恶心之体,
有善有恶意之动,
知善知恶是良知,
为善去恶是格物。

有所谓天泉证道所起的纷争。王门弟子王畿主张四无说[7]:“心无善无恶,意无善无恶,知无善无恶,物无善无恶”,钱德洪主张四有说:“至善无恶者心,有善有恶者意,知善知恶者良知,为善去恶者格物”。而王阳明的主张既不是四无,也不是四有,却又在某一方式同时容纳四无和四有。四句教本身是个有无合一体系[7]。

如果对比在自然意义上的四个元素,无善无恶的第四个元素是人在其中的自然界,对应于平天下或天下平。有善有恶意之动对应于诚意,知善知恶是良知对应于致知,为善去恶是格物对应于格物,这只是字面上的对应意义。意之动对应于事,相当于格物,知善知恶对应于人和事,是致知,知善知恶是良知对应于致知,为善去恶是格物,则是诚意,因为诚意是对致知的知,对格物的知,对平天下的知。所以可修改四句教如下:

无善无恶心之体,
有善有恶是格物,

知善知恶是良知,
为善去恶是诚意。

在社会历史领域可改写为:

非善非恶心之用,
存善去恶是修身,
止于至善是治国,
本善无恶是齐家。

因此,总共变成8句教:

无善无恶心之体,
有善有恶是格物,
知善知恶是良知,
只善不恶是诚意。
非善非恶心之用,
存善除恶是修身,
止于至善是治国,
本善无恶是齐家。

费了很大力气为"人之初,性本善"提供了一种辩护,这也是道德哲学体系的一种前提性预设(postulate)。现在不是性本善的问题,而是"人本善,家本善",每个人和每个家庭在任何时候都是善本身,这是本书道德哲学体系的出发点和落脚点。道德行为的一切标准仍然是邓小平的四句话:

人民拥护不拥护,
人民赞成不赞成,
人民高兴不高兴,
人民答应不答应。

对应于本书哲学体系的道德行为、道德语言、道德情感、道德意识。为了不使人民空洞化,必须从自然和生产力层面落实到每一个人,从社会和生产关系层面落实到每一个家庭。

既然本节标题为善与至善的辨析,这里先初步讨论一下手段善、至善、道德善、内在善四种善,以形成对善的初步印象。待完成善与至善的相互生成后,再回到这个主题。哲学史上早已提出了以上四种善的概念,但各个哲学家解释很不相同,顾名思义的话,能有一半正确就不错了。

按照本书的理解和解释,手段善指道德行为为主的善,体现在事物上。很明显,人参与生产劳动的生产流通、交换、分配、消费全过程本身还不是目的,目的在于每个人更好地活着,幸福地活着,也在于每个家庭的幸福,包括家庭成员之间亲密无间的关系、家庭的富足、家庭的平安和稳定。这里接受王海明的功利主义伦理学的观点[12,13],但有很大的不同。因为王海明的价值定义是完全客观的,属于物的第三性质,重点是贯彻唯物主义,大致相当于第四对矛盾无目的、无意义、无价值的包括人在内的自然界与由人照亮其意义和价值的社化历史性的场。首先王海明的哲学是如何可能的呢?他是坚持了世界的统一性在于它的物质性,坚持了一元论,离开了自然界物质(包括人造物)的属性不能谈论价值,

因此主要是一种事实性价值判断。当然同时引进了马克思的劳动价值学说，从而从物与人的关系体现出一定的人与人的关系，但这种体现具有间接性，是通过优良道德的载体、优良的道德规范来体现的，所以规范伦理学十分重要。而目光完全是主体间性的目光，与历史唯物主义更为接近。手段善首先的、第一位的是做事要以是否有利于增进每个人的幸福和每个家庭的幸福为标准、为目的。同样对物的分配、消费和交换也要以最终是否有利于每个人和每个家庭的幸福为准绳。这里所谓事，除了事情本身的技术层面外，更重要的是事中的人，这就有两部分人。作为管理人员的人和作为被管理人员的人，这些人通过事如何在事情中发生关系；这些人、这些事的时代背景、空间背景（在社会主义国家还是在资本主义国家）怎样；以及在地理上处于什么位置，在人口密度很大的城市，还是在偏远山区等。在手段善的领域仍然要以“人民拥护不拥护，人民赞成不赞成，人民高兴不高兴，人民答应不答应”为最终标准，但重点是要落实人民赞成不赞成。赞成不赞成可以进一步展开为知道不知道，理解不理解；是否充分地作了解释，是否取得了大多数人的谅解，是否对各利益集团的利益进行了充分的协调和兼顾。从手段善就可以看出，由于现实生活的多样化，必然形成利益主体的多元化，没有整齐划一的手段善。正如本书第一版[14]已经指出的，在物质生产领域至少要区分四种善，作为管理者的善，作为被管理者的善，作为关系协调者（整个国家各级机关）的善，还有在资本主义生产方式下资本家作为人格化的资本＝货币＝物和工人作为劳动力商品＝活物＝物的非人生活中的道德问题。与第一版的主要区别在于本书突出了这四种善都要以每个人和每个家庭的幸福为最终目的来讨论、鉴别、评判、裁定。

道德善就是善本身（限于本书体系中，在别的书中有别的意义），从个人层面，本书基本认同王海明将善本身（这里的）归纳为八个方面，按重要性先后重排为：贵生、自尊、诚实、谦虚、智慧、节制、勇敢、中庸。从家庭层面，依照以上八条可以移植过来：富生、尊严、诚信、谦卑、明智、勤俭、负责、和睦。在个人和家庭关系方面不主张追求资本主义的冰水，而应该温情脉脉，并且不只是温情脉脉的面纱。主张血浓于水的亲情至上，超越一切技术理性的算计。当然不是脱离算计，比如要勤俭持家，就要知道柴米之贵。权利与义务也得先算计一下，但可以算尽不能看尽，特别是在有利益冲突的时候，仍然把良好的人与人之间的关系放在首位。中国哲学中，正如傅佩荣所说[13]150：“儒家心目中的善是‘我与别人之间适当关系的实现’，因此只要我行善，则相关的‘别人’受到正面的启发，也会设法在他的角色上行善，这种教化才是深入人心的，也是儒家所向往的。”傅佩荣的这一解释已达到马克思人的本质在于其社会关系的总和的水平。本书将其修改为人的本质在其一切社会关联的总和，所以善与至善都体现在人与人的关系上，善本身体现在个人与家庭的关系上，在道德问题上，善本身就体现为家庭和睦、每个人健康长寿、每个人心肠好。

以上所引傅佩荣的话并不是断章取义，类似的段落还有[13]129：“那么，被列为‘善’的‘孝悌忠信’有何特色？孝是我与父母之间的适当关系，悌是我与兄弟姊妹之间的适当关系，忠是我与国君或长官之间的适当关系，信是我与朋友之间的适当关系，这四个字正好是五伦中的四伦。孟子当然强调五伦，他在《滕文公上》畅谈自己的儒家立场时，提及：‘圣人有忧之，使契为司徒，教以人伦，父子有亲，君臣有义，夫妇有别，长幼有序，朋友有信。’‘孝悌忠信’于此合而观之，可知孟子心目中的‘善’所指的是‘人与人之间适当关系之实现’。”

傅佩荣的这段解释有两个亮点，一是从五伦中抽出孝悌忠信，并将其现代化、时间化。

也就是将事情限定在某一时段来讨论,将适当的关系添加上社会化历史性的维度,中国古代哲学还是很有内涵的。因为中国哲学的框架从来不变,而且一开始就很丰富,所以只要将今天的适当关系替换过去的适当关系,将今天的术语替换过去的术语就行了,比如将长官替换成领导,将君臣关系替换成领导被领导的关系;将过去认为适当的君要臣死,臣不敢不死,改为今天领导全心全意为人民服务的关系,领导是人民的公仆、人民的勤务员的关系就可以了。当然封建残余的持存和消亡肯定还有待时日,这不是一个理论的问题,而是一个实践的问题。在与领导相处的时候,领导是什么,那是有相当的自明性的。第二个亮点在于不是适当关系,而是适当关系的实现,与本书一样,不是空洞的规范条文,而是规范条文的实现。所以本书突出上层建筑的实际,将行政,特别是基层行政单独抽出来。上层建筑的规定可以说无可挑剔,制度定得往往都还不错,关键在于规范的实现需要人来落实,落实到个人,落实到每一个家庭。实现当然要有时间性的概念,也就是说能持存多久。仅就学雷锋而论,这是读小学时候的事情了,关键在于能持存多久。所以道德的问题、善的问题是个价值论的问题,要从善的持存,也就是善的作用量=善的行为乘以时间,善的变化,也就是善的行为除以时间两方面来把握。比如形式主义的善,如学雷锋只学一天,只学一会儿,当然也是善,但善的作用量就不够大,至少不如一年学雷锋,甚至一辈子学雷锋大。另外从变化率来看资本主义社会虽然很不好,但总的来说比封建社会、奴隶社会、原始社会要好,自由还是更多一些,生活还是更富裕一些,尽管人们仍然受压迫受剥削。又比如现在的农民工,虽然还有很多劳苦和困难,但同以前生产队社员相比也是一个进步。以前的社员每天必须出工,到哪里都得请假,不够自由。种什么、种多少也完全由上级决定,生产队的自由较少。社员不能外出打工挣钱,只能在生产队挣工分。现在农民工进城虽然有很多不适应,但总还是比在农村挣得多一些,见识多了,文化娱乐多了,生活条件也比农村好多了。

傅佩荣总结道[13]130:"综上所述,可知孟子的'善'概念很清楚,必定落于'人与人之间的适当'关系来说,此关系若不适当,则是不善或恶。此关系未能实现,也是不善或恶。善与不善之间没有模糊空间。这样的善必须以实现,实践,做到为基本要求,亦即没有做到的就不是善,善是明确的行为。"无论道德行为、道德语言、道德情感、道德意识都是以持存了一段时间为准。因为人总是将自己的生活作为自己意识和意志的对象。所以道德意识也是感性的,有没有持存了一段时间的幸福感,有没有使每个人、每个家庭处于幸福的状态一段时间是善本身的定义。

细心的读者可能发现,适当的关系中什么是适当是一个有待进一步解释的问题,这就引出至善的问题。王海明认为至善是比善还要善的善[11,12],没法更善的善,是善的最高境界。这种字面理解也是对的,但不是本书的理解。本书的至善就是恰如其分,每个人对人处事、待人接物都恰如其分,就是至善。特别是作为领导人,作为治理全人类的领导人的对人处事和待人接物都恰如其分。因此,止于至善是一种理想的状态和境界,根本没有办法完全实现。但明知不能完全实现,个人和国家都心向往之。所以包括各级领导在内的每一个人都要认识到自己的行为还不够善,还没有做到止于至善,是一个永远的未完成时。只有更好,没有最好,只有不断完善自身,不断善待他人才是走在通往至善的途中。每一种社会制度都还有与时俱进、不断完善的余地。因为地球在运动,事物在变化,新情况新问题不断涌现,宇宙微波背景辐射始终在起作用。所以止于至善是一个渐近线,永远

达不到。但是作为一种理想，作为一种境界，可以心有敬畏、心有谦卑地不断地去追求。这也是善本身对至善的要求。由至善的社会化历史性，推导出恰如其分的社会化历史性，因此恰如其分就不是整齐划一的。以每个人对人处事和待人接物而论，因为物以类聚、人以群分，这就允许我们对不同的人说不同的话，以不同的态度对待不同的人和物，以不同的力量追求不同的物。所以在至善的意义上是要掌握好善与恶的平衡，至善并不是纯粹的善，是有善有恶的，既有必要恶（比如国家法律、暴力工具、道德规范就是必要恶[11,12]），也有绝对恶，比如吸毒，反党反社会主义都是绝对恶。对于绝对恶，对于敌我矛盾，当然要采用镇压的办法、专政的工具，这里也回答了德国哲学家谢林的启示神学中没有回答的问题。因为至善是有善有恶的恰如其分的处理方式，对于好人好事，是以无限爱来对待，是一种软爱；对于坏人坏事，也是以无限爱来对待，是一种硬爱。软爱是对人的尊重，硬爱是对坏人坏事进行处罚、教育、批评，责备也是对每个人自由意志的尊重。在善本身的个人和家庭中，父母对子女也是既有硬爱也有软爱，缺一不可。宗教当然不是纯粹的宗教，也是现实的片面反映，希特勒就是绝对恶，是屠杀了很多人的罪人，日本的战犯如东条英机当然也是绝对恶。但他们都可以用至善来解释，因为虽然对全人类而言是绝对恶，但也不是没有善的成分，对于纳粹党，放在当时特定的时段，希特勒也是受到大多数党员拥护的"元首"，连海德格尔也说要以元首的存在为存在。在本党道德规范和特定历史时段来看，希特勒也是符合道德的，只是这一道德规范本身就是恶劣的。这也是反映出道德鲜明的阶级性和历史局限性，在没有消灭阶级，实现共产主义社会以前，道德始终是有阶级性的。因为人以群分，不管用不用阶级这个词，总是不同的人群有不同的道德，官方有官方的道德，民间有民间的道德，有纸上的道德、行为中的道德、话语中的道德，更有人们心中的道德。再比如古时候的官员，见到皇帝都要下跪，现在看古装戏都觉得奇怪，但限定特定的时段，这种行为也只能被认为是当时恰当的至善，很难说这件事本身的善与恶，所以本书严格区分善与至善是有原因的。至善的反面不是恶，而是非至善或者没有恰如其分。

关于内在善，在本书体系中是指自然界（包括人化自然、自然化人、人化自然与自然化人，以及某一时段无化着的与人无关的自然）与社会化历史性的场。内在善是追求身体内快乐和身体内精神愉悦的善的活动，是有很强的身体内情感化的特征，当然这种情感也是情场，体内可以通过人的灵性（情感的人类相通性、行为的人类相互可理解性、语言的人类可翻译性和意识的人类相似性）传递出去以形成社会化历史性的情场；但主要还是在体内的，因为知人知面不知心，别人心中想什么，尽管可以推断，但总的来说别人的心还是不可全知的。所以萨特才说他人便是地狱。另外，快乐总是某个人的快乐，他人无法替代、不可复制，他人只能将心比心做出某种同情和怜悯。内在善由于其隐秘性，因此公道自在人心，人人心中都有一杆秤，可以不说出来，不让别人知道，但并不等于不存在，人人都有良心。从现象上看，统治者好像是突然就垮了台，其实民间早就暗流涌动，只是没有爆发而已。比如唐朝武则天，当着女皇，全国老百姓早就民不聊生，朝廷内的大小官员不满者众多。虽然大臣还在喊"万岁、万岁、万万岁"，但反对武则天的力量一直在聚集，特别是在狄仁杰周围凝结了很多反对武则天的力量。虽然狄仁杰已经死了，但他手下两员大将还在，武则天本人也知道，但斗了一辈子，已经累了。反对力量永远铲除不干净，所以她也就听天由命了。当赶她下台的将军出现时，武则天一点也不觉得突然，因为这一天终将到来。

要理解内在善，要理解幸福与快乐的区别和联系，可采纳王海明的说法[11]1209—1382。

世界的统一性在于它的物质性,这相对容易理解。比如人也是物,动物、植物、微生物都是和石头、木头一样的物,这点比较容易论证,难的是反过来论证石头、木头也和人一样,比如人有思想,石头没有思想,思想与石头如何打通。王海明的方法(论证石头与人一样)是从需要出发,人有需要,这很清楚。但他同时说石头也有需要,这就很了不起了。前文已述,人要止于至善,但王海明认为石头也要止于至善,这就是了不起的创见。王海明写道[11]1211:“因为需要并非仅为有机体所特有,而是一切事物——无论是有机体还是无机物——所共同具有的普遍性。举例说,就是一块石头也有需要,它的存在之保持,便需要它与其内外环境的平衡。这种平衡一旦被打破,它便风化瓦解,不复存在了。所以,任何物质形态都有需要,都需要保持内外平衡。只不过物质形态越高的,它的内外平衡的保持也就越困难,因而它对于保持平衡的条件的需要也就越高级、越复杂罢了。”因此,也可以认为王海明的伦理学是以需要和需要的满足为出发点和落脚点的哲学体系,用本书的术语就是从止于至善到善,先定义善本身再到止于至善。石头的内外平衡就是石头的止于至善,因为人的止于至善也是社会大系统的内外平衡。

王海明给出了需要的两种定义[11]1212。简单地说,需要是事物因其存在和发展而对某种东西的依赖性。也就是说,“需要是事物因其存在和发展而对某种东西的依赖性,对于有利其存在和发展的东西的依赖性叫做正常的或健康的需要,对于有害其存在和发展的东西的依赖性叫做反常的或病态的需要。”同时还给出了欲望的定义:“欲望是具有大脑的动物——特别是人类——的心理活动,是对需要的心理体验,是对需要的意识,觉知是意识到的需要,是需要在大脑中的反映。”按照本书的体系,欲望属于内在善,属于道德感情的范畴,最典型的欲望是食欲和性欲,也就是人对食物和异性的需要。“欲望是需要不满足而求满足的心理体验。”

王海明也给出了快乐的定义[11]1217:“快乐是行为者对于某种需要满足、欲望实现、目的达成的心理体验。”幸福则是持续的恒久的巨大的快乐。幸福必定是正常的、健康的、有利于人的生存和发展的。快乐则不一定是健康的、正常的,也不一定有利于人的生存和发展。比如酗酒能带来快乐,吸毒就更快乐,但并不会使人幸福。幸福一定是快乐的,快乐却未必幸福。王海明写道[11]1223:“所以,全面地,精确地说,幸福乃是享有人生重大的快乐和免除人生重大痛苦,是人生重大需要、欲望、目的的肯定方面得到实现和否定方面得以避免的心理体验。是生存发展达到某种完满和免除严重损害的心理体验。反之,不幸,则是遭受人生重大痛苦和丧失人生重大快乐;是人生重大需要、欲望、目的的肯定方面得不到实现和否定方面不能避免的心理体验。是生存发展达不到完满和不能免除严重损害的心理体验。”王海明的伦理学虽然篇幅1800页之巨,但文字精练,阐述全面。希望读者从他康德式的纯粹的枯燥性中,领悟到哲学语言的精确性和全面性,他采用正面肯定和反面否定的论述。

王海明总结出幸福的结构[11]1228:“一方面,快乐的心理体验是幸福的主观形式;另一方面,生存和发展之完满是幸福的客观实质,介于二者之间的人生重大需要、欲望、目的得到满足或实现,则是幸福的客观标准。”古时候读书人的最大幸福就是“金榜题名时,洞房花烛夜”,因为这意味着人生重大目标的实现,成家和立业有了坚实的基础和保障。成家立业,成家在前,立业在后,所以按完备二元论将成家、立言、立德、立功并列为人生四大幸福。从三不朽变成了四不朽。成家=善本身,立言=至善,立功=手段善,立德=内在善。善本身也就是道德善。因为孟子的四端学说,根据本书的剖析,不过是基于情感的学说。

按李泽厚的说法，是一种情本体，所以以前的立德就是情感意义上的道德善。现在扬弃了这一观点，保留它的存在，但放在相对不那么重要的位置上。因为人情世故是中国的国粹[15]，有很多保守的地方，不利于法制社会建设，更为重要的缺点在于内在心灵的情感体验中过于强调动机的善，对效果有所忽视，很难有客观标准。所以作为空集放在那里，容易变成形式主义。经常说谁“刀子嘴，豆腐心”，意思是说他的心是好的，但别人只看见他的刀子嘴，是豆腐心还是刀子心又有谁能证明呢？而本书采纳王海明关于幸福的认定是较为客观的，脱离信仰谈道德是不合理的，现在议论全球伦理金规则，意思是全世界、全人类有没有共同的优良的道德规则、规范[15]。本书认为，按黑格尔哲学伦理是现实化了的政治实体，既然全球还没有实现政治上的统一，也不清楚全球怎样才能统一，全球伦理金规则的讨论就为时过早。但是全球的道德倒是可以从哲学的层面加以探讨。其实道德哲学之所以可能，是因为每个人都有这样的信仰：我是善的，但我还可以更善，而止于至善是可望而不可即的理想，这是最普遍的人性；同样，他是善的，他也可以更善，他也不可能止于至善，止于至善可以作为他的道德理想。按康德哲学，这是可以普遍化的一条原则，适用于每一个人，但它又与每一个人的现实生活联系得很紧，不仅有形式，而且有内容。这是本书在道德领域的原创性贡献。道德哲学则在善与至善的对立统一中发展，道德哲学的研究对象就是要研究每个人负载的 16 个元素的场与每个人共同建构的同样负载着道德的 16 个元素的社会化历史性的道德场。

道德哲学对于每一个人而言，就是既要给他戴高帽子，也要给他刮胡子。戴高帽子就是肯定他是善的，刮胡子就是指出他还有做得不够好的地方，还没有止于至善，因此还需要做得更好。递推下去，至善就像马拉车胸前挂的萝卜，没有到站始终吃不上。但人与马不一样，马到了站还能吃上萝卜，人到了站就再也不需要了，因而人也就死了，只能指望他的灵魂吃上了萝卜＝至善。所以中国有“鸟要亡乎，其鸣也哀，人要亡乎，其言也善”。表达的是人将要死，就接近了至善。这就是对道德的前理解。在古希腊时代，科学是一种始于惊奇的毫无功利性的活动。所以科学本来是科学家本人创新性活动的一种生存方式，是一种非常幸福的人生方式。但当科学成为学术工业后，就演变出三种不幸的生活方式。第一种是被动异化，科学是科学工作者们受金钱（资本）驱使的一种技术化的量化的生产活动，表现为搞科学的人拿不到钱，拿得到钱时又不搞科学。就好像想看书的时候买不起书，买得起书的时候又没时间看书。第二种是主动异化，科学成为科学工作者受个人权力、荣誉、金钱和身心健康的驱使，以进行科学研究工作为名的一种利益追逐活动。第三种是科学的非科学化[14]，科学变成一种意识形态，成为评判世界上一切事物的真理性、合理性的人为的政治性标准。本来不是科学的东西可以说成是科学的，而真正是科学的也可以贴上非科学的标签，科学本身失去自在的价值和标准。一切以外在的价值和别人的评价为标准。科学变成了神学，而原本意义上的始于惊奇的活动则变成了意识形态科学化后的神学的婢女，成为止于至善的一个现实形态。科学家本人缺失幸福的感受，反过来阻碍科学的发展，特别是基础科学的发展[7]，这就以一个具体例子说明了全球伦理的暂时不可能性[15]。在科学这么纯粹的领域，康德称之为纯粹理性批判的纯粹领域都已经高度异化。在其他以利益追逐、权力角逐的领域谈论全球伦理更是无稽之谈，就连文学领域也存在痞子文学——我就不要脸，看你怎么办。所以新时代下道德行为、道德语言、道德情感、道德意识的重建还是一项光荣而艰巨的任务，有待大家来共同完成。

5.3　作者对是与应该的休谟难题的回应

休谟难题载于王海明的《新伦理学》[11]266："18世纪30年代，休谟在他的代表作《人性论》中做出了堪称人类伦理思想史上的最伟大的发现。在我所遇到的每一个道德体系中，我一向注意到，作者在一时期中是照平常的推理方式进行的，确定上帝的存在，或是对人事作一番议论；可是突然之间，我却大吃一惊地发现，我所遇到的不再是命题中通常的'是'与'不是'等连系词，而是没有一个命题不是由一个'应该'或一个'不应该'联系起来的。这个变化虽是不知不觉的，却是有极其重大的关系的。因为这个应该与不应该既然表示一种新的关系或肯定，所以就必须加以论述和说明；同时对于这种完全不可思议的事情，即这个新关系如何能由完全不同的另外一些关系推出来的，也应该指出理由加以说明；不过作者们通常不是这样谨慎从事，所以我们倒想向读者们建议要留神提防；而且我相信，这样一点点的注意就会推翻一切通俗的道德学体系。"

这就是所谓的休谟法则，"应该"能否从"是(事实)"产生和推导出来？它是元伦理学的最重要、最基本的问题，是伦理学能否成为科学的关键，因而也是全部伦理学的最重要的问题。王海明对休谟法则的回应大致可以简化为两个公式和三个例子[11]。

公式一：

客体：事实如何

主体：需要、欲望、目的如何

主客关系：事实符合(或不符合)主体的需要、欲望、目的

结论：应该、善、正价值(或不应该、恶、负价值)

公式二：

客体：行为事实如何

主体：道德目的如何

主客关系：行为事实符合(或不符合)道德目的

结论：行为应该如何(或不应该如何)

例子一：

燕子吃虫(事实)

人类需要消除虫子(主体需要)

燕子吃虫符合人类需要(事实与主体需要关系)

燕子是具有正价值的善的鸟(善或价值)

例子二：

张三饮食有节(事实如何)

张三的目的是健康长寿(主体目的如何)

饮食有节符合健康长寿的目的(事实与主体目的关系如何)

例子三：

张三杀人了(事实如何)

道德的目的是保障社会存在发展(主体目的如何)

张三杀人不符合道德目的(事实与主体目的关系如何)

张三杀人是不应该的(应该如何)

本书的道德哲学体系不同于王海明的,所以还要从本书的是推导出本书的应该。

本书的是,每个人每个家庭都追求幸福,同时每个人每个家庭都在自然界中生活,不仅过着本能的生活,而且过着有灵性的生活。而且每个人每个家庭也都在社会中过着伦理性的政治生活,已经有一定的上层建筑存在着,这就是海德格尔意义上的此在的被抛入世,这就是本书的是。应该是什么呢?应该进行生产劳动才能满足每个人的和每个家庭的物质幸福、精神幸福和社会幸福[11],所以应该有道德行为——生产劳动。因此马克思和恩格斯指出[14]:“整个所谓世界的历史不外是人通过人的劳动而诞生的过程,是自然界对人来说的生成过程。”[14]11,正是由于这种自然界对人来说的生成过程决定了止于至善的无限过程,因而也决定了每个人每个家庭追求幸福的无限过程。因为每个人有进行力所能及的劳动能力和生殖能力,所以每个人和每个家庭本身就是善的,是善的出发点和落脚点,这不是循环论证,而是正确地进入基本存在论上的解释学循环。

鲁品越认为:“劳动本身并不是‘人的本质’,而是创造作为社会关系的人的本质的过程。正如马克思后来对唯物史观的总结所说,人们在物质生产劳动中‘发生一定的,必须的,不以他们的意志为转移的关系,即同他们的物质生产的一定发展阶段相适应的生产关系’并进而形成精神的、文化的、政治的社会关系,正是这些‘社会关系的总和’形成现实的人的本质。需要说明的是:这里的社会关系的总和不仅指同时并存的横向社会关系结构,也指世代交替的纵向历史关系在人身上的积淀(因而人的本质具有社会历史性,包括民族性)。因此,人的本质是历史地形成的社会关系力量,它积淀在社会的个人生命中。”

人通过实践将这种作为“社会关系的总和”的本质力量映射到对象身上,从而生成了凝结于赋加于客观对象的价值。因此,作为社会关系的总和的人的本质乃价值之本(所以这是“以人为本”的价值),而实践过程(特别是物质生产劳动)则是价值生成之径,通过实践过程将人的本质映射到客观对象而生成的价值世界——人与人相互联系的世界。则是价值产生之果。因此,这种映射性价值不仅是一种主客体关系范畴,更是一种社会关系范畴。[14]138

通过这两段话可知,人本身就是价值的本质。所以将每个人和每个家庭定义为善本身。只是需要注意这里的每个人和每个家庭并不是孤立的,它们通过社会化历史性的场为中介与人世间的万事万物都耦合在了一起。通过每个人的自我意识和自由意志,通过每个家庭的自我意识和自由意志,善回到了善本身。这里不是意志自由,意志自由是在人和事以及人和物的上层建筑领域的概念,是认识论的,而不是本体论的。每个人的自由意志则是本体论的,能够感应和响应社会化历史性的场。自由意志[15]是知道恶而不为恶的意志,因而是善本身。同时自由意志首先是知道善而为善的意志。这里用数学语言来表征什么是自由意志。设左旋为善,右旋为恶,那么左旋的 $\frac{\partial}{\partial t}$ 在作了时谐假设后等于 $\mathrm{j}\omega$,而右旋的 $\frac{\partial}{\partial t}=-\mathrm{j}\omega$,两者本来相差一个负号,但是 $(\mathrm{j}\omega)^4=(-\mathrm{j}\omega)^4$,经过自由意志的整合,善的变成善的,恶的也变成了善的。这是以能量的耗散为例说明的。如果以空间的表象来说,意志总是奔腾向前的,因此 $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 具有正定性,因为 $-(\mathrm{j}\omega)^2$ 和 $-(-\mathrm{j}\omega)^2$ 都等于 ω^2,因而不管 ω 是大于零还是小于零,ω^2 作为实数总是大于零的,这么一个大于零的东西一旦变

成自由意志就是 $\omega^8=1$,对应于 $\omega^4=1$ 和 $\omega^4=-1$ 两个分支,代表善恶都可归于 $\omega^8=1$ 的恒善性。因为 $e^{j\frac{\pi}{4}}$ 和 $e^{-j\frac{\pi}{4}}$ 存在 90^0 相位差,转一圈的话善的变为恶的,恶的变为善的,只有转两圈的时候才都是善的。中国八卦测吉凶,就是基于类似的原理,善恶与吉凶具有同构性。所以善本身就是无论如何都是善,自在的就是善,认为性本善是善,认为性本恶也是善,认为善恶混合也是善。因为善与恶作为两种形态,满足概率和为 1,而每种情况下都是善,最后是以概率为 1 为善,所以定义人本身是善是有学理依据的。本书十分强调事物自在的价值,而不是基于外在的评价,善恶作为概念就是对差异的差异的差异的差异。$\omega^4=1$ 为善,$\omega^4=-1$ 为恶,而人是 $\omega^8=1$。从善出发回到善,从恶出发也回到善。所以将有自我意识的个人和家庭作为善本身是大有好处的。因为家庭是自然和社会的完美的统一。

上面作者秉承康德实践理性批判的本体论思路,通过自由意志的知恶而不行恶,使恶变成了善,使用每个人都认为自己是善的同时又都认为自己还可以更善的信仰,使道德自律在与道德他律结合的同时充实了内容,而不像康德的道德哲学:道德自律只有空洞的纯形式,无任何内容可言。

上面作者完成了从认识论上为休谟难题的本体论奠基。下面才开始对休谟难题正式的剖析。休谟之问到底意味着什么,是一个值得反复审查的问题,虽然引用了王海明对休谟难题的解答,但不能满足于王海明的解答。本书认为王海明的解答只是一种初步的解答,按本书的体系来理解休谟的问题:"因为这个应该不应该既然表示一种新的关系或肯定,所以就必须加以论述的说明;同时这种似乎完全不可思议的事情,即这个新关系如何能由完全不同的另外一些关系推导出来的,也应该指出理由加以说明。"休谟的要求,实际上是指从道德行为、道德语言、道德情感、道德意识四个元素中的任何一个出发都要能在是与应该之间画上等号,这就要求这四个元素构成一个四阶循环群,或者说这四个元素是同一个道德本性的四种显现方式。这只不过是对这一个哲学体系的要求,任何人如果构造一个由 N 种关系组成的道德体系,同样要求体系构造者提供一个完备性证明,也就是说任何一个元素都可以从其余元素的是中推导出来。既然包括了应该和不应该,就一定要是可正可负的量,这是最初为什么把八个元素分成四个对的原因,因为成对以后才能包括可正可负的元素。比如一个小孩生下来,并未社会化,是在家庭中逐渐知道应该不应该的,所以每个人必须和每个家庭结合起来。从格物开始,致知是对格物的反思,诚意又是对致知的知,最后从自然界(时间的奔腾向前)和人类社会(时间的不同时强制同时,事物的时谐化,$\frac{\partial}{\partial t}=\pm j\omega$)双重回归到原位。前面说了,自然界由于时间的正定性,也就是 $-\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ 的正定性,只要四阶循环群就行了。人类社会由于既可左旋,又可右旋,需要转两圈才可以回到原位,因此由八阶循环群来刻画。另外还有一个观念性运动就是时空的同时反演,满足四阶 Klein 群或者说四阶反演群,这可以用于精神生活中概念的辩证运动的刻画[1]。这是一种观念性运动,现实中不可能发生,但可观念性发生。总之,格物 $=\omega$,致知 $=\omega^2$,诚意 $=\omega^3$,正心 $=1=\omega^4$,很形象;修身 $=\omega^2$,齐家 $=\omega^6$,治国 $=\omega^4$,平天下 $=\omega^8=1$,也很形象。回归善的本源就是 $=1$ 的意思,平天下也是这个意思。达到了天人合一的和谐之境。有人问,既然提到四种运动,为什么才三个群?第四个群就是单位元,恒元。$1^1=1^2=1^3=1^4=1^0$。也就是用来表示善本身的群。

这四种道德现象，也就是道德行为、道德语言、道德情感、道德意识，都是道德本体（＝道德＝自由意志＝道德自身＝善本身）的显现则是明显的。在对象性活动中，道德意识莫非是一种追逐幸福的活动，明显每个人都具有知道什么是幸福和什么是不幸的意识，并且具有知道不幸而避免不幸的自由意志，这是来自人本身的一种本体能力与外界对象“无关”，类似于海德格尔的“畏”，本身并没有对象，是个能指，但一旦有对象充实进来，畏就变成怕。这里的情况类似自由意志来自人自身的能指，是人自身的一种善恶区分能力和存善去恶（使恶也变成善，或者说明知自己可做恶而不做）的能力，一旦与身外或身内的对象结合起来变成对象意识，就变成一种现实化的趋善避恶能力。而对象意识依赖于自我意识，因为人为自然立法[15]，人当然也为社会立法[15]，所以人的奠基于自由意志基础上的自我意识是很要紧的。以这样一种目光重审王海明的伦理学，因为没有本体论的奠基，按海德格尔哲学的术语，就成为一种无根的伦理学。

同样，道德情感就是在追求快乐的时候能够区分对人的生存和发展有利的快乐和对人的生存和发展有害的快乐。同时，道德情感还有避免有害的快乐和增加有利的快乐的本体能力。进一步细化，人有区别人自身兽性和人性的能力，并且有自知兽性而不被兽性所左右而战胜兽性的能力。这就是孟子所谓性本善的意义的正确理解，但这种能力还是一种能指，与身体内和身体外的对象还未结合，结合之后才产生现实化了的善的情感和恶的情感，成为具体的所指。同样人有区分超越和现实的能力，并具有加强正确的超越和避免不正确的超越的灵性，这是一种基于人的本体能力，当且仅当与具体的对象结合之后才变成一种具体的所指，产生出现实的美学、宗教、信仰等。人也有区分当下与非当下的能力，同时具有将非当下当下化的能力，这是人与人类的本体能力，这是一种能指，当且仅当与具体的对象结合之后才将能指变成具体的所指，形成视域融合[16]。

道德语言指道德规范的制定、颁布、实施、执行、解释、修改、协调，这是人类主体本身区分善与恶的一种能力，而且也是人类具有的鼓励善而规劝、处罚、制止恶的道德能力，是一种能指。当且仅当与人类行政能力和具体案例结合起来才变成所指，成为现实化的善恶舆论导向和善恶教化。道德语言具有社会历史性在止于至善的无限追求中不断完善自身。社会不是空洞的概念，各国的领导机构也不是虚无化的摆设，一切路线、方针政策的落实最后都是组织落实，也就是要落实到每一个人，而每一个人又总是某个家庭中的人，处理的人和事也总是面对现实的个人和家庭。所以这里从个人跳跃到人类并不存在真正的跳跃。

道德行为是指在生产劳动中，人类主体在追逐利益的过程中对生产、流通、交换、分配、消费中的行为有区分有利于或不利于每个人和每个家庭幸福的能力，并且有推动有利因素和规劝、谴责、制止不利于每个人和每个家庭幸福的人和事的能力。这是每个人和每个家庭的利益主体本身具有的本体能力，是能指，当且仅当与具体的事和物相结合才产生现实的善的事和善的事物或恶的事和恶的事物。本书的道德哲学特别关注在生产劳动领域的道德，因为只有在生产劳动领域才能更清楚地揭示资本家对工人的不道德，从而证伪资本主义的永恒性和资产阶级法权的合法性。

综上所述，本书从本体论和认识论的角度，特别是认识论与本体论相统一的角度，本体论为认识论奠基的角度回答了休谟提出的问题，自认为比康德、尼采（后面还要专门讨论）、王海明都更加深入和具体。

与康德哲学的区别，是本书区分了自由意志（本体论的）和意志自由（认识论的，与事物相关的）。自由意志是每个人和每个家庭，有善有恶而且只善不恶的意志，而意志自由是每一个道德主体在现实的道德生活中持存了一个时段的实践活动的善与恶都可能的选择，是有意志在其中的自由（而不是意志）。这两者是很有区别的，通过对象性活动追求永远也追求不到的至善而成就每个人的善和每个家庭的善。本书对康德提出的四个问题作出以下回应：

我能够知道什么？

我应该做什么？

我可以希望什么？

人是什么？

我能够知道什么？我能够知道我是善的，别人也是善的，是善本身。每个人都是善的，是善本身。每个家庭都是善的，是善本身。我应该做什么？我应该参加生产劳动的全过程。我可以希望什么？我可以希望我和我的家人都在将来做得更好，离止于至善还远着呢，并且在生产劳动中做好事情，正确地对待身外之物。人是什么？人是兽性与人性、平淡性与审美性、现实性与理想性、低俗性与高雅性、世俗性与崇高性、必然性与自由性、利害性与无利害性、实际性与幻想性的统一。人既与自然万物为一体，人与人之间又有相通、相似、相同、相互可理解的情感、行为、意识、语言等。

人有从善的意志、行善的意愿、向善的情感、知善的意向，从而体现出善本身在自觉、自愿、自由、自然的情况下进行道德自律的现实性和可能性。这里的表述借鉴了杨国荣的表达方式，有所改写[7]144,181,192。

在本书的体系中，在人和事与人和物结合起来的一对矛盾中，体现了每个人和每个家庭在对人处事和待人接物的实践活动中，服从道德规范、道德案例、向道德楷模学习的从善的意志，这种意志的自由主要体现在追求止于至善的无限发展过程之中。虽然从结果来看，可能有善有恶，而且每个道德主体可能有选择更好行为、更好的引用和应用规范和案例的可能，但总的说来，道德主体是以服从的姿态、认真的态度对待某一时段的道德规范、道德案例和道德楷模的意志的，而且有通过实践活动提升自己的幸福的意志。体现了自愿性在个人和家庭这对矛盾中，也就是在家庭中，道德主体将自己的生命和家庭生活本身视为意识的对象和意志的对象，体现了意志自由对自由意志的屈服，也就是说一切的恶的心思意念基本上都能消灭在萌芽状态。而且真正发展到情感、言语、行为，也很快可以凭借家庭内巨大的情感力量和每个人和每个家庭善自身的规定，使每个人无愧于善自身的代表，从而使每个人无愧于善自身的称号。这一领域具有自由的特点，至少在家庭的小范围内道德力量应该是强大而有力的。通俗地讲，再恶的人也不要对自己的家人施恶，再会算计的人也不要对自己的家人算计，这在中国的文化心理中是十分被人看不起的，也是每个人自己也看不起自己的最大的恶，就是对自己的家人施恶。比如父亲算计了儿子，算是有本事吗？是当一个父亲的人应该做的吗？父亲还配父亲的称号吗？又比如，儿子对父亲施恶，并且成功了，这算哪门子的成功呢？自己就真的能平安吗？能不能扪心自问自己是不是一个人？还配不配人的称号。自己对自己的亲人都这么恶毒，还有什么人愿意与你交往，还有什么领导敢委你重任？将来你儿子对你施恶你又作何感想，如何应对？所以提倡在家庭内要杜绝恶的行为、恶的言语、恶的情感。同样，男女朋友之间、夫妻之间也

没有什么好算计的，更不应该发生恶的行为，因为算来算去，你吃了亏，她就占了便宜。我21岁找对象时就明白了这一道理，我的家人指责我找谁不划算。我就反问他们我不划算，谁又划算呢？他们说，当然是她划算。我说我不划算她划算就行了，总体上不存在不划算，如果她已经是你女朋友的话。所以家庭内权利与义务都只能稍微算一下，不能算得那么清楚，要提倡在给予中得到。不要计较一时一事的得与失，这样家庭内才有自由的氛围。如果一个人回到家里都还没有自由，是不是太悲惨了一点。

在事与物这对矛盾中主要体现一种行善的意向，比如资本家不要单纯想到赚取剩余价值，尽量提供多的工作机会，尽量不要解雇员工，尽量提高工人待遇。同样作为工人也要多替老板着想，老板也有老板的难处，尽量多干活，尽量多为老板创造多的剩余价值，尽量多节约原材料，提高劳动效率，端正劳动态度，改进劳动方法。在这种行善的意向中提高道德自觉性。

在自然界和社会化历史性的场这对矛盾中，主要体现一个向善的自然的情感。人都是有感情的，你可以不说，别人也知道你对别人好不好，你可以不算计，别人也都算得出来这件事上你是吃了亏还是占了便宜。如果大家都存向善的情感，总是尽量自己吃亏而不让别人吃亏。有首歌稍加修改可变成：

情是心的呼唤，
情是爱的思念，
情是温暖的春风，
情是生命的源泉。

人世间情义无价，但现代社会由于资本主义生产方式、生活方式的渗透，人世间搞成了曾国藩所言：

人情似纸张张薄，
世事如棋局局新。

作为自然的人、生活在大自然中的人、具有灵性和情感的人，每个人和每个家庭都是有情感的需要的，人与人之间需要心灵的沟通。情应该扬弃利益的算计，情应该扬弃目的性，情应该扬弃概念性，情也应该扬弃关系性，变成一种十分自然的亲情流露、宇宙情怀和对人类的博爱。

5.4　关于尼采道德哲学的注记

康德与尼采都对道德问题有很深的研究。不过康德的研究比较枯燥、乏味、空洞一些，尽管实际上康德是很有现实的关怀的。尼采的研究豪情万丈，充满了诗性，而且文采飞扬。范志均从尼采众多著作凝练出道德主题，并且与现代道德哲学扯上关系[17]。

本书的体系大致将人的生活分成政治生活、工作生活、家庭生活和精神生活，分别对应于人与事和人与物、事和物、个人和家庭、自然界和社会化历史性的场。

文献[17]是一部大作，导论就80页之多，当然黑格尔的《精神现象学》的导论也很长。在人类四种生活中，作为精神生活中的一种哲学生活与政治生活是容易起冲突的，这体现在开启了过去两千年传统的苏格拉底的身上："他是西方精神隐秘的统治者，尼采则要开启未来千年传统，在一定意义上，尼采与苏格拉底并没有什么不同，本质上，他希望自己像

苏格拉底一样,成为世界历史的'转折点',成为另一个苏格拉底,成为未来精神的哲学王。"[17]22。正如尼采自己所说:"我的声音必将响彻千年"。

范志均提出了尼采哲学重要概念的权力意志[17]78,"一切生命的本质都是权力意志,权力意志的本质是命令和服从,是意愿和创造,是创造他所意愿的,意愿他所创造的。一旦不意愿,生命就不再是生命,一旦不创造,生命就疲倦了。"以前在道德的定义中,强调的是需要和需要的满足,意愿比需要高一个层次,作为权力意志的力是以加速度来座架的。尼采另一重要哲学概念是永恒轮回[17]80,"在尼采那里,永恒轮回不是同质、同等级的事物和人的永恒轮回,而是不同质、分等级的事物和人的永恒轮回,也是伦理统治道德,超人统治人的伦理次序的永恒轮回。"尼采最重要的著作《权力意志》是他死后由他妹妹整理出版的,后世对其解释多有不到位的地方。本书不是想乱上加乱,而是试图从众多哲学家的解释中,从自然科学的角度,特别是从牛顿绝对时空与爱因斯坦的相对时空中理出一些头绪来,正确地解释权力意志与永恒轮回的关系。另外,单从范志均的导论已隐约感到尼采这个"疯子"的所谓贵族伦理,表面上是在说超人,实际在说将来查拉图斯特拉(超人)所在世界的伦理,但如果联想到中国几千年的封建社会,何尝不是这种超人贵族伦理大行其道的社会,哪里是什么将来的事,完全是过去式的一种隐喻。只是中国五千年封建文明,由于家庭与国家同构的关系,在这种高贵伦理的基础上罩上了一层温情脉脉的面纱,以显示皇恩浩荡和天威的至上性。我想这是学习尼采哲学特别需要注意的一点,只是持高贵伦理的道德主体们没有敢那么张狂地说出来的东西,借尼采这个狂人之口说了出来,有点鲁迅狂人日记的意味。说明了海德格尔的不是人在说话,而是大道假借人之口,特别是假借狂人尼采之口说出了人世间早就有的贵族伦理及其结果。哪里还用得着等待超人的诞生,超人早已出生,超人统治人们好几千年了。就像程颐的"饿死事极小,失节事极大"与一个西方贵族的马车压死了人,扔了两个金币了事,关心的只是贵族的马是否受了伤,同样属于贵族伦理的范畴,东西方文化并没有根本的差别。

文献[17]第一章讨论了否定的自由与肯定的自由,也在每个人在自然界的意义上和每个家庭在社会的意义上否定了意志自由,在自身关系中,在善本身中并没有意志自由,只有自由意志。自由意志作为有善去恶且只善不恶的意志也就是封闭体系内自因引起的必然性,仅在相互关系中,在对象性活动中才有外在强制的意志的自由。尼采揭穿了意志自由的假象,但遵循斯宾诺莎让权力意志服从内在必然性变成一种永恒轮回。只是尼采虽然正确地看出了永恒轮回,但却对为什么会有永恒轮回缺乏有说服力的说明或证明。本书遵循斯宾诺莎将社会和自然领域的权力意志返回到无神论的大自然中,用宇宙的形状作为刚尺(永恒轮回),自然和社会作为时空中发生的事件,必须服从自然界铁的必然性,一切运动都必须回归宇宙的形状,这就是宇宙中万事万物的天命。天理就在于宇宙形状,人想违背天理行事是不可能的,按以前的话说,人可不可以不按客观规律办事,天说,不行!所以老子的顺其自然,有相当的合理性。范志均写道[17]89:"因此斯宾诺莎的实体世界观是绝对合理性的决定论体系,一切事物都能在实体中并通过实体得以认识,而实体本身是自因的。能够通过自身,在其自身中加以认识。任何认识无非是发现理性的必然性,而这种必然性或者是外在的因果必然性,或者是内在的出乎本性的必然性。而无论哪种必然性,任何样式的事物的存在和属性都是已经被如此规定了的,或者被外因所决定,或者为自身本性的必然性所确定。斯宾诺莎同笛卡尔一样,否定了目的论,因此在理性必

然的世界里并不存在目的。善，对事物的认识除了知道它存在或发生的必然性之外，并不知道这种必然性是好的还是坏的，更无从知道这种必然性与好坏的关联。真和善是脱离的，自然世界是真实的，却不是善的。也就是说，善不是理性必然的，而是情感意义上的，主观的，'我们并不是因为判定一物是好的，然后我们去欲求它，反之，乃是因为我们欲求一物，我们才说它是好的。'[18]130 因此，善的不是真的，真理是客观必然的，善是主观情感性的，不是因为善真好，我们欲求它，而是因为我们欲求它，善才是好的。"

对照这一段话检查这一章的论述，本书基本上是继承了斯宾诺莎的衣钵的。本书仿照斯宾诺莎否定了意志自由的本体论意义，而仅仅肯定了自由意志的本体论意义。因为时光不可倒流，尽管当时有种种别的选择的可能性，但每个人的选择就是当时最好的选择，每个家庭的选择也是当时最好的选择。对每个人而言，假如(虚拟)你生在别的家庭，你的选择可能两样，但你的家庭没得选择，你是被抛入这个家庭作为子女的。而作为父母，你也不可能抛弃你的子女。按照斯宾诺莎哲学的术语，每个人和每个家庭既要服从自然界外在的必然性，又同时出于自身本性的必然性而生活。通常讲人的有限性，往往联系到身体的有限大小、目光的有限远、生活的有限长，容易忘记自然对人是有限制的，社会对人也是有限制的，家庭对人也是有限制的，自己对自己也是有限制的。最为自由的审美活动中，想象力也要受知性的限制[15]。以身体的有限大小而论，在日常生活中的三维空间而论，生不出四维空间出来，这是由于长度是始终大于零的。如果加上时间，最多也是四形式，有没有五形式、六形式呢？没有，这就是时空对人的限制。尽管数学上、物理上可以研究一些更为复杂的时空，但哲学上的时空主要指人日常生活的时间和空间，因而是有很强的限制的。如果将空间时间化，则对空间的限制就转化为对变化的限制，并不是想怎么变就能怎么变，还有万变不离其宗的东西制约着事物的变化。比如电磁场就有两个不变量，在任何运动坐标系中都不变，当然这两个不变量的函数也是不变量，不变量因而也就多了。刚尺和原时也是不变量。这是斯宾诺莎开创被尼采和本书继承的内在必然性。内在必然性第一步就要求自因，因而体系必须是完备的，这也是构造本书哲学体系突出完备性的原因，空集就能使事情完备了。前文提到四个元素，从两个元素出发好像还不完备，其实循环群从任何一个元素出发都是完备的，比如 $\omega^5=\omega^4\times\omega=\omega$ 产生不了新的东西，$\omega^6=\omega^4\times\omega^2=\omega^2$，$\omega^7=\omega^4\cdot\omega^3=\omega^3$，$\omega^8=\omega^4\cdot\omega^4=1$，具体而论从事物、个人与家庭、自然界与社会化历史性的场的是，当然能推出对人处事和待人接物的应该，这在两千年前荀子就做到了[7]。这么多人，没有规矩肯定不成方圆。再说从自然界与社会化历史性的场、人和事与人和物加上事物之是能不能推出应该呢？显然是可以的，且不说邓小平的四句格言可以落实到每一个人和每一个家庭，“人民拥护不拥护，人民赞成不赞成，人民高兴不高兴，人民答应不答应”，单是说这些物质的、精神的、社会的劳作的根本目的不就是为了人本身的更加幸福吗？如果不能更加幸福，那人们劳动干什么？

顺带指出，本书关于什么是幸福，尽管引用了王海明的功利主义定义，我想这一定义是一种社会化的定义，是关于幸福的通货。而本书作者认为这种社会化的关于幸福的定义，在幸福的加权求和之中顶多可占5%，另外部分可以考虑每个人熟悉的人和每个家庭周边的人对这个人和这个家庭的评价，因为周边的人对这个人和这个家庭是否幸福比社会化的统一标准更有准确性。首先，社会化的统一标准，无论多么客观、公正、细化，都难以座架每一个人每一个家庭。而每个家庭和每个人是否幸福的80%取决于这个人和这

个家庭自在的评价。外人看来很幸福的人,不一定真的幸福;外人看来很平淡的家庭可能真的很幸福。幸福首先是来自内心的,自我感觉是第一位的,这与每个人的信仰有关,外人是不可能真正看透每个人的内心的。其次,幸福是自我设定的,因为每个人的目标是自我设定的,如果自我设定的目标达到了,这个人就是幸福的,如果这个人自我设定的目标没有达到,那么这个人就是不幸福的。比如,新中国成立前的农民,“两亩地,一头牛,老婆孩子热炕头”,达到了就很幸福,没达到就不幸福。第三,目标的设定与每个人的起跑线形成强关联,不同家庭背景、不同学历、不同身体状况的人,处于不同时代、不同国度,乃至不同省份、不同城市,目标的设定就大有差异,因而幸福与不幸福的感知性大不相同。第四,每个人目标的设定和目标的实现程度受到他同类人的很大影响,什么是实现,实现总是部分实现、基本实现。比如早年大家都出国了,自己还没有出国,就多少感到有点不幸福;大家都涨了工资,自己没有涨,也就有不幸福的感觉。第五,每个人的目标设定和目标实现的标准在人的一生中不同时期是不一样的,因为本书的幸福定义是以幸福作用量和幸福变化率来座架的,如果越来越幸福,幸福感就会强些。如果大多数时间幸福,只有少数时间不幸福,总体来说还是幸福的。第六,每个家庭对幸福的标准也可能很不相同,虽然托尔斯泰说幸福的家庭都是相似的,不幸的家庭各有各的不幸。我想幸福的家庭尽管都是相似的,起码也可以找出百种以上的幸福家庭类型,各行各业都有幸福的家庭,现在的行业已不止百种了,不幸的家庭可以找出万种以上。因此对于幸福的界定完全是个实践哲学的问题,很难用理论加以概括。按照新标准,大多数,甚至绝大多数的个人和家庭都是幸福的,少数的个人和少数的家庭才是不幸的。因为每个人绝大多数时候还是按照自己的意志,根据自身的处境在行事,对于预期目标的实现基本上是有把握的,而且在大多数情况下也是可实现的。只有极少数的家庭和个人,因为设定的目标脱离个人和家庭实际,尽管尽了努力仍然有较大失败可能,或者“天有不测风云”,所以这样的个人和家庭才是不幸福的。人生总的说来是欢乐的涌泉,尽管偶尔也有深沉的悲痛。但累计后总体上还是幸福的。另外,有时外人看来很不幸的事,由于当事人其实早有高风险预期,为了追求利益最大化而冒险,因此这种情况当事人也不见得就不幸福。当然,现代社会很多人失去自我,以别人的标准为自己的标准,以社会的标准为自己的标准,脱离自身实际追求幸福,感到自己很不幸福,那是另外一回事。本书认为幸福的标准主要是由每个人每个家庭自己确定的,且自己感受的。

要理解尼采的权力意志与永恒轮回概念,必须先理解时间的概念,这是哲学史上很难的概念,某种意义上可以说尼采是爱因斯坦相对论的先驱,因为他想尽一切办法让本来有先有后的绝对时间在瞬间(可以理解为微分长度)的意义上不同时强制同时了,尽管他没有对 $\mathrm{d}x$,$\mathrm{d}t$ 导出洛伦兹变换,但狭义相对论的核心概念已在尼采这里有了思想的萌芽。

本节进一步展示时间定义,这是本书独创的不同于任何哲学家的时间观念。首先,时间是以加速度座架的空间坐标系的可正可负 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\mathrm{j}\omega$,其中,如果正号对应于左旋,那么负号就对应于右旋;反之,如果正号对应于右旋,那么负号就对应于左旋。这本身是一种对称性,规定了等于没规定的对称性。因此得到 $\frac{\partial^4}{\partial t^4}=(\mathrm{j}\omega)^2=-\omega^2$ 和 $\frac{\partial^4}{\partial t^4}=(-\mathrm{j}\omega)^2=-\omega^2$,$\frac{\partial^8}{\partial t^4}=(-\mathrm{j}\omega)^4=\omega^4=1$,$\frac{\partial^6}{\partial t^6}=(\mathrm{j}\omega)^3=-\mathrm{j}\omega^3$,$\frac{\partial^6}{\partial t^6}=(-\mathrm{j}\omega)^3=\mathrm{j}\omega^3$,同样可算出 $\frac{\partial}{\partial t}$,

$\frac{\partial^3}{\partial t^3}$，$\frac{\partial^5}{\partial t^5}$，$\frac{\partial^7}{\partial t^7}$，这样构成一个 8 阶循环群，简单一点就是 Z 平面中 $z^8=1$ 的 8 个根构成 8 阶循环群的表示。这是以左右旋平面波表示的时间。

另外一种时间定义则基于时间的空间化，设$\frac{\partial}{\partial t}=\pm \mathrm{j}\omega$，$-\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\omega^2>0$，$\omega^2>0$，因此可用于表示长度。$\omega^8=1$ 表示空间只有三维，ω^2，ω^4，ω^6 和 1 构成 4 阶循环群，仔细推导的话，1 与规一化是有关的。前一种由直接定义的时间代表尼采的永恒轮回的时间，后一种由 $\frac{\partial}{\partial t}$ 定义的时间代表尼采奔腾向前的权力意志。也就是说由于速度乘以时间等于路程，光速不变的情况下，权力意志的力的大小的平方是可以由后一种牛顿的绝对时间来定义的。而爱因斯坦的相对时空是不同时已强制同时的时间，可用前一种时间来表示。前一种时间代表引力场的双向传播，左右旋同时存在。后一种时间代表光的单向传播。前一种时间是用空间表示的时间，后一种是用时间表示的空间。而空间和时间的同时反演则代表观念性的运动，如黑格尔在逻辑学中表达的具体概念的运动[1]。可用 4 次反演群也就是四阶 Klein 群表示。而基于引力作用的时间可用单摆的左右摆动来实现，基于电磁作用的时间可用电子的周期运动来实现，两种时间是相同的。也就是说一个大于零的长度，将首尾相接，就变成一个圆。这样绝对时空与相对时空就打通了。因为无论用引力还是电磁力显现时间，时间都是同一种客观存在。时谐运动的波将时间算符代数化了。

作为量的时间以速度来座架，对偶变量差 $\frac{\partial}{\partial t}$。作为质的时间以加速度来座架，对偶变量差 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$。而且时间总是以人作为活动标架来测度的。也就是说时间是跟着每个人走的。牛顿力学中 $\frac{\partial E}{\partial t}=0$，$E$ 代表能量，能量是守恒的。$\frac{\partial E}{\partial t}\neq 0$，代表生物的生存，能量的耗散。能量守恒定律在爱因斯坦力学中被扬弃。

海德格尔的时间性概念既是奔腾向前又是一去不复返的同时性规定，因而时间性是一种无方向性，也就是用标量来规定。

反过来看 $\omega^8=1\rightarrow\omega^4=1$ 和 $\omega^4=-1$，$\omega^4=1$ 对应于绝对时空，$\omega^4=-1$ 对应于相对时空。以电磁学为例，电荷的永恒轮回转化成电磁质量，而电磁质量的永恒轮回会产生光=权力意志。

其实尼采的权力意志也可理解为以生产关系主导的生产力，而永恒轮回也可以理解为生产力的物化或者说权力意志向物质世界的回归。权力意志来自于社会化的人和物，也要回归到社会化的人和物。对尼采的永恒轮回学说进行扬弃，是在发展中回到永恒宇宙本体，并不是尼采的简单重复。

参考文献

[1] 坛经. 尚荣译注. 北京：中华书局，2013.
[2] 老子. 汤漳平，王朝华译注. 北京：中华书局，2014.
[3] 何香涛. 观测宇宙学. 北京：北京师范大学出版社，2007.
[4] 陈来著. 有无之境：王阳明哲学的精神. 2 版. 北京：北京大学出版社.

[5] 杨国荣. 王学通论:从王阳明到熊十力. 上海:华东师范大学出版社,2009.
[6] 杨国荣. 心学之思:王阳明哲学的阐释. 北京:中国人民大学出版社,2009.
[7] 杨国荣. 伦理与存在:道德哲学研究. 北京:北京大学出版社,2011.
[8] 亨利·柏格森. 道德与宗教的两个来源. 王作虹,成穷译. 南京:译林出版社,2011.
[9] 倪梁康. 心的秩序:一种现象学心学研究的可能性. 南京:江苏人民出版社,2010.
[10] 笑思. 家哲学:西方人的盲点. 北京:商务印书馆,2010.
[11] 王海明. 新伦理学. 北京:商务印书馆,2008.
[12] 王海明. 公正与人道:国家治理道德原则体系. 北京:商务印书馆,2010.
[13] 傅佩荣. 朱熹错了:评朱注四书. 北京:东方出版社,2013.
[14] 任伟. 数学化的场论:球面世界的哲学. 北京:科学出版社,2013.
[15] 邓晓芒. 康德哲学讲演录. 广州:广东师范大学出版社,2005.
[16] 汉斯-格奥尔格·伽达默尔. 真理与方法(诠释学Ⅰ,诠释学Ⅱ). 北京:商务印书馆,2010.
[17] 范志均. 尼采与现代道德哲学. 北京:中国社会科学出版社,2015.
[18] 斯宾诺莎. 伦理学. 贺麟译. 北京:商务印书馆,1997.

第六章　文化哲学论要

本章标题取自霍桂桓的《文化哲学论要》[1]，严格说来标题应该改为“文化哲学摘要”，因为本章连论要都还称不上。但摘要给人的印象似乎应该更短。再说，只有霍桂桓的这本著作作为参考，再没别的参考文献，所以就有与霍桂桓对话的性质，当然是在认真反复地学习该著作的基础上提出了一些初步设想，主要观点是——文明是凝固了的文化，文化是展开着的文明。

6.1　从本书的哲学观到本书的文化观

本书的4.4节已将人类活动分成文明建设的八重性和生产活动的八重性。按照上一章追问道德来源的方式，可以认为文化活动作为实践活动，作为展开着的文明，可以来自八种生产活动。因此，文化活动就有8×8＝64种来源，也就是说每一个文化活动的主体也就负载着由这64个元素为代表的文化内涵。这八种生产活动，按4.4节分别是物质生产活动、经济基础生产活动、精神生产活动、心灵生产活动、利益生产活动、人的生产活动、上层建筑生产活动与天人关系生产活动。这是以我它关系，也就是人与包括人在内的自然界的关系来考察的文化活动作为实践活动，是历时态的。将上述历时态活动进行共时态凝固，得到人类社会的八种文明，因而这八种文明同样负载着具有文化内涵的8×8＝64个元素。这是以我们关系的主体间性来考察的人类社会文明场，也是8×8的矩阵，共64个元素来刻画的。按4.4节，这八种文明分别是：物质文明、行政文明、精神文明、心灵文明、利益文明、家庭文明、制度文明和环境（生态）文明。

显然，变化的文化主体文化场产生变化的人类社会文明场，变化的人类社会文明场又产生变化的文化主体文化场。形成了社会与个体在文明与文化意义上的相互生成（growing-up）。霍桂桓提出社会个体生成论并作了详细讲解[1]56－61，尽管他仍然称为“社会个体生成论”概要。在霍桂桓的理论基础上，用社会代表共时态的文明，用个体代表历时态的文化。文化代表展开着的文明，文明代表凝固了文化。文化和文明都是相互生成的，所以在社会个体中间加上了一个与字，代表个体是个体，社会是社会。笼统地说社会个体有社会中的个体的歧义性。当然个体总是社会中的个体，但没有区分作为实践活动主体和作为人类社会股东之一的个体的共在主体的含义。所以社会与个体的相互生成论包括四层含义，第一是社会作为文明社会的生成，第二是个人作为文化活动实践主体的生成，简称文化个体的生成。每个文化个体的生成，也就是某一时段所有文化个体的生成。第三是文明社会与文化主体的相互生成，这是一种历时态的目光，本来是不同时的。第四，这是本书的主要特色，将不同时的文化主体与文明社会同时化，也就是文化主体与文明社会的同时生成。这是本书提出的时域辩证法，这也是社会与个体的完备二元论。

霍桂桓提出[1]59“观念性的、抽象的、黑白照片式的”一般的人，“在现实中根本不存在。无论圣贤精英还是凡夫俗子，都是特定社会历史文化环境的产物，都是被社会塑造而

成的,而不是天生的,他们之间的差异只是他们所达到的生成过程层次高低之间的差异,而没有质的区别”。所以在文化和文明的内涵界定上都以 64 个元素的丰富性来表征文化和文明的无限丰富性,避免了黑白照片的单调性和简单性。

霍桂桓强调[1]60:“在这里有必要强调提出的是,在把‘社会个体生成论’所强调的‘生成过程’译成英文的时候,我运用的是自己生造的语词‘growing-up’,而不是西方文献中常用的‘becoming’。这样做并不是为了标新立异,别出心裁,其根本原因在于这里的‘growing’实际上完全可以包涵‘becoming’之泛泛表示‘过程’的含义,而且具有更加具体的‘生命色彩’,而‘up’既包含着‘向上’的意思,可以清楚地表达现实社会个体精神境界不断提升的方向之意,同时也有‘成’的含义,完全能够通过‘境界’这样一种表达方式,把主要着眼于研究对象的共时性维度的西方传统思想所具有的基本思维框架的优点及其研究成果继承下来。此外,这两个语词之间的连字符‘-’则表示以往的中西先贤们实际上都没有把这两者充分地有机地结合起来,结合到什么程度以及取得何种成果,都是由作为其主观世界生产过程的结果而存在的认识水平和人生境界决定的。”这段话说明了本项研究的研究背景和研究意义。“growing”被本书具体化为文化活动,“up”被本书提炼成文明,或者说人类社会活动文明,扬弃了文献[1]的文化活动的目的仅仅在于追求自由的这种“黑白照片”的单调性。其实文化活动本身除了主要地或原始地是人们以文化物的追求自由的活动外,文化活动体现在八种生产活动中和八种文明建设中,有丰富的来源和多样化的目的,比如文化为政治服务,也不可否认是文化的一种主要目的。以文化人,以文教化人,也是文化的目的之一。

霍桂桓还着重指出[1]59“社会是不断生成的人组成的社会,人是由社会塑造和不断发展变迁的社会的人”并展开了论述。这正是前面的提到过的变化的文化主体场产生变化的人类社会文明场,变化的人类社会文明场产生变化的文化主体场的凝练表达。

本书提出的文化哲学的文化定义是:文化是人自由创作的精神家园和人追求和享受文明的精神活动。在每个人的一切的现实的生活中都有文化的成分,本书以八种生产和八种文明建设来表征无限丰富的文化和人类文明。

6.2 从本书的完备二元论来理解的文化哲学

文献[1]的核心哲学概念和哲学方法是“社会个体生成论”,本书 6.1 节对其进行了说明和改进。这一节还要用本书哲学体系中的完备二元论对文化哲学这一部门哲学做出一些特殊化的解释。本书的完备二元论由下列八个元素组成,在某一时段中:

① =实践活动中的人(实践主体);

② =实践活动作为一种事情;

③ =实践活动中的人和事;

④ =实践活动的背景的自然=人化自然、自然化人、人化自然与自然化人、无化着的大自然,其中包含实践主体背景、主体间背景、事情本身背景、人事关系背景;

⑤ =社会化的物或者说具体化了的人与物的关系;

⑥ =社会中每个人作为社会的一个股东的共在中的人,肩负着各种利益、权力、权利等社会关系和联系总和的每个人;

⑦ =社会中的人和物作为事情的普遍化的人与物的关系，在人以群分、物以类聚的意义上；

⑧ =社会化历史性的场=空集=过去与未来的当下化，意志世界、信息世界等不能用本书哲学体系穷尽的其他东西，人与人之间一切关联的总和。

将上述一般公式修改到文化哲学研究，得到文化哲学的八个元素如下，在某一时段：

① =文化活动的文化主体=个体；

② =文化活动作为一种以事明意的事情(精神活动)，作为个人自由创作的精神家园；

③ =文化活动中的文化主体与文化活动这种事情的关系，这取决于文化活动的目的性，按本书体系至少有 64 种关系；

④ =文化活动背景的自然，自然中还特别包括文化活动主体背景、主体活动事情背景、文化活动的人事关系背景，所有的非文化活动也作为背景；

⑤ =文化活动的物，也就是文化活动的产品作为消费品分配给每一个人，或者每个人用自己的钱来购买文化活动的产品，这种产品可以是过程性的。如一场音乐会，这时人是作为社会中的人(观众)来鉴赏和欣赏另外一些作为文化主体的人的创作和演奏。简称社会文明中的文化物，或者说社会化的以文化物[1]，以文化人，以文教化人，以文改变人；

⑥ =共在着的文化主体，每个人是社会文明中的一个成员；

⑦ =不同人群对不同社会文明中的文化物的普遍性关系构架；

⑧ =社会化历史性的人类文明文化场。

仔细地考察以上八个元素还有待于将来的机缘，这里需要说明的是以下几点：

第一，第⑧中的社会化历史性的人类文明文化场的含义，就是前文的个体与社会相互生成论中第四层含义。已将个体文化场与社会文明场的相互生成，不同时强制同时为个体与社会都在其中的社会文明文化场。这个场是穿透自然界、穿透文化产物的物的根本工具。也就是说，这个场通过每个个体对场的感应和响应不断地与时俱进，从而赋予物以文化和文明的内涵、意义功能。本书认为人类生活的物质世界的意义，特别是作为人类自由创作的精神家园的意义和人类享受和追求文明的精神活动的意义由这个场来赋予。每个人生活在世界上，在以文化物和以事明意的自由创作中构建自己的精神家园，并在社会共在中追求和享受着文化活动的成果。同时也被人所创造的文化产品所改变和教化。本书以场的方式来穿透主体间性的哲学难题，旨在改变文化哲学的研究对象和研究方法。

第二，由于自然界存在于本书哲学体系中，在文化哲学的体系构架中有辩证唯物主义的重要元素，物质世界的存在彰显了文化哲学中不可缺少的物质内涵。大自然的出场不仅是文化和文明的载体，更是文化和文明当之无愧的元素之一。在文献[1]的文化哲学论要中，以及在很多文化哲学的论著中大自然没有出现，不能不说是一种理论构架的缺陷。

第三，本节区分了个体作为两种不同的主体，一是文化活动中的实践主体，二是在文化鉴赏和欣赏活动中的共在主体。这为论述社会文明是个体文化的凝固，文化是展开着的文明，从个人的层面完成了本体论与认识论的统一。认识论上的个体=实践主体，本体论上的个体=社会意义上的主体=共在主体。类似于本书哲学体系中的每个人既可以作为生产力核心要素的生产劳动主体，体现人与自然界的关系，又可以作为生产关系的核心载体，体现人与人之间的在社会中共同存在的关系(按霍桂桓的术语)。

文化主体代表“growing”,文明主体代表“up”。当然文化主体和文明主体同时又都在“growing”,并又都在“up”。这里实际上是四种“growing”。一是文化主体的“growing”,二是社会主体的“growing”,三是文化主体与社会主体的相互“growing”,四是文化主体与社会文明主体的共同“growing”。

第四,与本书哲学体系一致,①②③④⑤⑥⑦中的关系都以已经充实了一段时间为准,已在观念中存在,已经有了文化意义和文明意义,但尚未充实的关系放在空集或余集⑧中。

第五,本书的文化哲学颇具生产性质,实质上是由生产力与生产关系的哲学构架移植而来,有没有合理性?事实上,正如霍桂桓指出的[1]163,近十多年来“文化产业”已经获得了极其迅猛的发展,产生了特别引人注目的成果,比如说,美国文化产业所产生的经济效益已经接近其国民生产总值的1/4,成为其国民经济发展和综合国力的重要支柱之一。文化产业在我国起步较晚,但自2000年以来,也取得越来越引人注目的成就。不仅如此,由于文化现象本身的独特性,广泛涉及从日常生活消费到文化活动消费,从“主流文化”到“边缘文化”,从“外来文化”到“民族文化”的几乎所有方面,因此文化产业对当今社会文化生活产生了巨大的现实影响。所以直接套用物质生产为主的哲学体系来讨论以感性形式和精神内容来满足人们精神需要的“文化产品”是基本恰当的[1]。文化产业的生产资料是“文化创意”,也是一种精神性的东西。在自然物质资源越来越少的今天,发展文化产业、生产文化产品、占领文化市场具有特别重大的现实意义。然而已如霍桂桓指出的[1]167:“目前的‘文化产业’所‘生产出来’的‘文化产品’,并没有真正充分发挥上述正确的‘精神导向’作用,因而不断引导和促进现实消费者的人生境界的不断提升。而是主要关注‘文化产业’所可能带来的经济效益,乃至这种效益对提高综合国力,加强民族文化竞争力的重要作用,因而在一定程度上存在着为了经济效益而迎合,甚至不断刺激消费者的感官欲望的倾向,这必然会使‘低俗文化’出现大行其道乃至走向泛滥的趋势。因此我认为,这样的基本发展态势显然不可能说代表了‘先进的’文化发展方向,而是因为与这样的方向背道而驰,只能发挥继续使人们的精神生活走向精神空虚和消极颓废的作用。”我认为这方面的典型例子是各种游戏的生产,及其相关的“文化产品”,打游戏明显有害于青少年的身心健康,特别是影响青少年的视力,很多年轻人戴上眼镜并不是由于刻苦读书,而是因为沉迷于游戏。另外,从生产领域也产生异化。资本所到之处,一切皆成雇佣。某些文化人为了拿到钱,以文化活动的名义进行一种赤裸裸的逐利活动。文化活动本来是一种自由创作的构建精神家园的高尚的纯粹活动,但现在出现了异化,文化成为文化人受金钱驱使的一种技术化的量化的生产活动,缺乏相应的创造性。很多电视剧拍来拍去,大同小异,没有多少“文化创意”。高水平的原创性的文化产品相对较少。文化产品的生产机制出了问题,搞文化创作的人拿不到钱,拿得到钱的人又没有时间搞创作。

第六,霍桂桓探讨了人生的四种境界[1]100—108,也就是以自我为中心,逐步走向对外物的享受性鉴赏的人生境界;追求达到与“大我”相融合的人生境界和通过与“大我”的水乳交融的融合,达到“天、地、人合一的完满自由境界。”这四种人生境界,根据本书体系,第一、第二种人生境界大至相当于在第五章中讲的,以事和物为第一优先的信仰;第三种人生境界大致相当于以对人处事和待人接物为第一优先的信仰;第四种人生境界大致相当于自然界与社会化的家庭中就能追求到并享受到的最大的自由境界。这不仅由于本书的

哲学体系与文献[1]相当不同,而且由于本书的着重点与文献[1]也不一样。我认为文化活动的起源在于家庭,对自由的追求、对自由的享受也主要在于家庭。现实的文化创作活动、文化欣赏活动和文化享受活动也多数发生在家庭之内。而一切文明的体现,可以说家庭是一面镜子。家庭既是人的物质家园,也是人的精神家园。西方格言说,房屋不是家,只有精神性的现实存在才是家的本质内涵。换句话说一切精神家园的建设不能脱离家庭的物质外壳,更不能脱离家庭成员的每个人这一实在的精神实体,来空谈精神家园的建设。如果实体性的作为家庭成员的人都已经散架,此外作为家庭的物质外壳的车子、房子一样都没有,也很难谈精神家园的建设。所以,为了把精神家园的建设落实到每个家庭和每个家庭中的每个人,应该把在自己家里追求和享受文化活动并取得成功看成文明的主要标志和文化活动的成功标志。同时也不得不对精神家园建设所涉及的生活的方方面面都有所提及,而不像文献[1]那样局限于用符号追求自由的活动的纯而又纯的文化活动。现实生活中的文化活动并没有那么纯粹,涉及方方面面,涉及千家万户,特别是在文化已经产业化、政治化、商业化的今天,脱离现实的纯粹文化很难找。

6.3 文化与文明

霍桂桓对文化做出了很好的学术定位[1]97—99:"无论作为动态的文化活动而存在,还是作为静态的文化现象而表现,在人们的日常生活之中,文化实质上都处于一个物质实践过程相对完结,另一个新的物质实践过程尚未开始的位置之上,而其发挥的作用,则是通过饱含着情感体验和主观愿望的各种各样的'符号'所构成的'精神家园',使人们在其中可以追求和最大限度地享受各自的自由。"

"所谓文化,就是作为社会个体而存在的现实主体,在其具体进行的认识活动和社会实践活动的基础上,在其基本物质性生存需要得到相对满足的情况下,为了追求和享受更加高级、更加完满的自由,而以其作为感性符号而存在的'文'来'化''物'的过程和结果"。

"文化的本质特征就是'主体为了追求和享受最大限度的自由而运用感性符号建构精神家园'的过程和结果。正是从这种意义上来看,'社会个体生成论'首次把'最大限度的自由'当做各种文化现象的实质内容而揭示了出来,从而使'文化'不再仅仅是包括'生活样式'、'生活方式'在内的纯粹形式而没有任何内容的'空壳',而且在此基础上,它进一步把各种各样经过明确限定的感性符号当做'文化'的具体表现形式而揭示出来,并且使这样的内容和形式达到了有机统一。"

"这里所谓以'文''化''物'的物,所指的是与主体的主观世界相对的,其所面对的一切对象,其中即包括作为外在事物而存在的客观对象,也包括人自己的身体本身。"

"而作为静态形象而存在的文化现象,则具有感性符号形式多样性、精神寄托性、社会历史性、非物质实体性和普遍存在性。"

文献[1]将本书称为文明的凝固了的文化活动称为文化现象,这是本书在术语上与文献[1]的差异。文献[1]将文化活动和文化活动的结果统一称为文化,这当然没什么不可以,但本章将文化活动的结果称为文明,这样做使得追求自由的精神家园建设活动有了更加明确的目的和方向,也就是文化的发展方向是越来越文明,这样将文化建设与文明建设联系起来,因此文化是展开着的文明,文明是凝固了的文化。另外根据本书体系,在社会

意义上的文化称为文明,继续采用以文化物。而在自然界的意义上,文化活动的本质界定为以事明意,文化活动作为一种事情,具有精神上的意义。所以本书的文化定义是:文化是人自由创作的精神家园和人追求和享受文明的精神活动。社会意义上的文化可以体现为一种意义的传递和传达、共享。意义就不限于情感了,尽管情感是意义的一种。因为在前文引用的霍桂桓的论述中,特别指出了以文化物的物可以是人自己身体本身,也就包括了人凭想象的一切对象,包括现实中不存在的观念性对象。这在讲利益的时候专门对对象两个字的含义进行了厘清。因此霍桂桓的论述实际上包括了社会意义上人与人之间意义的沟通和理解,具有比情感传达更为丰富的内涵。既有情感的符号,也有理性的符号,意义可以是不带感情色彩的。当然霍桂桓的工作还是很有意义的,突出了感性,因为实践本身就是感性的。而马克思说社会生活在本质上是实践的,而在本书第一版已补充了一句,实践也总是在社会中的实践[2]。所以突出感性原则是不错的,这里应该补充的是,文化活动及其成果(文明)除了丰富的鲜明的感性外,同样是有深沉的毋庸置疑的意义内涵。可能用文明来概括比用自由更贴切一些。

再一次以最为自由的审美活动为例,中国人还是推崇尽善尽美为最高境界,善为美的基础和前提。另外,李泽厚等人把中国文化概括为礼乐文化,所以享受是以符合礼为条件的。总之用文明让人感觉到的自由创作的精神家园和人的追求和享受也都是有限制的自由和有限制的乐。尽管说到了共产主义是自由人的联合体,自由本身也代表先进文化的前进方向,但是当下而论,还在社会主义初级阶段,人还不太自由,还在做八种文明的建设工作。因此将文化定位为促进八种文明的建设活动似乎更为合适。好在本书体系有对角线占优的说法,相信不致引起误解。

6.4　文化传统之辨析

霍桂桓在文献[1]中好几处用英文解释汉语的地方,先提到“growing-up”,后面又提到文化哲学的英译应该是“philosophy of culture”而不是“cultural philosophy”。亦即研究者必须明确,“文化哲学”就是关于“文化”,对“文化”进行探讨和研究的“哲学”。文化哲学是哲学的一个分支学科,文化哲学的研究对象是文化,正如语言学的研究对象是语言。夹在中间的是关于文化传统到底应该是“tradition of culture”还是“cultural tradition”。霍桂桓写道[1]118:

“毋庸赘言,我们这里之所以把‘文化传统’的英文列举出来,并不是为了炫耀自己的外文水平而以引用外文的形式‘掉书袋’,而是因为运用这种方法能够比较贴切地把我们希望表达的意思展示出来。”紧接着霍桂桓详细论述了“传统”与“文化”,文化传统与传统文化的意义含混。霍桂桓写道[1]118:

“我认为,我们其实应当用‘tradition of culture’来表示‘传统文化’——尽管这样做有英文方面用语累赘之嫌,但由于这里的‘of’具有明确的、来源于其‘构成’意义的‘所属’意味。所以,即使我们并不拘泥于这里的英文字面所展示出来的意思,但从我们前面根据‘社会个体生成论’对文化的本质特征进行的探讨出发,我们也可以说,所谓‘文化传统’实际就是‘文化’本身的‘传统’,而不是其他社会现象或者社会活动的‘传统’,它是相互交织、相对完善的表情达意的感性符号系统;另一方面是与这种符号系统相对应的,融知、

意、情于一体的深层主观的心理结构。”

本书通过对这一段话的反复领会，如果有将时间分成时段并与时俱进的目光，“文化传统”可以文明来通达。不要急于了解传统文化是什么，先要厘清文化传统的真实含义，这在本书的哲学体系中是易于辨析的。

文化传统＝文明。当然传统文化只是空集中的一部分。正如霍桂桓所写的“而所谓‘传统文化’也就是‘存在于历史传统之中，属于历史传统并和历史传统一起发挥作用’的‘文化传统’；它从时间角度来看属于过去，是某种既包含‘精华’，也包含‘糟蹋’的有机统一体。”

以上工作类似于现象学上的小纸片，搞哲学就是要先会做小纸片，分析哲学基本上就是由一些小纸片组成的。其实这里的概念辨析不仅对理解本章内容十分有用，对理解本书的整个哲学也很要紧，是一个难得的机会来区分历史学的历史与哲学的历史。特别是在引入空集以后，$\triangle t$ 固定，时间区间由 $[T_0, T_0+\triangle t]$ 组成，而 T_0 又是与时俱进的。历史学的历史被两次生成了，一次是作为过去的事进入时间区间中的历史；另一次是由于 T_0 的可以回到过去而进入过去了的事。所以一般的书论述不清楚。霍桂桓知道问题的真实存在，借助于英语厘清了这两个概念的区别和联系，这是哲学上了不起的工作。在这里不要认为霍桂桓关于历史的论述烦琐，由于引入时间区间概念，相对容易区分文化传统与传统文化。孙正聿解释过历史唯物主义，不知他内心是否像晶体一样透明，至少在表述上是含混的。本质就是霍桂桓厘清的文化传统与传统文化[1]。不妨再次引用霍桂桓的论述[1]118：

“具体说来，国内学术界的研究者们在用英文表达其文化传统的研究结果的时候，往往用‘cultural tradition’来表示‘传统文化’；在这里，就‘文化传统而言’cultural 严格说来并没有明确的指代对象——也就是说，它究竟是作为形容词来表示‘传统’的‘文化’维度，亦即表示‘传统’本身所具有的文化属性，还是由‘文化’所形成的‘传统’，事实上并不清楚。加上迄今为止中西方文化观所具有的机械拼凑，大而无当的‘大全’特征所发挥的不良作用，情况就更加糟糕了。……由于传统和文化都没有经过确切地界定，人们对于‘传统文化’的具体含义究竟是什么也仍然是众说纷纭，莫衷一是。”

本书认为文化传统与传统文化的问题涉及的、在归根结底的意义上是对时间的理解。外在的、物理学的时间是不适合描写生命现象的。每个人不管生于公元前或公元后，无论哪年哪月哪天，都是外在的时间。而内在的时间意识不过是从出生到死亡的一个有限的时段，多数人也就几十年而已。人出生以后，每天都在“growing”，每天也都在“up”。这是一种连续的内在的时间之流。而每个人在这种时间意义上都是同构的，比如都经过婴儿、幼儿、儿童、青年、中年、老年等若干阶段。同样对于每个民族的文明，虽然一代又一代的人都已去世，但它内在的时间之流还延续着，不断地“growing”，不断地“up”。对于全人类而言，也是一样，但是值得注意的是在这一过程中文化传统总是以空集的形式参与人类生命的成长和人类生命的长成，前者称为文化活动，后者称为文明。

以前一直没有机会说清楚本书理解和解释的历史唯物主义与孙正聿理解和解释的，以及俞吾金理解和解释的历史唯物主义到底有什么区别。此时，可以说本书的历史唯物主义是在文化传统中包含了传统文化的历史唯物主义，历史二次进入历史唯物主义的视野，而且是以不同的方式将历史收入眼帘。有别于其他理解和解释的历史唯物主义，历史

仅一次进入历史唯物主义的视野。这里也就顺带回答了为什么对自然的定义是由四个元素组成:

自然=人化自然、自然化人、自然化人与人化自然和无化着的大自然。对于某一时段先是自然化人,人从自然界中"growing"(长成),然后是自然化人,先在自然界中成长,然后是人在自然界中不断地成长和不断的长成,背景都是对某一时段存在着的无化着的自在自然界,尚与人无关。

整个人类活动按马克思的定义称为历史,因而这种历史是有内在时间意识的,是有内在生命的,用描写自然界的物的流俗的时间没法描写这一类现象。因为人类通过文化形成了社会性的记忆,有人称为集体无意识。而这种记忆又可以遗传到每一代人和每一个人,同样社会还有意志,意向将来,比如共产主义社会的实现。因此社会化历史性的场尽管看不见、摸不着、听不见,但它是客观存在的,人类生活的意义由此照亮,人类文化的发展和生长以及文化的长成都要用社会化历史性的场来描写。所以霍桂桓的英语表达确实存在十分到位的地方,给哲学带来了方便。

总之文化是展开着的文明,文明是凝固了的文化。

参考文献

[1] 霍桂桓. 文化哲学论要. 北京:中国社会科学出版社,2011.
[2] 任伟. 数学化的场论:球面世界的哲学. 北京:科学出版社,2013.

第七章　均匀各向异性介质圆柱的平面波函数理论

本章取材于刘宁硕士论文第二章[1]，如果没有刘宁的协助，要写作本章是不可能的。本章由任伟、吴信宝和刘宁共同撰写，任伟定稿。

自 1873 年 Maxwell 建立电磁场基本方程以来，电磁波理论及其应用的发展已经有 100 多年的历史。几代数学家、物理学家和工程师都投入了大量的时间和精力来研究波的传播和散射。建立电磁波在复杂物理环境中的散射模型，对于地球空间遥感、现代移动通信、目标成像与雷达识别等具有重要意义。在大气和海洋遥感中需要研究不同形状、不同材料的物体对电磁波的散射特性，研究电磁波与散射体之间的相互作用及其分布规律，以便对目标特征进行分析；移动通信网络规划中，电磁波的环境传播特性是其通信系统设计的依据，基于空间地理信息系统的三维电磁波传播模型，能够准确的预测出电磁波在各种复杂环境下的信号强度分布，辅助移动运营商作出最佳的基站选址和频率规划；借助微波成像技术，学者开发出了轻巧实用的探地雷达和机载雷达，用于石油勘探、市政管线定位和军事等。随着科学技术的进一步发展，电磁场与电磁波的应用会越来越广泛，会有大量的课题需要学者深入研究。

分析计算途径需结合实际环境的电磁参数求解 Maxwell 方程边值问题，通常只有一些经典问题有解析解。应当说，解析解因可为其他数值解提供比较数据，并能给出清晰的物理机制而具有重要的指导性意义。同时解析方法也已融入到各种数值方法中而形成各种准解析技术。然而，由于实际环境的复杂性，往往需要通过数值解得到具体环境下的电磁波特性。20 世纪 60 年代以来，随着信息技术和高速、大容量电子计算机的出现与发展，人们借助高性能的计算机解决了许多繁复艰巨的问题。许多有意义的电磁场数值计算方法也逐步发展起来，使得解决的电磁问题越来越复杂，并被应用于工业和国防的各个领域。科学计算已经成为和科学实验、科学理论并列的第三种方法，在科学研究中发挥着不可替代的重要作用。从线性场的计算发展到非线性场的计算，从稳定场到瞬态场，从研究各向同性介质到研究各向异性介质等。概括来看，电磁场的数值计算方法可分为低频数值方法和高频近似方法两类。低频数值方法如矩量法、有限元法、FDTD 方法等能准确地解决几何形状和组成材料都很复杂的电磁问题，但由于计算机内存、速度及方法本身的限制，目前只能处理较小目标的电磁散射问题。几何光学法、物理光学法、几何绕射理论等高频近似方法虽然具有物理概念清楚、快速简便的特点，但仅适用于电大目标的电磁散射问题，并且对于分析多个和多层散射体的目标存在射线寻迹和复平面寻根的困难。

FDTD 方法、有限元法等数值方法都存在方法误差，所得结果不够精确。解析方法则能弥补这个不足，它给出的是精确解，可用来检验其他数值方法的精确性。某些典型问题的解析解，也常用作发展某种近似方法的基础，比如几何绕射理论中的绕射系数的获取。1871 年，瑞利从理论上得出入射光在线度小于光的波长的微粒上的散射的现象，称为瑞利散射。后来又给出了无限平板中波动函数的解。以瑞利的工作为基础，在该领域已有大量论文发表。涉及各向异性介质的电磁散射问题，其中以 1986 年意大利学者 Monzon

提出的平面波谱展开法比较深刻[2]。但是各向异性介质圆柱的本征函数解尚未有人导出,原因是介质参数变成张量以后,对解偏微分方程十分有效的分离变量法不再适用。1993 年,作者在其系列论文中[3~5]导出了均匀各向异性介质的波函数,给出了经典物理学各领域的波动方程在圆柱和圆球坐标系下的严格级数解。作者的独到之处在于不用分离变量法,而采用角谱积分表达式。数值验证表明,应用均匀各向异性介质的本征波函数计算均匀各向异性圆柱和球的电磁散射,结果准确,简洁高效。

与 Monzon 的方法相比,作者提出的均匀各向异性介质的波函数理论具有明显的优势。从表面上看,Monzon 在对 $h(\xi)$的逼近方法上只是采用了对一连续的 δ 函数的逼近,在数值计算过程中,需要进行复杂的积分运算。而均匀各向异性介质的波函数理论采用的是傅里叶级数这种完备正交函数展开法[6],这种方法更适合于求解各种物体的电磁散射问题。波函数理论还揭示了各向异性介质圆柱的本征函数可由级数表达,且给出了各类波函数及其级数、积分表达式,这使得可以利用诸如模匹配法之类的简单方法处理任意形状多层介质柱的散射。更为重要的是,由导出的级数表达式可以导出各向异性介质圆柱各类波函数的变换叠加定理,为多散射的研究铺平道路。

7.1　各向异性介质

对于电介质,电场强度 $\boldsymbol{E}$ 与电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 平行;对于磁介质,磁感应强度 $\boldsymbol{B}$ 与磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 平行。除这类各向同性介质外,还有一类介质称为各向异性介质,其电磁特性参数与外加电磁场的方向有关。譬如,外加恒定磁场作用下的等离子体、饱和磁化的铁氧体对在其中传播的电磁波就呈现各向异性的性质。电磁波在各向异性介质中传播时有许多特点,在工程应用上有重要意义。

各向异性介质分为电各向异性介质、磁各向异性介质和双各向异性介质。

电各向异性介质的介电常数为张量,磁导率为标量,其本构关系为

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H} \tag{7.1}$$

式中,$\boldsymbol{\varepsilon}$ 为介质的介电常数张量;磁导率 $\boldsymbol{\mu}$ 可认为等于 μ_0。在直角坐标系中,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}$,可表示为

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} \tag{7.2}$$

此式表明,在电各向异性介质中,外加电场的 E_x 分量可产生 D_x, D_y, D_z 三个分量。此时的 $\boldsymbol{E}$ 不再与 $\boldsymbol{D}$ 平行。

磁各向异性介质的磁导率为张量,介电常数为标量,其本构关系为

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{D}=\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E} \tag{7.3}$$

式中,$\boldsymbol{\mu}$ 为介质的磁导率数张量。在直角坐标系中,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}$,可表示为

$$\begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} \tag{7.4}$$

此式表明,在磁各向异性介质中,外加磁场的 B_x 分量可产生 H_x, H_y, H_z 三个分量。此时

的 $\boldsymbol{H}$ 不再与 $\boldsymbol{B}$ 平行。

可见，无论是各向同性介质，还是各向异性介质，本构关系将两个电场矢量通过一个标量或张量联系起来，同样也将两个磁场矢量通过一个标量或张量耦合起来。将介质放入电场，它即将被极化；将介质放入磁场，它将被磁化。数学上，电位移和电场或磁感应强度和磁场分别代表三维欧氏空间中的两个矢量，如果这两个矢量之间存在线性关系，其线性变换的表示就是矩阵，物理上称为张量。

外加恒定磁场作用下的等离子体就是一种典型的电各向异性介质。等离子体是一种带负电荷的电子、带正电荷的离子和未带电的中性分子组成的混合体。由于其内部的电子和离子数目相等，即净电荷为零，对外显中性，因此称其为等离子体。譬如，地球上60～1000km 的电离层就是等离子体层，它是由太阳光中的紫外线使高空大气电离形成的。在地球磁场的影响下，此电离层就具有电各向异性的特性，它的介电常数可能多达九个分量。此外，高速飞行器通过大气层时形成的高温区、电弧以及某些微波电子管内都会形成局部等离子体。为了简化分析，通常假设等离子体的密度很小，不考虑其热运动；由于等离子体的质量远大于电子的质量，可以认为在外部电磁场作用下，只有电子运动；还假设等离子体是均匀地充满整个空间，在没有外部电磁场影响时呈各向同性特性。在这些设定下，只需研究自由电子在外加电磁场作用下的运动就可了解等离子体的各向异性特性。

外加恒定磁场作用下的铁氧体是一种典型的磁各向异性介质。铁氧体又称磁性瓷，是一种非金属类的磁性材料，它的磁导率很高，但电导率很低。铁氧体的磁性主要来源于电子自旋形成的磁偶极矩，所以研究电子在外加磁场作用下产生的物理现象，是研究铁氧体各向异性特性的基础。

7.2　柱面波函数

在圆柱坐标系中，标量波动方程可以写为[7]

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}+k^2\psi=0 \tag{7.5}$$

式中，$k=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$，称为波数。采用分离变量法，可以令

$$\psi=R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z) \tag{7.6}$$

将式(7.6)代入式(7.5)得到

$$\begin{cases}\rho^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}\rho^2}+\rho\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\rho}+(k_\rho^2\rho-n^2)R=0\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+n^2\Phi=0\\[2mm]\dfrac{\mathrm{d}^2Z}{\mathrm{d}z^2}+k_z^2Z=0\end{cases} \tag{7.7}$$

式中，n 为整数；$k_\rho^2+k_z^2=k^2$。式(7.7)中关于 Φ 和 Z 的方程都是谐方程，它们的解称为谐函数，通常用 $h(n\varphi)$ 和 $h(k_z z)$ 来表示。为了便于解析处理，这里的 $h(n\varphi)$ 和 $h(k_z z)$ 一般取指数形式 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$ 和 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi}$。式(7.7)中关于 R 的方程是标准的 Bessel 方程，它的解为Bessel函数，一般用 $B_n(k_\rho\rho)$ 表示。常用的 Bessel 方程的解为

$$B_n(k_\rho\rho) \sim J_n(k_\rho\rho), Y_n(k_\rho\rho), H_n^{(1)}(k_\rho\rho), H_n^{(2)}(k_\rho\rho) \tag{7.8}$$

$$H_n^{(1)}(k_\rho\rho) = J_n(k_\rho\rho) + \mathrm{j}Y_n(k_\rho\rho) \tag{7.9}$$

$$H_n^{(2)}(k_\rho\rho) = J_n(k_\rho\rho) - \mathrm{j}Y_n(k_\rho\rho) \tag{7.10}$$

式中,$J_n(k_\rho\rho)$是第一类 Bessel 函数;$Y_n(k_\rho\rho)$是第二类 Bessel 函数;$H_n^{(1)}(k_\rho\rho)$是第一类 Hankel 函数;$H_n^{(2)}(k_\rho\rho)$是第二类 Hankel 函数。需要说明的是,$J_n(k_\rho\rho)$和 $Y_n(k_\rho\rho)$的物理意义为描述柱面驻波的波动特性;$H_n^{(1)}(k_\rho\rho)$的物理意义为描述柱面内行波的波动特性;$H_n^{(2)}(k_\rho\rho)$的物理意义为描述柱面外行波的波动特性。

由于所考虑的电磁场在 $\rho=0$ 是有限的,且在 $\rho=0$ 仅有第一类 Bessel 函数是非奇异的,因此 $B_n(k_\rho\rho)$必然是 $J_n(k_\rho\rho)$,故基本波函数的一般形式可以写成

$$\psi_{k_\rho,n,k_z} = J_n(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{k_z z} \tag{7.11}$$

在 k_ρ 是复数的情况下,$H_n^{(2)}(k_\rho\rho)$是在大 ρ 消失的唯一解。如果 k_ρ 是实数,它代表外向行波。所以,如果在无限远无源,在包括 $\rho\to\infty$ 的区域内,$B_n(k_\rho\rho)$必定是 $H_n^{(2)}(k_\rho\rho)$,因而,圆柱外部的散射场可取基本波函数变为

$$\psi_{k_\rho,n,k_z} = H_n^{(2)}(k_\rho\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{k_z z} \tag{7.12}$$

7.3 波的变换

为了在运算时方便,常常需要将某一坐标制下的基本波函数用另外一种坐标制的波函数来表示,这种类型的表示式称为波的变换[8]。柱面坐标系建立如图 7.1 所示。

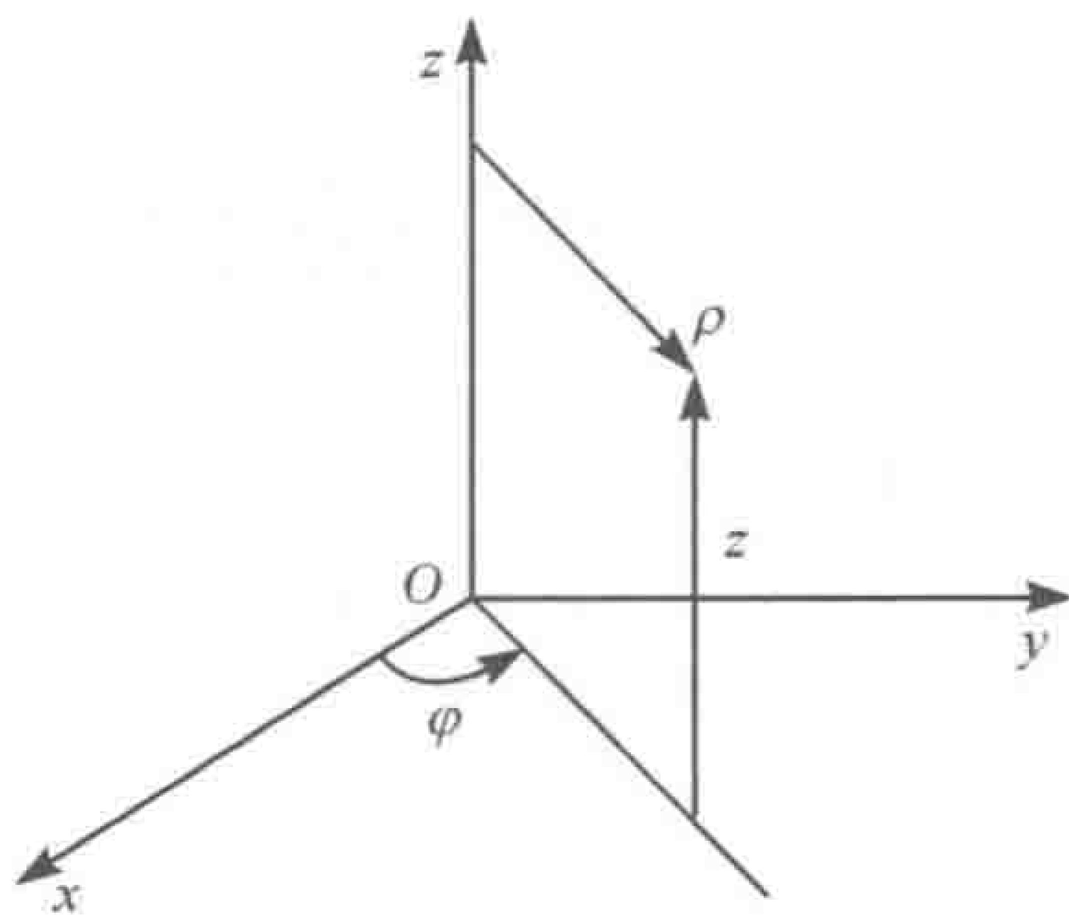


图 7.1 柱面坐标系

现将单位振幅的平面波 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}$用柱面波来表示,并且平面波在原点($\rho=0$)是有限的,并对 φ 有 2π 的周期性,因而,它必须表示为

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x} = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\rho\cos\varphi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n J_n(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.13}$$

式中,a_n 是常数。为了计算 a_n,将式(7.13)的每一边乘以 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}$,并对 φ 其从 0 到 2π 积分,得

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\rho\cos\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\mathrm{d}\varphi = 2\pi a_m J_m(\rho) \tag{7.14}$$

然后左边对 ρ 的 m 次导数在 $\rho=0$ 得到

$$\mathrm{j}^{-m}\int_0^{2\pi}\cos^m\varphi\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi\mathrm{j}^{-m}}{2^m}\tag{7.15}$$

右边的 m 次导数在 $\rho=0$ 得到 $2\pi a_m/2^m$，对比两边的值，得到

$$a_m=\mathrm{j}^{-m}\tag{7.16}$$

因此，式(7.13)可以写成

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\rho\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}J_n(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\tag{7.17}$$

此式就是将平面波 $\mathrm{e}^{-\mathrm{j}x}$ 以柱面波函数表示的波的变换。

另外一种重要的波的变换是相当于圆柱坐标原点平移的变换，在此考虑柱面波函数

$$\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)=H_0^{(2)}\left[k\sqrt{\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')}\right]\tag{7.18}$$

式中，ρ' 和 φ' 分别为线源在圆柱坐标中的矢径和线源与 x 轴的夹角。

因为 $\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$ 在 $\rho=0$ 是有限的，而且对 φ 有 2π 的周期性，因此，在 $\rho<\rho'$ 的区域内，允许选用的圆柱坐标系中的二维波函数为 $J_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$。在 $\rho>\rho'$ 的区域内，因为 $\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$ 代表外向行波，允许选用的二维波函数为 $H_n^{(2)}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}$。由于 $\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$ 满足互易性，将场点 ρ 与源点 ρ' 互换，φ 值不变，因而用圆柱坐标系中二维波函数表示的 $\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$ 展开式中，不带撇的场点坐标与带撇的源点坐标必须是对称的，因此，$\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)$ 可以写成

$$\Psi=\begin{cases}\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nH_n^{(2)}(k\rho')J_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi')}, & \rho<\rho'\\ \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_nJ_n(k\rho')H_n^{(2)}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi')}, & \rho>\rho'\end{cases}\tag{7.19}$$

式中，b_n 为常数。由于 Ψ 是 $\varphi-\varphi'$ 的偶函数，所以式(7.19)中两个区域内的角度函数均写成相同的形式。

为了确定系数 b_n，令 $\rho'\to\infty$，$\varphi'=0$，则

$$[\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos(\varphi-\varphi')]^{\frac{1}{2}}\approx\rho'-\rho\cos\varphi\tag{7.20}$$

然后利用 $H_0^{(2)}(k\rho)$ 在 $|k\rho|\to\infty$ 公式将式(7.18)写成

$$\Psi=H_0^{(2)}(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)=\sqrt{\frac{2\mathrm{j}}{\pi k\rho'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos\varphi}\tag{7.21}$$

再由式(7.19)在 $\rho'>\rho$ 区域内的表达式得

$$\Psi=\sqrt{\frac{2\mathrm{j}}{\pi k\rho'}}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\rho'}\sum_{n=-\infty}^{\infty}b_n\mathrm{j}^nJ_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\tag{7.22}$$

因为

$$J_n(-k\rho)=(-1)^nJ_n(k\rho)=\mathrm{j}^{2n}J_n(k\rho)\tag{7.23}$$

所以，由式(7.17)可得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos\varphi}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^nJ_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\tag{7.24}$$

式(7.21)和式(7.22)应当相等，考虑到式(7.23)，可得 $b_n=1$，因此，式(7.19)变为

$$\Psi=\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}H_n^{(2)}(k\rho')J_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi')}, & \rho<\rho'\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho')H_n^{(2)}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi')}, & \rho>\rho'\end{cases} \tag{7.25}$$

此式统称为 Hankel 函数的相加定理。因为第一类 Hankel 函数和第二类 Hankel 函数是共轭关系,即

$$H_n^{(1)}(k\rho)=H_n^{(2)}(k\rho) \tag{7.26}$$

将第一类 Hankel 函数和第二类 Hankel 函数的相加定理相加就可得到第一类 Bessel 函数的相加定理,即

$$J_n(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(k\rho')J_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi')} \tag{7.27}$$

7.4　均匀各向同性单层介质圆柱的解析解

在均匀各向同性介质圆柱中,介质的介电常数和磁导率分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$。其结构图如图 7.2 所示。

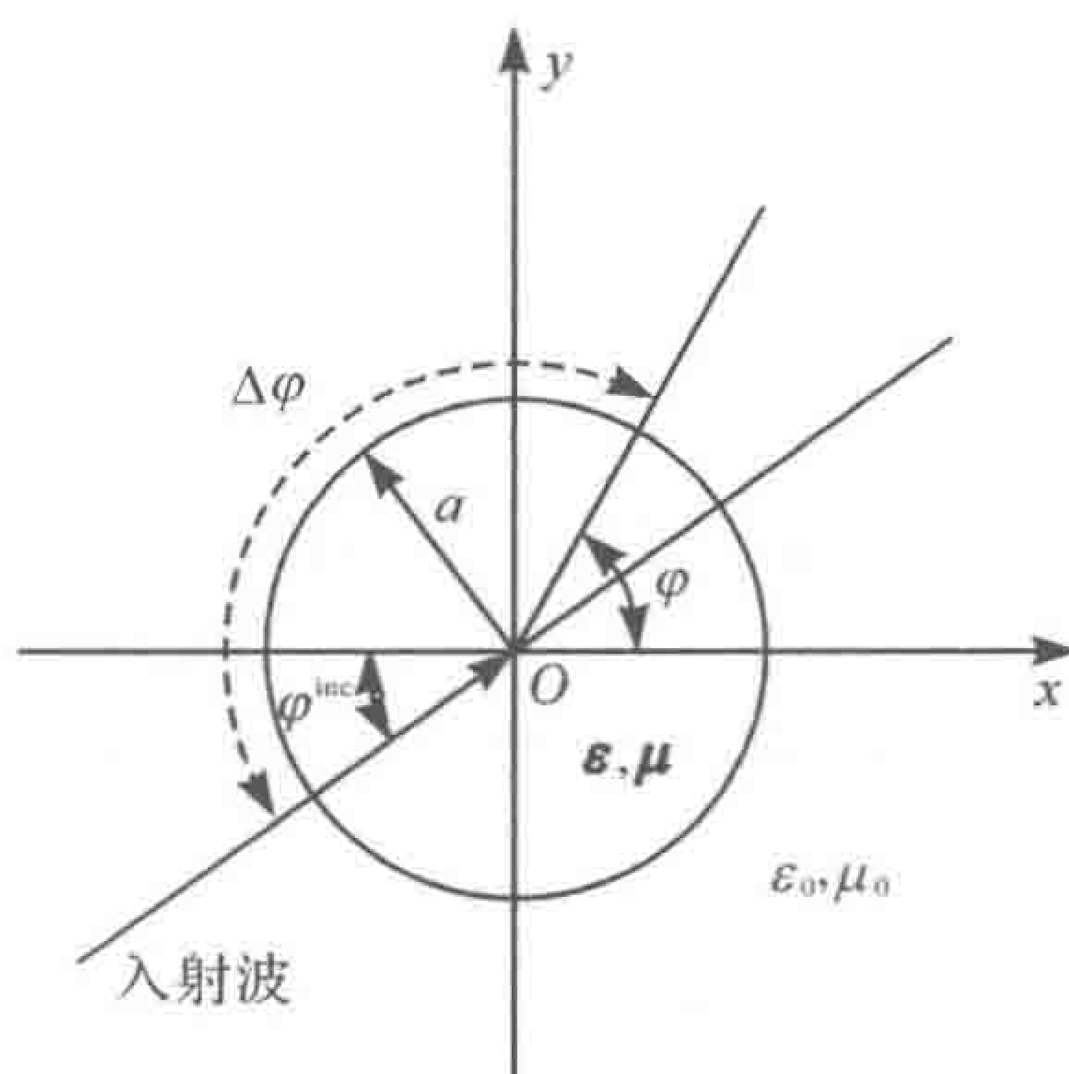


图 7.2　无限长均匀各向同性介质圆柱结构图

由于电磁学上的二重性原理,仅分析 H 极化($\boldsymbol{H}=H\boldsymbol{z}$)的情形。由于所考虑的场在圆柱内部 $\rho=0$ 处是有限的,只有第一类 Bessel 函数在 $\rho=0$ 是非奇异的,因此,根据上文中介绍的圆柱波函数理论可知,在均匀各向同性介质圆柱内部,其磁场的表达式可以写成

$$H_z(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}a_nJ_m(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.28}$$

式中,由于介质为各向同性的,$J_m(k\rho)$为对角线占优矩阵。

根据 Maxwell 方程$\nabla\times H=\varepsilon\dfrac{\partial E}{\partial t}$可求得均匀各向同性介质圆柱内部的电场表达式为

$$E_\theta(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}=-\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}a_nJ'_m(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.29}$$

在均匀各向同性介质圆柱的外部(自由空间),第四类 Bessel 函数是 $\rho\to\infty$ 消失的唯一解,故圆柱外部的散射场可以写成

$$H_s(\rho,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^{-n} G_n H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.30}$$

相应的磁场可以写成

$$E_s(\rho,\varphi) = -\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^{-n} G_n H_n^{(2)\prime}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.31}$$

均匀各向同性介质圆柱的入射磁场可以写成

$$H_z^{\mathrm{inc}}(\rho,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^{-n} J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}} \tag{7.32}$$

同样，由 Maxwell 方程可以求得电场的表达式为

$$E^{\mathrm{inc}}(\rho,\varphi) = -\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^{-n} J_n'(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}} \tag{7.33}$$

根据电场和磁场在边界上的连续性，可列写矩阵形式的方程为

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}^i+\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}^s\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{S}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}^i+\boldsymbol{S}_4\cdot\boldsymbol{\alpha}^s\end{cases} \tag{7.34}$$

式中，矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的各元素分别为 $A_{mn}=J_{m}(ka)$，$B_{mn}=-\mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}J_m'(ka)$，并且 $\boldsymbol{S}_i(i=1,2,3,4)$ 为对角矩阵，其元素分别为

$$S_{1mn}=J_n(k_0a),\quad S_{2mn}=H_n^{(2)}(k_0a) \tag{7.35}$$

$$S_{3mn}=J_n'(k_0a),\quad S_{4mn}=H_n^{(2)\prime}(k_0a) \tag{7.36}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^i=\{\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}}\},\quad \boldsymbol{\alpha}^s=\{G_n\} \tag{7.37}$$

根据 $\boldsymbol{T}$ 矩阵理论[9]知

$$\boldsymbol{\alpha}^s=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}^i \tag{7.38}$$

式中，$\boldsymbol{\alpha}^i$ 和 $\boldsymbol{\alpha}^s$ 分别为入射和散射向量，求解矩阵方程(7.33)可得

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{S}_2^{-1}\cdot\{\boldsymbol{A}\cdot[\boldsymbol{B}-\boldsymbol{S}_4\cdot\boldsymbol{S}_2^{-1}\cdot\boldsymbol{A}]^{-1}\cdot[\boldsymbol{S}_3-\boldsymbol{S}_4\cdot\boldsymbol{S}_2^{-1}\cdot\boldsymbol{S}_1]-\boldsymbol{S}_1\} \tag{7.39}$$

所以

$$G_n=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\alpha}^i=\boldsymbol{T}\cdot\{\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}}\} \tag{7.40}$$

由式(7.39)，即可求得均匀各向同性单层介质圆柱的散射参量。

7.5　均匀各向同性两层介质圆柱的解析解

均匀各向同性单层介质圆柱的解析解在上文中已经给出。然而，为了能够解决更加实际的问题，给出了均匀各向同性两层介质圆柱的解析解。这不仅为本论文的后续章节求解均匀各向同性介质圆柱高频波函数解提供了理论基础，而且还能为验证高频波函数解的正确性提供参考。简单起见，假设内层为理想导体，如图 7.3 所示。

在无限长均匀各向同性两层介质圆柱结构图中，假设 $\rho<a_1$ 区域的介质为理想导体，$a_1<\rho<a_2$ 区域介质的介电常数和磁导率分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$。由于电磁学上的二重性原理，仅分析 H 极化($\boldsymbol{H}=Hz$)的情形。由波函数理论知，均匀各向同性介质圆柱内部的场可以写成

$$H_z(\rho,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{j}^{-n} a_n Z_{mn}^{(i)}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.41}$$

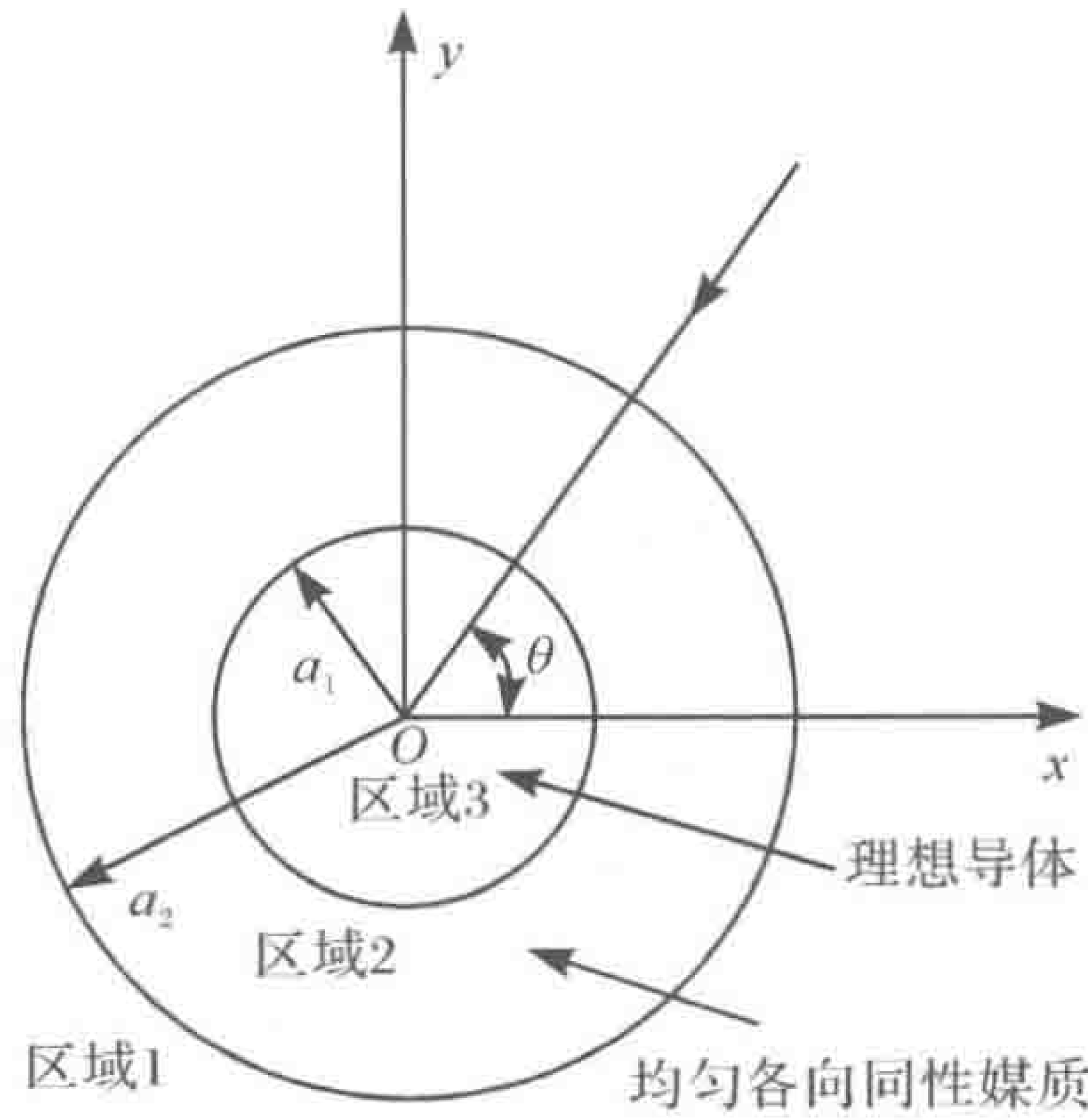


图 7.3　无限长均匀各向同性两层介质圆柱结构图

式中,$Z_{mn}^{(i)}(k\rho)$是第 i 类 n 阶 Bessel 函数对角矩阵,且有

$$Z_{mn}^{(i)}(k\rho)=\begin{cases}J_{mn}(k\rho), & i=1\\ Y_{mn}(k\rho), & i=2\\ J_{mn}(k\rho)+\mathrm{j}Y_{mn}(k\rho), & i=3\\ J_{mn}(k\rho)-\mathrm{j}Y_{mn}(k\rho), & i=4\end{cases} \tag{7.42}$$

根据式(7.42)可以得到均匀各向同性介质圆柱 $a_1<\rho<a_2$ 区域,磁场的表达式可以写成

$$\begin{aligned}H_z(\rho,\varphi)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}a_nJ_{mn}(k\rho)+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}b_nY_{mn}(k\rho)\\&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}[a_nJ_{mn}(k\rho)+b_nY_{mn}(k\rho)]\end{aligned} \tag{7.43}$$

根据 Maxwell 方程$\nabla\times H=\varepsilon\dfrac{\partial E}{\partial t}$可求得均匀各向同性介质圆柱内部的电场表达式为

$$E_\theta(\rho,\varphi)=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\frac{\partial H_z}{\partial\rho}=-\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}[a_nJ'_{mn}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}+b_nY'_{mn}(k\rho)] \tag{7.44}$$

在介质圆柱外部,即自由空间,可以得到适合于求解的散射场表达式

$$H_s(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}G_nH_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.45}$$

在自由空间同样由 Maxwell 方程可以求得电场的表达式为

$$E_s(\rho,\varphi)=-\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}G_nH_n^{(2)'}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.46}$$

在均匀各向同性介质圆柱外部的入射场可以写成

$$H_z^{\mathrm{inc}}(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}} \tag{7.47}$$

电场的表达式可由磁场求得,即

$$E^{\mathrm{inc}}(\rho,\varphi)=-\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}J'_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}} \tag{7.48}$$

根据上一小节所示的方法,由电场和磁场在边界上的连续性,分别在介质的边界 $\rho=a_1$ 和

$\rho=a_2$ 处列写矩阵方程，即可求得散射参量 G_n，进而可以对均匀各向同性两层介质圆柱的电磁散射特性作进一步分析。

7.6　均匀各向异性介质圆柱的本征波函数

7.6.1　均匀各向异性介质圆柱的波函数解

本节理论是由作者首先提出，该理论的正确性已经得到了证实，详见参考文献[3]～[6]、[10]～[12]。

对于各向异性介质圆柱，有二维和三维问题之分。当场沿 z 方向（圆柱的轴方向）没有变化时，问题是二维的，或者说是标量的，对应着垂直入射的情况；当场沿 z 有变化时，问题是三维的，或者说是矢量的，对应着斜入射的情形。本文中所考虑的问题都是二维问题，即场的形式都是标量的。

假设均匀各向异性介质的介电常数和磁导率为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_{xx} & \mu_{xy} & 0\\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{zz}\end{bmatrix} \tag{7.49}$$

这里同样只分析 $\boldsymbol{H}$ 极化（$\boldsymbol{H}=Hz$）的情况。根据 Maxwell 方程，可得 $\boldsymbol{H}$ 极化波的偏微分方程

$$\varepsilon_{xx}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\varepsilon_{yy}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+(\varepsilon_{yx}+\varepsilon_{xy})\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\omega^2\mu_{zz}\gamma H=0 \tag{7.50}$$

式中，$\gamma=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}$。为了解该方程，可令

$$H(x,y)=\int \mathrm{d}\alpha f[\alpha,\beta(\alpha)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}[\alpha x+\beta(\alpha)y]} \tag{7.51}$$

将式(7.51)代入式(7.50)得

$$\varepsilon_{xx}\alpha^2+\varepsilon_{yy}\beta^2+(\varepsilon_{yx}+\varepsilon_{xy})\alpha\beta=\omega^2\mu_{zz}\gamma \tag{7.52}$$

再令

$$\alpha=k\cos\varphi_k,\quad \beta=k\sin\varphi_k,\quad x=\rho\cos\varphi,\quad y=\rho\sin\varphi \tag{7.53}$$

将式(7.53)代入式(7.52)得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{xx}(k\cos\varphi_k)^2+\varepsilon_{yy}(k\sin\varphi_k)^2+(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})k^2\sin\varphi_k\cos\varphi_k=\omega^2\mu_{zz}\gamma\\
&\Rightarrow\left[\varepsilon_{xx}\cos^2\varphi_k+\varepsilon_{yy}\sin^2\varphi_k+\frac{\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}}{2}\sin2\varphi_k\right]k^2=\omega^2\mu_{zz}\gamma\\
&\Rightarrow\left[\varepsilon_{yy}+(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\frac{1+\cos2\varphi_k}{2}+\frac{\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}}{2}\sin2\varphi_k\right]k^2=\omega^2\mu_{zz}\gamma\\
&\Rightarrow\left[\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy})+\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos2\varphi_k+\frac{\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx}}{2}\sin2\varphi_k\right]k^2=\omega^2\mu_{zz}\gamma
\end{aligned} \tag{7.54}$$

令 $n_H=\omega\sqrt{\mu_{zz}\gamma}$，$\varepsilon_{\pm}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}\pm\varepsilon_{yy})$，$\sigma_{\pm}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xy}\pm\varepsilon_{yx})$，则式(7.54)变为

$$(\varepsilon_{+}+\varepsilon_{-}\cos2\varphi_k+\sigma_{+}\sin2\varphi_k)k^2=n_H{}^2$$

$$\Rightarrow k(\varphi_k) = \left(\frac{{n_H}^2}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- \cos 2\varphi_k + \sigma_+ \sin 2\varphi_k}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.55}$$

由式(7.55)中 k 的表达式知 $k(\varphi_k \pm n\pi) = k(\varphi_k)$,故式(7.51)中 H 满足 $H(\rho,\varphi \pm 2n\pi) = H(\rho,\varphi)$,因此可以把式(7.51)写成

$$H(\rho,\varphi) = \oint_{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k h(\varphi_k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos(\varphi-\varphi_k)} \tag{7.56}$$

由于介质是各向异性的,各方向平面波的波数不再相同,将式(7.56)中的平面波展开为

$$\mathrm{e}^{\mathrm{j}k\rho\cos(\varphi-\varphi_k)} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{j}^m J_m(k\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{7.57}$$

因 $h(\varphi_k)$ 定义为 $[0,2\pi]$ 上的周期函数,故可用傅里叶级数对其进行逼近,即

$$h(\varphi_k) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a_n \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_k} \tag{7.58}$$

将式(7.57)和式(7.58)代入式(7.56)得

$$\begin{aligned} H(\rho,\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \oint_{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_k} \mathrm{j}^m J_m(k\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \mathrm{d}\varphi_k \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n H_n(\rho,\varphi) \end{aligned} \tag{7.59}$$

式中,$H_n(\rho,\varphi)$ 又可以写成

$$H_n(\rho,\varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} H_{nm}(\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{7.60}$$

对照式(7.59)得

$$H_{nm}(\rho) = \oint_{2\pi} \mathrm{j}^m J_m(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k} \mathrm{d}\varphi_k \tag{7.61}$$

从式(7.59)可以看出,各向异性介质内的一般解可由一系列本征函数求和得到;从式(7.60)可以看出,每一本征函数为一无穷级数表达式,这一表达式实现了 ρ 和 φ 的分离,而 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}$ 的系数可以由式(7.61)给出。对于具体的一点,ρ 为定值,从而 $H_{nm}(\rho)$ 可由数值积分求出。

由于 $H_n(\rho,\varphi)$ 为式(7.60)的解,且由于第一类柱 Bessel 函数 $J_n(k_\rho \rho)$ 和第二、第三、第四类柱面波函数满足相同的支配方程和递推关系,故各向异性介质的各类本征函数可以统一写成

$$H_n^{(i)}(\rho,\varphi,\varphi_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{nm}^{(i)}(\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{7.62}$$

$$H_{nm}^{(i)}(\rho) = \int_0^{2\pi} \mathrm{j}^m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k} Z_m^{(i)}(k\rho) \mathrm{d}\varphi_k \tag{7.63}$$

式中

$$Z_m^{(i)}(k\rho) = \begin{cases} J_m(k\rho), & i=1 \\ Y_m(k\rho), & i=2 \\ H_m^{(1)}(k\rho) = J_m(k\rho) + \mathrm{j}Y_m(k\rho), & i=3 \\ H_m^{(2)}(k\rho) = J_m(k\rho) - \mathrm{j}Y_m(k\rho), & i=4 \end{cases} \tag{7.64}$$

现在,在环形区域内的场可以写成

$$\begin{aligned} H(\rho,\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z_n^{(1)}(\rho,\varphi) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n Z_n^{(2)}(\rho,\varphi) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{j}^m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k} J_m(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \mathrm{d}\varphi_k \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} b_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{j}^m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k} Y_m(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \mathrm{d}\varphi_k \end{aligned} \tag{7.65}$$

均匀各向异性介质的外波可以写为

$$\begin{aligned} H(\rho,\varphi) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n Z_n^{(4)}(\rho,\varphi) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_0^{2\pi} \mathrm{j}^m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k} H_m^{(2)}(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \mathrm{d}\varphi_k \end{aligned} \tag{7.66}$$

7.6.2 均匀各向异性单层介质圆柱的电磁散射特性分析

上文给出了均匀各向异性介质圆柱单层和成层柱的电磁场表达式,依此为基础,对均匀各向异性介质圆柱的电磁散射特性作进一步分析。均匀各向异性单层介质圆柱的结构如图 7.4 所示。

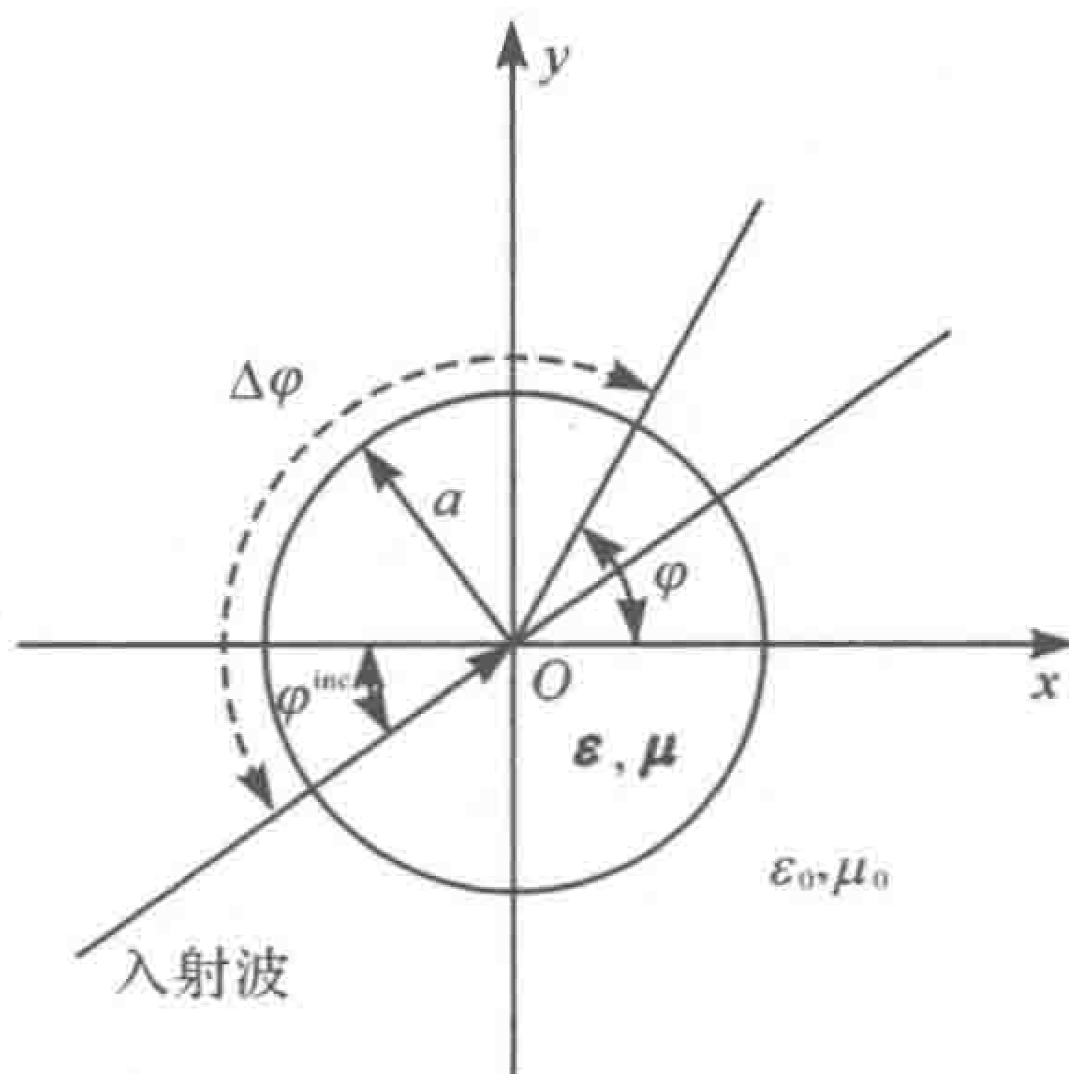


图 7.4 无限长均匀各向异性单层介质圆柱结构图

根据前文的内容,假设均匀各向异性介质圆柱的介电常数和磁导率张量分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{7.67}$$

H 极化的偏微分方程(7.60)的标量波函数解可以写成

$$H_{zn}^{(i)}(\rho,\varphi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H_{znm}^{(i)}(\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{7.68}$$

$$H_{znm}^{(i)}(\rho) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k} Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho] \mathrm{d}\varphi_k \tag{7.69}$$

式中,$Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]$为第 i 类 n 阶 Bessel 函数,并且各参数与前文中的各参数是相同的。

由于圆柱内部的场在 $\rho=0$ 是有限的,并且在 $\rho=0$ 仅有第一类 Bessel 函数是非奇异

的,所以圆柱内部的场可以写成

$$H_z(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}H_{nm}^{(1)}(\rho)a_m \tag{7.70}$$

$$E_\varphi(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}E_{nm}^{(1)}(\rho)a_m \tag{7.71}$$

式中

$$H_{nm}^{(1)}(\rho)=\int_0^{2\pi}J_n[k(\varphi_k)\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k}\mathrm{d}\varphi_k \tag{7.72}$$

$$E_{nm}^{(1)}(\rho)=-\int_0^{2\pi}\frac{k(\varphi_k)}{\omega\gamma}\left\{-\mathrm{j}\varepsilon_{\rho\rho}(\varphi_k)J'_n[k(\varphi_k)\rho]+\frac{n}{k(\varphi_k)\rho}J_n[k(\varphi_k)\rho]\varepsilon_{\varphi\rho}\left(\varphi_k+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(n-m)\varphi_k}\mathrm{d}\varphi_k \tag{7.73}$$

式中

$$\varepsilon_{\rho\rho}(\varphi_k)=\varepsilon_+ +\varepsilon_-\cos2\varphi_k+\sigma_+\sin2\varphi_k \tag{7.74}$$

$$\varepsilon_{\varphi\rho}(\varphi_k)=-\sigma_-+\sigma_+\cos2\varphi_k-\varepsilon_-\sin2\varphi_k \tag{7.75}$$

在均匀各向异性介质的外部,即自由空间,入射场和散射场的形式可以分别写成

$$H_z^s(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}G_nH_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}=\boldsymbol{\Psi}^t\cdot\boldsymbol{\alpha}^s \tag{7.76}$$

$$H_z^s(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\mathrm{j}^{-n}G_nH_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}=\boldsymbol{\Psi}^t\cdot\boldsymbol{\alpha}^s \tag{7.77}$$

式中

$$\boldsymbol{\Psi}=\{\psi_n\}=\{H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\} \tag{7.78}$$

$$\mathrm{Re}\boldsymbol{\Psi}=\{\mathrm{Re}\psi_n\}=\{J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\} \tag{7.79}$$

$$\boldsymbol{\alpha}^i=\{\mathrm{j}^{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}}\},\quad \boldsymbol{\alpha}^s=\{\mathrm{j}^{-n}G_n\} \tag{7.80}$$

利用电场和磁场在边界上的连续性,可以得到矩阵方程

$$\begin{cases}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{S}_1\cdot\boldsymbol{\alpha}^i+\boldsymbol{S}_2\cdot\boldsymbol{\alpha}^s\\ \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{S}_3\cdot\boldsymbol{\alpha}^i+\boldsymbol{S}_4\cdot\boldsymbol{\alpha}^s\end{cases} \tag{7.81}$$

式中,矩阵$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{B}$的各元素分别为$A_{nm}=H_{nm}^{(1)}(a)$,$B_{nm}=-\mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{1/2}E_{nm}^{(1)}(a)$,并且$\boldsymbol{S}_i(i=1,2,3,4)$为对角矩阵,其元素分别为

$$S_{1m}=\mathrm{j}^nJ_n(k_0a),\quad S_{2m}=\mathrm{j}^nH_n^{(2)}(k_0a) \tag{7.82}$$

$$S_{3m}=\mathrm{j}^nJ'_n(k_0a),\quad S_{4m}=\mathrm{j}^nH_n^{(2)'}(k_0a) \tag{7.83}$$

根据$\boldsymbol{T}$矩阵理论$a^s=\boldsymbol{T}\cdot a^i$,可以求得

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}_4-\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}_2)^{-1}\cdot(\boldsymbol{A}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}_1-\boldsymbol{B}^{-1}\cdot\boldsymbol{S}_3) \tag{7.84}$$

根据此式就可以得到适合于分析均匀各向异性介质圆柱电磁散射特性的散射参量。

7.6.3 均匀各向异性两层介质圆柱的电磁散射特性分析

均匀各向异性介质圆柱的波函数理论不仅适用于单层介质柱,也同样适用于成层柱。根据柱面波函数理论及其各特殊函数的物理意义,可以把波函数理论推广应用到求解成层柱的电磁散射特性分析中去。方便起见,仅以内层为理想导体柱为例进行分析。均匀各向异性两层介质圆柱具体的结构如图 7.5 所示。

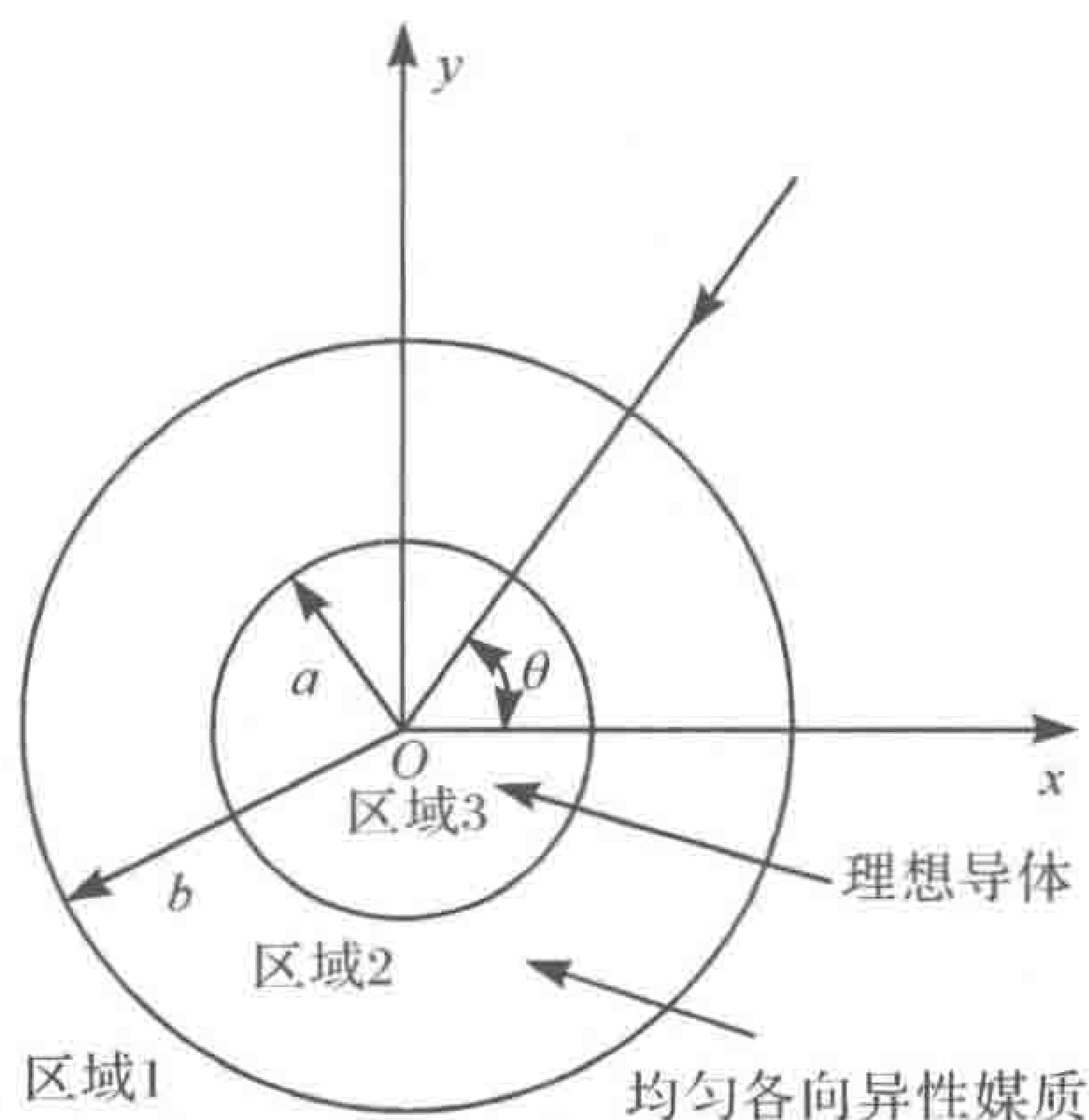


图 7.5 无限长均匀各向异性两层介质圆柱结构图

对于均匀各向异性介质，可以用介电常数和磁导率张量表示为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\begin{bmatrix}\mu_{xx} & \mu_{xy} & 0\\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0\\ 0 & 0 & \mu_{zz}\end{bmatrix}$$

同样仅分析 $\boldsymbol{H}$ 极化（$\boldsymbol{H}=Hz$）的情形。由 Maxwell 方程得 $\boldsymbol{H}$ 极化方程为

$$\varepsilon_{xx}\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}+\varepsilon_{yy}\frac{\partial^2 H}{\partial y^2}+(\varepsilon_{yx}+\varepsilon_{xy})\frac{\partial^2 H}{\partial x\partial y}+\omega^2\mu_{zz}\gamma H=0 \tag{7.85}$$

式中

$$\gamma=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}$$

根据式(7.80)知该方程的磁场表达式为

$$H^{(i)}(\rho,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m H_{nm}^{(i)}(\rho,\varphi) \tag{7.86}$$

$$H_{nm}^{(i)}(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_{km}}Z_n^{(i)}[k(\varphi_{km})\rho]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi} \tag{7.87}$$

式中，$Z_n^{(i)}[k(\varphi_{kl})\rho]$为均匀各向异性介质圆柱的第 i 类 m 阶 Bessel 函数，并且

$$Z_n^{(i)}[k(\varphi_{kl})\rho]=\begin{cases}J_n[k(\varphi_{km})\rho], & i=1\\ Y_n[k(\varphi_{km})\rho], & i=2\\ H_n^{(1)}[k(\varphi_{km})\rho], & i=3\\ H_n^{(2)}[k(\varphi_{km})\rho], & i=4\end{cases} \tag{7.88}$$

$$\varphi_{km}=\frac{2\pi}{2N+1}m,\qquad m=-N,\cdots,N \tag{7.89}$$

在均匀各向异性介质内部电场和磁场的关系为

$$\mathrm{j}\omega\gamma E_\varphi=-\left\{\varepsilon_{\rho\rho}(\varphi_k)\frac{\partial H}{\partial\rho}+\varepsilon_{\theta\rho}(\varphi_k)\frac{1}{\rho}\frac{\partial H}{\partial\varphi}\right\} \tag{7.90}$$

因此得

$$E^{(i)}(\rho,\varphi)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}a_m E_{nm}^{(i)}(\rho,\varphi) \tag{7.91}$$

式中

$$E_{nm}^{(i)}(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}-\frac{k(\varphi_k)}{\omega\gamma}\left\{-\mathrm{j}\varepsilon_{\rho\rho}(\varphi_k)Z_n^{(i)'}[k(\varphi_{km})\rho]+\frac{n}{k(\varphi_k)\rho}Z_n^{(i)}[k(\varphi_{km})\rho]\varepsilon\varepsilon_{\varphi\rho}\left(\varphi_{km}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{km}} \tag{7.92}$$

式中

$$k(\varphi_{km})=\left(\frac{n_H^2}{\varepsilon_{+}+\varepsilon_{-}\cos2\varphi_{km}+\sigma_{+}\sin2\varphi_{km}}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7.93}$$

$$\varepsilon_{\rho\rho}(\varphi_{km})=\varepsilon_{+}+\varepsilon_{-}\cos2\varphi_{km}+\sigma_{+}\sin2\varphi_{km} \tag{7.94}$$

$$\varepsilon_{\varphi\rho}(\varphi_{km})=-\sigma_{-}+\sigma_{+}\cos2\varphi_{km}-\varepsilon_{-}\sin2\varphi_{km} \tag{7.95}$$

$$\varepsilon_{\pm}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xx}\pm\varepsilon_{yy}),\quad \sigma_{\pm}=\frac{1}{2}(\varepsilon_{xy}\pm\varepsilon_{yx}),\quad n_H=\omega\sqrt{\mu_{zz}\gamma} \tag{7.96}$$

由式(7.86)知,各向异性介质内的解可由一系列本征函数求和得到。由于处理的圆柱内部是两层不同种类的介质,它们的介电常数和磁导率张量不同。为了表述方便,在下文中对电磁场所涉及参量均以下标 1、2 分别代表两种不同种类的介质。圆柱中心,即 $\rho=0$ 处,仅有第一类 Bessel 函数是非奇异的,并且认为场在 $\rho=0$ 处也是有限的,因此区域 2 的电磁场的表达式分别为

$$H_2(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\sum_{m=-N}^{N}[H_{nm2}^1(\rho)a_m+H_{nm2}^2(\rho)b_m] \tag{7.97}$$

$$E_2(\rho,\varphi)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\sum_{m=-N}^{N}[E_{nm2}^1(\rho)a_m+E_{nm2}^2(\rho)b_m] \tag{7.98}$$

式中

$$H_{nm2}^1(\rho)=J_n[k(\varphi_{km})\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_{km}} \tag{7.99}$$

$$H_{nm2}^2(\rho)=Y_n[k(\varphi_{km})\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_{km}} \tag{7.100}$$

$$E_{nm2}^1(\rho)=\frac{k_2(\varphi_{km})}{\omega\gamma_2}\left\{-\mathrm{j}\varepsilon_{\rho\rho2}(\varphi_{kl})J'_n[k_2(\varphi_{km})\rho]+\frac{n}{k_2(\varphi_{kl})\rho}J_n[k_2(\varphi_{km})\rho]\varepsilon\varepsilon_{\varphi\rho2}\left(\varphi_{km}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_{km}} \tag{7.101}$$

$$E_{nm2}^2(\rho)=\frac{k_2(\varphi_{km})}{\omega\gamma_2}\left\{-\mathrm{j}\varepsilon_{\rho\rho2}(\varphi_{kl})Y'_n[k_2(\varphi_{km})\rho]+\frac{n}{k_2(\varphi_{kl})\rho}Y_n[k_2(\varphi_{km})\rho]\varepsilon\varepsilon_{\varphi\rho2}(\varphi_{km}+\frac{\pi}{2})\right\}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi_{km}} \tag{7.102}$$

自由空间区域 1 中,第四类贝塞尔函数是 $\rho\to\infty$ 处的唯一解,故该区域的场可以表示为

$$H^s(\rho,\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^nG_nH_n^2(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}} \tag{7.103}$$

$$E^s(\rho,\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^{n+1}G_nH_n^{(2)'}(k\rho)\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}} \tag{7.104}$$

$$H^{\mathrm{inc}}(\rho,\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^nJ_n(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})} \tag{7.105}$$

$$E^{\mathrm{inc}}(\rho,\theta)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{j}^{n+1}J'_n(k\rho)\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})} \tag{7.106}$$

在内层为理想导体的情况下,利用电磁场在边界的连续性,并假设介质表面没有电荷,类似于前文的写法,即将电场和磁场都写成矩阵和向量的形式,得到 $\rho=a$ 处的边界方

程为

$$\boldsymbol{F}_1 \cdot a + \boldsymbol{F}_2 \cdot b = 0 \tag{7.107}$$

在边界 $\rho=b$ 处的边界方程为

$$\boldsymbol{D}_1 \cdot a + \boldsymbol{D}_2 \cdot b = \boldsymbol{a}^i + \boldsymbol{a}^s \tag{7.108}$$

$$\boldsymbol{E}_1 \cdot a + \boldsymbol{E}_2 \cdot b = \boldsymbol{a}^{i'} + \boldsymbol{b}' \cdot \boldsymbol{a}^s \tag{7.109}$$

式中

$$\boldsymbol{F}_1 = -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} E^1_{nm2}(a), \boldsymbol{F}_2 = -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} E^2_{nm2}(a), \boldsymbol{a}^s = G_m H^{(2)}_m(k_0 b)$$

$$\boldsymbol{D}_1 = H^1_{nm2}(b), \boldsymbol{D}_2 = H^2_{nm2}(b), \boldsymbol{a}^i = J_m(k_0 b)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi^{\mathrm{inc}}}, \boldsymbol{a}^{i'} = J'_m(k_0 b)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi^{\mathrm{inc}}}$$

$$\boldsymbol{E}_1 = -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} E^1_{nm2}(b), \boldsymbol{E}_2 = -\mathrm{j}\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} E^2_{nm2}(b), \boldsymbol{b}' = \frac{H^{(2)'}_n(k_0 b)}{H^{(2)}_n(k_0 b)} \tag{7.110}$$

需要指出的是，$\boldsymbol{E}_1,\boldsymbol{E}_2,\boldsymbol{F}_1,\boldsymbol{F}_2,\boldsymbol{D}_1,\boldsymbol{D}_2$ 分别为 $n\times m$ 阶矩阵，$\boldsymbol{a}^s,\boldsymbol{a}^i,\boldsymbol{a}^{i'},\boldsymbol{b}'$分别为 m 维列向量，数值计算过程中令 $n=m$。

将式(7.110)中各参量代入式(7.107)～(7.109)求得

$$a = \{E_1 - \boldsymbol{b}'D_1 - E_2F_2^{-1}F_1 + \boldsymbol{b}'D_2F_2^{-1}F\}^{-1}(\boldsymbol{a}^{i'} - \boldsymbol{b}'\boldsymbol{a}^i) \tag{7.111}$$

$$b = -F_2^{-1} \cdot a \tag{7.112}$$

再由式(7.40)求得散射参量

$$G_n = \frac{1}{H^{(2)}_n(k_0 b)}\sum_{l=-N}^{N}\{[H^{(1)}_{nl}(b) + H^{(2)}_{nl}(b)] - \boldsymbol{a}^i_n\} \tag{7.113}$$

参 考 文 献

[1] 刘宁. 均匀各向异性介质圆柱的平面波函数理论. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文，2008.

[2] Monzon C J, Nickander, Damaskos J. Two-dimensional scattering by a homogeneous anisotropic rod. IEEE Transactions on Antenna and Propagation, 1986, 34(10): 1243～1249.

[3] Ren W. Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media. Physical Review E, 1993, 47(1): 664～673.

[4] Ren W. Spherical wave functions and dyadic Green's functions for homogeneous elastic anitropic media. Physical Review E, 1993, 47(6): 4439～4446.

[5] Ren W. Exact Solutions of coupled-wave equations in piezoelectric solids. Journal of Mathematical Physics, 1993, 34(11): 5376～5390.

[6] 王志良，任伟. 电磁散射理论. 成都：四川科学技术出版社，1993: 144～149.

[7] 任伟，赵家升. 电磁场与微波技术. 北京：电子工业出版社，2005: 201～220.

[8] Kong J A. 电磁波理论. 吴季等译. 北京：电子工业出版社，2003: 30～41.

[9] Chen H C. Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate Free Approach. New York: McGraw-Hill, 1983.

[10] Ren W, Wu X B. Properties of wave functions in homogeneous anisotropic media. Physical Review, 1995, 51(1): 671～678.

[11] Ren W, Wu X B. Application of an eigenfunction representation to the scattering of a plane wave by an anisotropically coated circular cylinder. Journal of Physics D, 1995, 28: 1031～1039.

[12] Wu X B, Ren W. Scattering of a Gaussian beam by an anisotropic material coated donducting circular cylinder. Radio Science, 1995, 30: 403～411.

第八章　各向异性三层球的电磁散射分析

本章取材于董志龙的硕士学位论文[1]，如果没有董志龙等的协助[1~3]，作者要写作本章是不可能的。

各向异性介质的电磁散射是电磁理论研究的热点课题之一。在各向异性介质中，本征平面波的波数是波矢方向的函数，因此各向异性材料的电磁散射研究难度大，有些问题至今仍未找到很好的解决方法。铁氧体是典型的磁各向异性材料，不仅应用在微波集成电路，而且也应用于天线技术。对于平面波和各种二维铁氧体柱的相互作用已经有许多学者进行了理论和实验上的研究[4~11]。目前，国内外许多科学家和工程技术人员对各向异性介质电磁散射的研究兴趣日益增长。

各向同性球电磁散射的解析解已经由 Mie 在其论文中给出，Mie 解由分离变量法得到的各向同性球的波函数构造。以 Mie 的工作为基础，该领域已有大量论文发表。而各向异性介质球的本征函数解尚未有人导出，原因是介质参数变成张量以后，对解偏微分方程十分有效的分离变量法不再适用。作者在其系列论文中[12~14]导出了均匀各向异性介质的波函数，给出了经典物理学各领域的波动方程在圆柱和圆球坐标系下的严格级数解。这解的独到之处在于不用分离变量法，而采用角谱积分表达式，采用基于矢量球面波展开的角谱积分表达式展开整个理论。数值验证表明，应用均匀各向异性介质的本征波函数计算均匀各向异性球的电磁散射，结果准确，简洁高效。

均匀各向异性介质波函数理论的关键之一是矢量平面波展开式。文献[15]应用角谱积分方法计算了各向异性磁化等离子体球对平面波的散射，所使用的也是解析法，但推导过程比较繁琐。经过深入研究之后发现，问题在于采用的不是对任意径向位置 $\boldsymbol{r}$ 都收敛的国际上一直沿用的平面波展开因子，而是采用极少数人针对特定问题采用的对径向（r 从 0 到∞）取平均来求展开系数的方法和结果，这在用到成层球的问题时会带来不便。例如，考虑 $a\leqslant r\leqslant b$ 的球壳区的场，它们所使用的波函数要求对 $0\leqslant r\leqslant a$ 和 $b\leqslant r\leqslant\infty$ 两个区域取平均来确定 $a\leqslant r\leqslant b$ 区域的波函数展开系数。采用文献[12]～[14]中给出的适用于任意径向位置的平面波展开式，则不存在不自洽的问题，并且推导过程简洁明朗。尽管它们取得了大同小异的数值结果，但矩量法用立方体来逼近球体，本身存在系统误差；用矩量法来验证解析方法的正确性，未免有本末倒置之嫌。因此严格来说，数值验证虽可“说明”其解可能正确，却并不能掩盖方法本身的缺陷。

由于它们采用的平面波展开式存在收敛性问题，因此谱域的二重积分很难算准，因此它们仅仅处理了其中一重积分可解析处理的特殊情况。而基于作者所采用的适用于任意径向位置的平面波展开式，得到的解就不存在这个问题。系数矩阵的结构和规模涉及参变量$[m,n]$和$[m',n']$。它们仅处理了系数矩阵是方阵（$n=n'$，$m=m'$）的特殊情形（共轭梯度法仅适用于系数矩阵为方阵），对于 $n\neq n'$，$m\neq m'$ 的情况，则没有讨论。作者将在本章给出详细的研究结果。

本章应用均匀各向异性介质的波函数理论，研究了均匀各向异性三层球对平面波的散射。

8.1　均匀各向异性介质的球波函数

任意电磁介质的本构关系可表示为

$$\begin{cases} \boldsymbol{D} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \boldsymbol{E} + \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{H} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{H} + \boldsymbol{\zeta} \cdot \boldsymbol{E} \end{cases} \tag{8.1}$$

式中，$\boldsymbol{\varepsilon}$,$\boldsymbol{\mu}$ 为材料的介电率张量和磁导率张量；$\boldsymbol{\xi}$,$\boldsymbol{\zeta}$ 为手征参数张量，它们均是 3×3 的矩阵。式(8.1)可改写成

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{D} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} & \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\zeta} & \boldsymbol{\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} = \boldsymbol{C} \begin{bmatrix} \boldsymbol{E} \\ \boldsymbol{H} \end{bmatrix} \tag{8.2}$$

式中，$\boldsymbol{C}$ 为本构矩阵，它可以是空间和时间的函数，也可以是电磁场强度的函数。根据本构矩阵具体形式的不同，将介质分为各向同性介质、双各向同性介质、各向异性介质、双各向异性介质等。

远离天线或散射体的波能用平面波很好地表示，应用傅里叶变换可将复杂的波场表示为平面波的叠加，因此分析均匀各向异性介质内的平面波，是所有涉及该介质的电磁问题的基础。导出无界均匀各向异性介质的本征平面波解后，将本征平面波解用矢量球面波展开，这是各向异性介质波函数理论的难点和关键。

8.1.1　标量波函数

圆球坐标系中的齐次标量波动方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + k^2\psi = 0 \tag{8.3}$$

令 $\psi = R(r)H(\theta)\Phi(\varphi)$ 代入式(8.1)，应用分离变量法得到

$$\begin{cases} r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2} + 2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r} + [(kr)^2 - n(n+1)]R = 0 \\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left[n(n+1) - \dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]H = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\Phi = 0 \end{cases} \tag{8.4}$$

式中，n,m 为分离常数。由于电磁场量在空间任意点必为单值，分离常数的选取必须符合物理限制。$\Phi(\varphi)$ 方程是熟知的谐方程，产生 $h(m\varphi)$ 解。

$R(r)$ 方程和 Bessel 方程紧密相关，其解称为球 Bessel 函数，以 $b_n(kr)$ 表示，它和普通 Bessel 函数有关系

$$b_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}}B_{n+\frac{1}{2}}(kr) \tag{8.5}$$

球 Bessel 函数有四类：$j_n(kr)$，$y_n(kr)$ 表示球面驻波；$h_n^1(kr)$ 表示外行球面波；$h_n^2(kr)$ 表示内行球面波。

$H(\theta)$ 方程和勒让德方程有关，其解称为连带勒让德函数，一般以 $L_n^m(\cos\theta)$ 表示为

$$L_n^m(\cos\theta) \sim P_n^m(\cos\theta), Q_n^m(\cos\theta) \tag{8.6}$$

式中，$P_n^m(\cos\theta)$ 是第一类连带勒让德函数；$Q_n^m(\cos\theta)$ 是第二类连带勒让德函数。函数

$P_n^m(\cos\theta)$在$\theta=0,\pi$处取有限的值,而$Q_n^m(\cos\theta)$在$\theta=0,\pi$有奇异点。在$r=0$为有限值的球 Bessel 函数只有$j_n(kr)$,因此表示球内有限场的基本波函数为

$$\psi = j_n(kr)P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{8.7}$$

要表示球外的有限场,必须选择外向行波,可取基本波函数为

$$\psi = h_n^{(1)}(kr)P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{8.8}$$

为使读者对这些特殊函数有更具体的认识,作者绘制了它们的函数,如图 8.1 和图 8.2 所示。

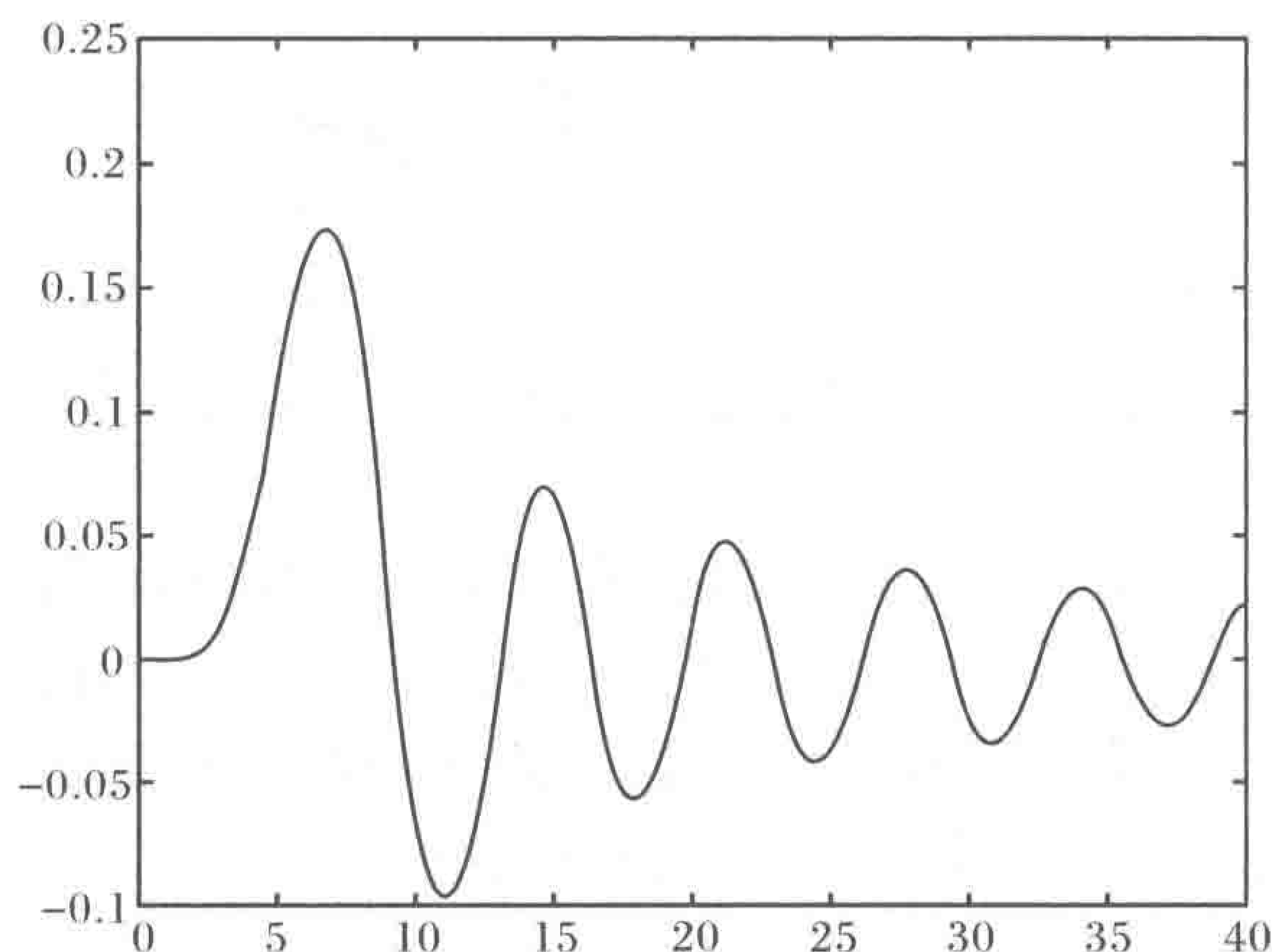


图 8.1　球 Bessel 函数 $j_5(x)$曲线示例

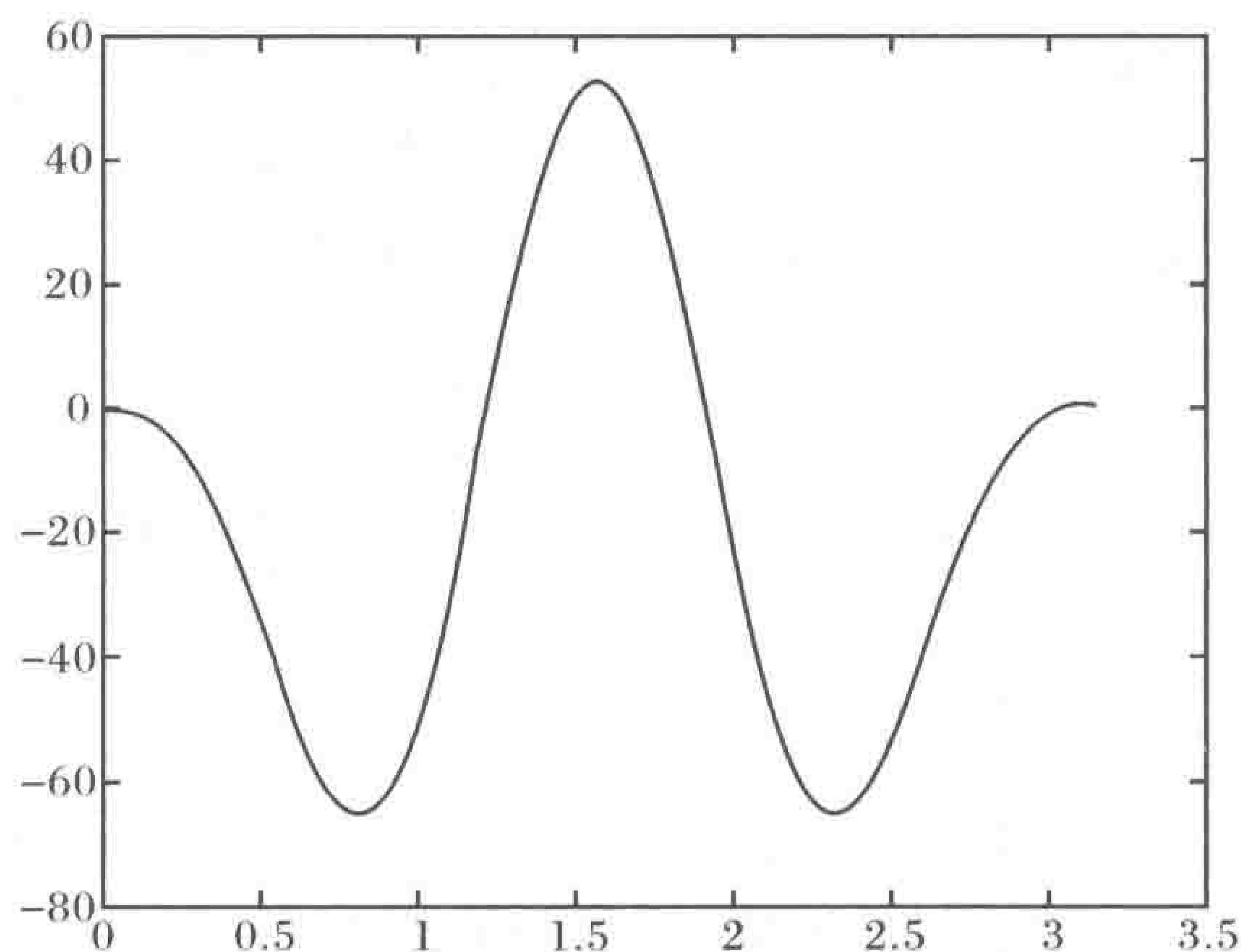


图 8.2　连带勒让德函数 $P_5^3(\cos\theta)$曲线示例

8.1.2　矢量波函数

由前述的标量波函数可构造出矢量波函数,在计算球形边界的电磁场边值问题时,采用矢量波函数非常方便。矢量波函数由 Hansen 提出,后来 Waterman 建立了声波、电磁波、弹性波散射的 $\boldsymbol{T}$ 矩阵理论,使得矢量波函数成为计算波场与材料相互作用的有力工具。黄志洵对矢量波函数作过精辟的论述[16]。

球矢量波函数 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{L}$ 定义为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{mn}(kr,\theta,\varphi) = b_n(kr)\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{N}_{mn}(kr,\theta,\varphi) = \dfrac{n(n+1)b_n(kr)}{kr}\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi) + \left[\dfrac{b_n(kr)}{kr} + b'_n(kr)\right]\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{L}_{mn}(kr,\theta,\varphi) = b'_n(kr)\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi) + \dfrac{b_n(kr)}{kr}\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{8.9}$$

可以看出$\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{L}$由径向函数$b_n(kr)$和球面谐函数$\boldsymbol{P}_{mn},\boldsymbol{B}_{mn},\boldsymbol{C}_{mn}$构成。式中的球面谐函数定义为

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi) = \hat{\boldsymbol{r}}P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \\ \boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) = [\hat{\boldsymbol{\theta}}\tau_{mn}(\cos\theta) + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\mathrm{j}\pi_{mn}(\cos\theta)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \\ \boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) = [\hat{\boldsymbol{\theta}}\mathrm{j}\pi_{mn}(\cos\theta) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\tau_{mn}(\cos\theta)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \end{cases} \tag{8.10}$$

式中

$$\pi_{mn}(\cos\theta) = \frac{m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta),\quad \tau_{mn}(\cos\theta) = \frac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} \tag{8.11}$$

矢量波函数分别满足矢量波动方程$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{M}-k^2\boldsymbol{M}=0$，$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{N}-k^2\boldsymbol{N}=0$，$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{L})+k^2\boldsymbol{L}=0$。

矢量波函数有性质：$\nabla\times\boldsymbol{M}=k\boldsymbol{N}$，$\nabla\times\boldsymbol{N}=k\boldsymbol{M}$；$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{N}=0$，$\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{L}=0$，$\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{L}=0$。$\boldsymbol{M},\boldsymbol{N}$是旋度场，$\boldsymbol{L}$是散度场。

8.1.3　$\boldsymbol{k}$ 坐标系

本节内容在本书第二卷第三章中已有论述，为了完整性，在此作补充。均匀各向异性介质中的电磁波传播，早期采用主坐标系方法进行研究。在主坐标系中，电磁场量存在三个不为零的分量，色散关系的推导和本征解向量的确定涉及的是三阶矩阵，推导计算比较复杂。Kong 先生创立的 kDB 坐标系[17,18]是公认的分析各向异性介质的有力工具。在 kDB 坐标系中，$\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ 矢量仅有两个不为零的分量。色散关系的推导和本征解向量的确定涉及的矩阵仅为二阶，简化了推导计算过程。仔细研究发现，kDB 坐标系实质是以 $\boldsymbol{r}$ 为径向的球坐标系，但是其坐标基矢量又和普通球坐标系的基矢量略有差别。在公式推导过程中，变量定义容易混淆。若选取坐标基矢量和普通球坐标系完全吻合，则能够避免这个问题，我们称这个坐标系为 $\boldsymbol{k}$ 坐标系。

取球坐标系单位矢量 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 的方向为波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的方向，即 $\boldsymbol{k}=\hat{\boldsymbol{r}}k$，如图 8.3 所示，在普通球坐标系的基础上建立 $\boldsymbol{k}$ 坐标系。由直角坐标和球坐标的转换关系，得到

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{r}} = \hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_k\cos\varphi_k + \hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_k\sin\varphi_k + \hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_k \\ \hat{\boldsymbol{\theta}} = \hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_k\cos\varphi_k + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_k\sin\varphi_k - \hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_k \\ \hat{\boldsymbol{\varphi}} = -\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi_k + \hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi_k \end{cases} \tag{8.12}$$

式中，θ_k,φ_k 的下标 k 表示为 $\boldsymbol{k}$ 坐标系中的量。

由 $\hat{\boldsymbol{\theta}},\hat{\boldsymbol{\varphi}}$ 确定的平面称为 $\boldsymbol{DB}$ 平面，$\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ 分量分布在且仅分布在 $\boldsymbol{DB}$ 平面上。因此场矢量 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ 的计算要简单很多；$\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ 确定后，再由本构关系计算场矢量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$。

由直角坐标和球坐标的转换公式，很容易推导出场矢量在主坐标系和 $\boldsymbol{k}$ 坐标系中的变换公式。设场矢量 $\boldsymbol{A}$ 在主坐标系中为

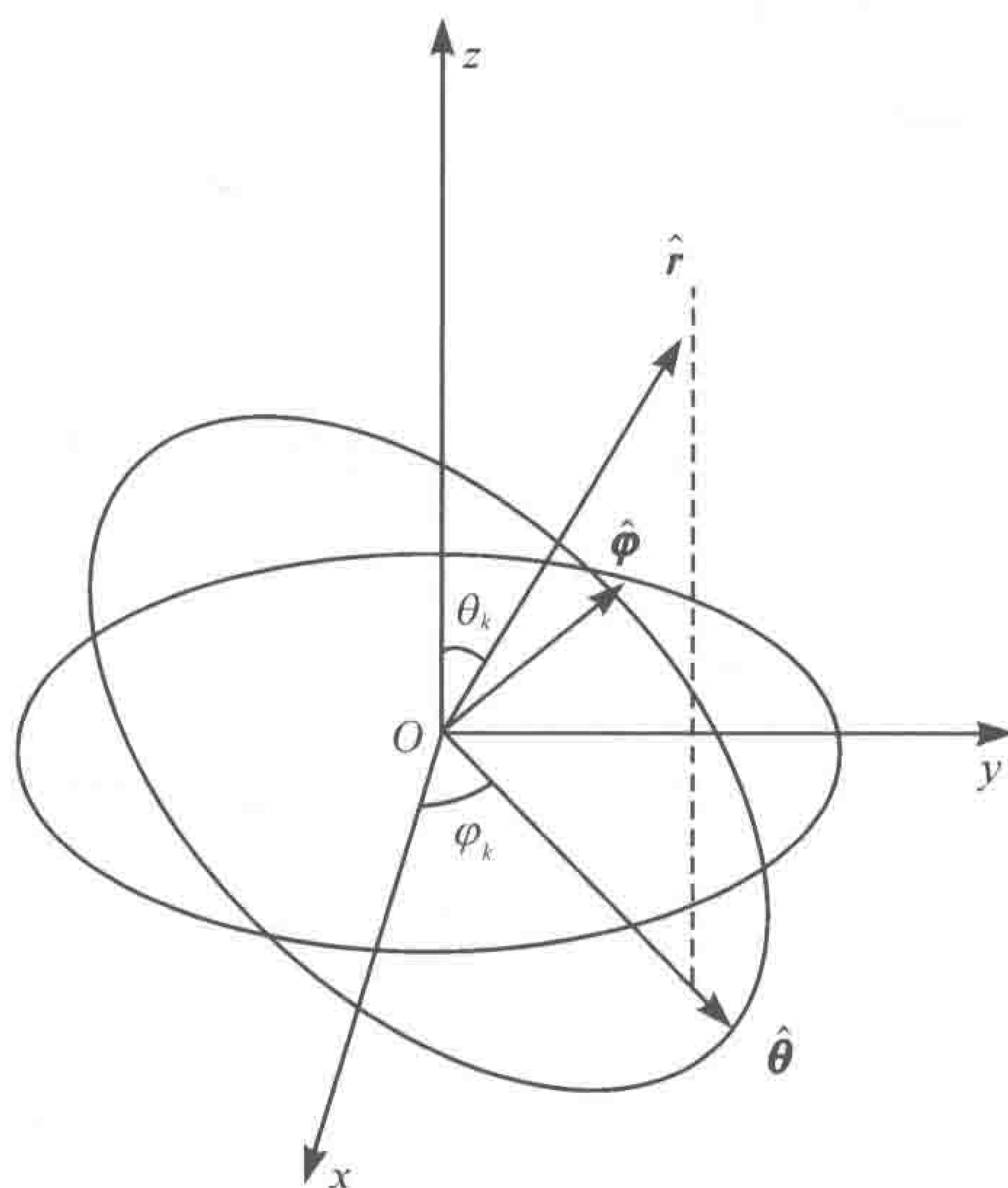


图 8.3　**k** 坐标系

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix} \tag{8.13}$$

场矢量 $\boldsymbol{A}$ 在 $\boldsymbol{k}$ 坐标系中的投影用$\boldsymbol{A}_k$ 表示为

$$\boldsymbol{A}_k=\begin{bmatrix}A_r\\A_\theta\\A_\varphi\end{bmatrix} \tag{8.14}$$

$\boldsymbol{A}$ 和$\boldsymbol{A}_k$ 存在关系$\boldsymbol{A}_k=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{A}$ 或者 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{A}_k$,需要确定变换矩阵 $\boldsymbol{T},\boldsymbol{T}^{-1}$。由于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}_k$ 是同一矢量的不同表达,所以

$$\begin{cases}A_r=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}A_z\\ \quad=\sin\theta_k\cos\varphi_kA_x+\sin\theta_k\sin\varphi_kA_y+\cos\theta_kA_z\\ A_\theta=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{\theta}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}A_z\\ \quad=\cos\theta_k\cos\varphi_kA_x+\cos\theta_k\sin\varphi_kA_y-\sin\theta_kA_z\\ A_\varphi=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{x}}A_x+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{y}}A_y+\hat{\boldsymbol{\varphi}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}}A_z\\ \quad=-\sin\varphi_kA_x+\cos\varphi_kA_y\end{cases} \tag{8.15}$$

在上面的推导中用到了式(8.9),将上述结果写成矩阵形式

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}\sin\theta_k\cos\varphi_k & \sin\theta_k\sin\varphi_k & \cos\theta_k\\ \cos\theta_k\cos\varphi_k & \cos\theta_k\sin\varphi_k & -\sin\theta_k\\ -\sin\varphi_k & \cos\varphi_k & 0\end{bmatrix} \tag{8.16}$$

矩阵 $\boldsymbol{T}$ 是正交矩阵,矩阵 $\boldsymbol{T}$ 的逆恰好是其转置矩阵

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\begin{bmatrix}\sin\theta_k\cos\varphi_k & \cos\theta_k\cos\varphi_k & -\sin\varphi_k\\ \sin\theta_k\sin\varphi_k & \cos\theta_k\sin\varphi_k & \cos\varphi_k\\ \cos\theta_k & -\sin\theta_k & 0\end{bmatrix} \tag{8.17}$$

由此就确定了场矢量 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{B},\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 在主坐标系和 $\boldsymbol{k}$ 坐标系中的变换关系。对场矢量施行了变换，本构关系也需要施行相应的变换。在主坐标系中，场矢量 $\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}$ 和场矢量 $\boldsymbol{D},\boldsymbol{B}$ 之间的本构关系为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}=\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{D}\end{cases}\tag{8.18}$$

根据变换关系有 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{E}_k,\boldsymbol{H}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{H}_k,\boldsymbol{D}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{D}_k,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T}^{-1}\cdot\boldsymbol{B}_k$。代入式(8.18)得到

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_k=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{T}^{-1})\cdot\boldsymbol{D}_k+(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{T}^{-1})\cdot\boldsymbol{B}_k\\ \boldsymbol{H}_k=(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{T}^{-1})\cdot\boldsymbol{B}_k+(\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{T}^{-1})\cdot\boldsymbol{D}_k\end{cases}\tag{8.19}$$

若将 $\boldsymbol{k}$ 坐标系中的本构参数定义为

$$\begin{cases}\boldsymbol{\kappa}_k=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\\ \boldsymbol{\chi}_k=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\\ \boldsymbol{\upsilon}_k=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\upsilon}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\\ \boldsymbol{\gamma}_k=\boldsymbol{T}\cdot\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{T}^{-1}\end{cases}\tag{8.20}$$

则 $\boldsymbol{k}$ 坐标系中的本构关系有简单形式

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_k=\boldsymbol{\kappa}_k\cdot\boldsymbol{D}_k+\boldsymbol{\chi}_k\cdot\boldsymbol{B}_k\\ \boldsymbol{H}_k=\boldsymbol{\upsilon}_k\cdot\boldsymbol{B}_k+\boldsymbol{\gamma}_k\cdot\boldsymbol{D}_k\end{cases}\tag{8.21}$$

8.1.4　均匀各向异性介质的本征平面波解

均匀各向异性介质的本征平面波解是计算各向异性介质电磁散射的关键，也是难点所在。下面详细阐述如何导出无界均匀各向异性介质中的本征平面波解。

设单色平面波 $\boldsymbol{E}_i=\boldsymbol{e}_iE_0\exp(\mathrm{j}k_0\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}-\mathrm{j}\omega t)$ 入射到各向异性介质球，其中 $\boldsymbol{e}_i$ 为极化矢量，$\boldsymbol{k}_i$ 为波矢量。各向异性介质的介电率张量、磁导率张量分别为

$$\boldsymbol{\varepsilon}=\varepsilon_0\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx}&\varepsilon_{xy}&0\\ \varepsilon_{yx}&\varepsilon_{yy}&0\\ 0&0&\varepsilon_{zz}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\mu}=\mu_0\begin{bmatrix}\mu_{xx}&\mu_{xy}&0\\ \mu_{yx}&\mu_{yy}&0\\ 0&0&\mu_{zz}\end{bmatrix}\tag{8.22}$$

各向异性介质中的 Maxwell 方程为

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=\mathrm{j}\omega\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{H}\tag{8.23}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}\tag{8.24}$$

式(8.23)的两边乘 $\boldsymbol{\mu}^{-1}$，再取旋度，并考虑到式(8.24)，得

$$\nabla\times\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}-\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}=0\tag{8.25}$$

设波动方程的平面波解 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$，取三维傅里叶变换得到谱域解

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}\tag{8.26}$$

式中，$\boldsymbol{k}=(r,\theta_k,\varphi_k)$ 为平面波的波矢；$\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$ 为径向矢量。

将谱域解代入式(8.25)，利用 $\nabla=\mathrm{j}\boldsymbol{k}$，化简得

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{\mu}^{-1}\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})+\omega^2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})=0\tag{8.27}$$

按张量运算规则，$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$ 可写成 $k\boldsymbol{K}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$，其中 k 是波矢量 $\boldsymbol{k}$ 的模，而 $\boldsymbol{K}$ 为张量

$$\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix} 0 & -\cos\theta_k & \sin\theta_k\sin\varphi_k \\ \cos\theta_k & 0 & -\sin\theta_k\cos\varphi_k \\ -\sin\theta_k\sin\varphi_k & \sin\theta_k\cos\varphi_k & 0 \end{bmatrix}$$

继续整理化简,波动方程最后化为

$$[k^2\boldsymbol{k}\boldsymbol{\mu}^{-1}\boldsymbol{k}+\omega^2\varepsilon]\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})=0 \tag{8.28}$$

式中

$$\boldsymbol{G}(\theta_k,f_k)=\begin{bmatrix} G_{11}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{12}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{13}(k,\theta_k,\varphi_k) \\ G_{21}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{22}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k,\theta_k,\varphi_k) \\ G_{31}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{32}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{33}(k,\theta_k,\varphi_k) \end{bmatrix}$$

式(8.28)是关于 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$ 的本征值问题。令 $\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)$ 的行列式为零,得到特征波数 $k(\theta_k,\varphi_k)$ 的四次方程

$$a(\theta_k,\varphi_k)k^4-b(\theta_k,\varphi_k)k^2+c=0 \tag{8.29}$$

式(8.29)中,$a(\theta_k,\varphi_k)$,$b(\theta_k,\varphi_k)$,c 是含参量的方程系数,分别为

$$\begin{aligned} a(q_k,f_k)=&\frac{1}{64}[-2(e_{xx}+e_{yy}+2e_{zz})+2(e_{xx}+e_{yy}-2e_{zz})\cos2q_k \\ &+(e_{xx}-e_{yy})\cos2(q_k-f_k)-2(e_{xx}-e_{yy})\cos2f_k+(e_{xx}-e_{yy})\cos2(q_k+f_k) \\ &-(e_{xy}+e_{yx})\sin2(q_k-f_k)-2(e_{xy}+e_{yx})\sin2f_k+(e_{xy}+e_{yx})\sin2(q_k+f_k)] \\ &\cdot[2(2m'_{xy}m'_{yx}-2m'_{xx}m'_{yy}-m'_{xx}m'_{zz}-m'_{yy}m'_{zz})+2(2m'_{xy}m'_{yx}-2m'_{xx}m'_{yy} \\ &+m'_{xx}m'_{zz}+m'_{yy}m'_{zz})\cos2q_k-(m'_{xx}-m'_{yy})m'_{zz}\cos2(q_k-f_k) \\ &+2(m'_{xx}-m'_{yy})m'_{zz}\cos2f_k-(m'_{xx}-m'_{yy})m'_{zz}\cos2(q_k+f_k) \\ &+(m'_{xy}+m'_{yx})m'_{zz}\sin2(q_k-f_k)+2(m'_{xy}+m'_{yx})m'_{zz}\sin2f_k \\ &-(m'_{xy}+m'_{yx})m'_{zz}\sin2(q_k+f_k)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\theta_k,\varphi_k)=&\cos^2\theta_k(\varepsilon_{xx}\mu'_{xx}+\varepsilon_{xy}\mu'_{xy}+\varepsilon_{yx}\mu'_{yx}+\varepsilon_{yy}\mu'_{yy})\varepsilon_{zz}+\frac{1}{2}\sin^2\theta_k\{\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}(\mu'_{xx}+\mu'_{yy}) \\ &-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}(\mu'_{xx}-\mu'_{yy})+2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}\mu'_{zz}\cos^2\varphi_k+(\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy})(\mu'_{xx}-\mu'_{yy})\cos2\varphi_k \\ &+2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}\mu'_{zz}\sin^2\varphi_k+[(\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy})(\mu'_{xy}+\mu'_{yx})+(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})\varepsilon_{zz}\mu'_{zz}]\sin2\varphi_k\} \end{aligned}$$

$$c=(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx})\varepsilon_{zz}$$

式中,μ'_{xx},μ'_{yy},μ'_{zz},μ'_{xy},μ'_{yx} 为 $\boldsymbol{\mu}^{-1}=\frac{1}{\mu_0}\begin{bmatrix} \mu'_{xx} & \mu'_{xy} & 0 \\ \mu'_{yx} & \mu'_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu'_{zz} \end{bmatrix}$ 的相应元素。对于磁化等离子体,有关系 $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=1-\dfrac{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\left(1-\mathrm{j}\frac{\nu}{\omega}\right)}{\left(1-\mathrm{j}\frac{\nu}{\omega}\right)^2-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$,$\varepsilon_{xy}=-\varepsilon_{yx}=\mathrm{j}\dfrac{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2\frac{\omega_c}{\omega}}{\left(1-\mathrm{j}\frac{\nu}{\omega}\right)^2-\left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^2}$,$\varepsilon_{zz}=1-\dfrac{\left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2}{1-\mathrm{j}\frac{\nu}{\omega}}$,$\mu'_{xx}=\mu'_{yy}=\mu'_{zz}=1$,$\mu'_{xy}=\mu'_{yx}=0$。其中,$\omega_p=\sqrt{n_e e^2/m\varepsilon_0}$ 为等离子体频率,$\omega_c=eB_0/m$ 为电子回旋频率;ω 为电磁波频率;B_0 为外磁场;n_e 是电子密度;ν 为电子碰撞频率;e,m 分别为电子的电量和质量。此时四次方程的系数简化为 $a(\theta_k)=\varepsilon_{xx}\sin^2\theta_k+$

$\varepsilon_{zz}\cos^2\theta_k$ ，$b(\theta_k)=(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yx}^2)\sin^2\theta_k+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(1+\cos^2\theta_k)$，$c=\varepsilon_{zz}(\varepsilon_{xx}^2+\varepsilon_{yx}^2)$。式(8.29)的根即特征波数，本来有四个根，舍弃实部为负的根后只剩下两个根。特征波数是(θ_k,φ_k)的函数，特殊情形下只是 θ_k 的函数。这里波数 k 已经对 k_0 作了归一化，约去了因子 $k_0^2=\omega^2\varepsilon_0\mu_0$，归一化因子 k_0 隐含了特征波数和频率 ω 的关系。应用上面的推导结果，作者给出如下的两个算例。

算例 1. 设介质的各向异性参数为 $\varepsilon_{xx}=8.19-1.3\text{j}$，$\varepsilon_{yy}=15.59-8.19\text{j}$，$\varepsilon_{zz}=25.59-3.89\text{j}$，$\varepsilon_{xy}=1.39-0.56\text{j}$，$\varepsilon_{yx}=2.16-1.68\text{j}$，$\mu_{xx}=5.41-2.1\text{j}$，$\mu_{yy}=11.32-3.0\text{j}$，$\mu_{zz}=21.3-4.47\text{j}$，$\mu_{xy}=3.0+1.0\text{j}$，$\mu_{yx}=-2.7-1.0\text{j}$。根据计算结果，特征波数 k_1，k_2 的空间分布如图 8.4 所示。

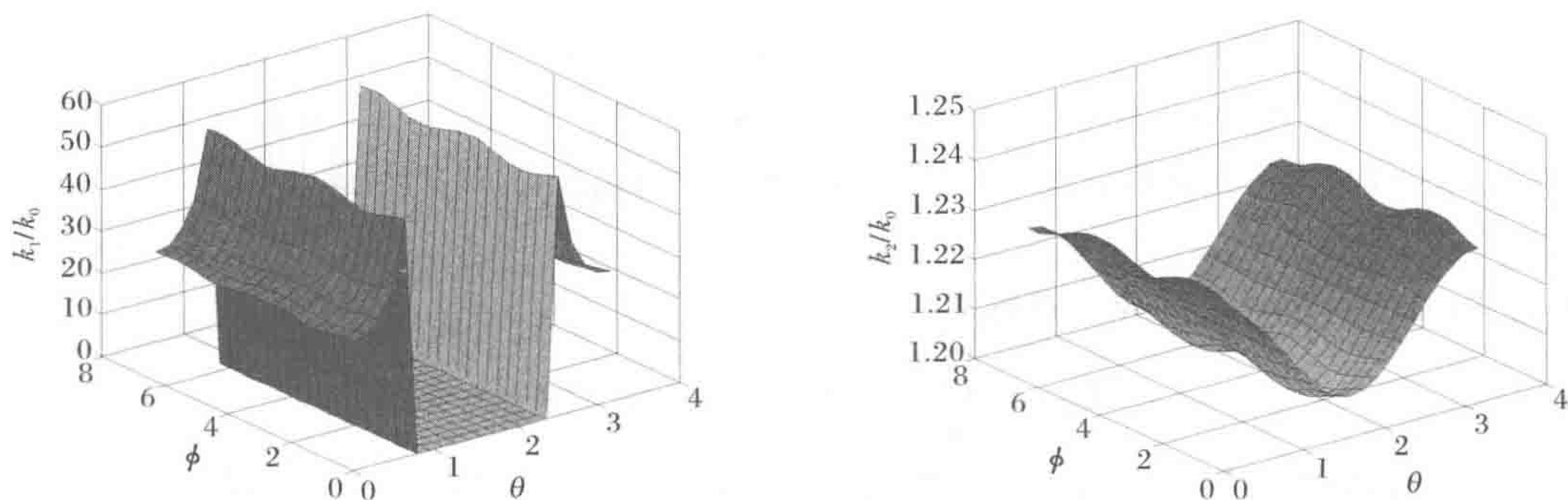


图 8.4　特征波数的空间分布

观察发现，在 $\theta\in(0.8,2.2)$区间的特征波数 k_1 为零，说明沿这些方向的电磁场是凋落场，这是由该例特殊的材料参数决定的。

算例 2. 设介质参数 $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}=4.3-3.0\text{j}$，$\varepsilon_{zz}=6.2$，$\varepsilon_{yx}=-\varepsilon_{xy}=2.0\text{j}$，$\mu=\mu_0$，则特征波数的空间分布如图 8.5 所示，此时特征波数只随 θ_k 变化，在 φ_k 方向无变化。

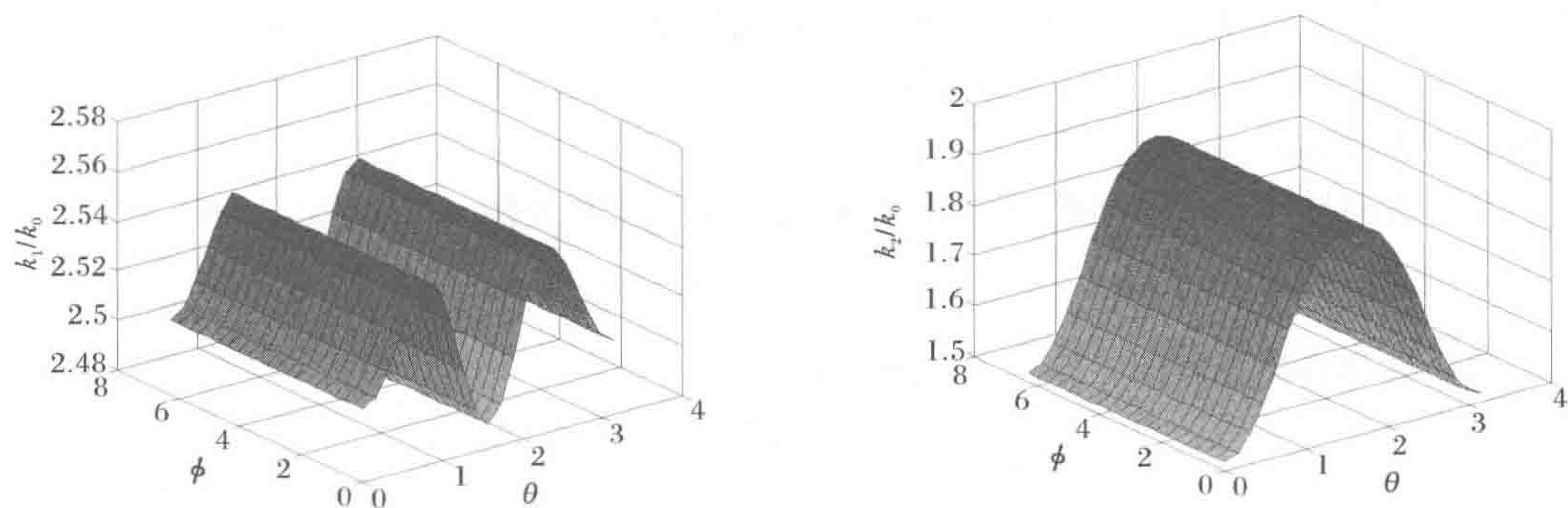


图 8.5　特征波数的空间分布

由于 $G(\theta_k,\varphi_k)$是一个 3×3 的矩阵，故上述方程会有三个本征值和本征矢量。但是受到条件$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$ 的约束，$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$中只有两个分量是独立的，这意味着式(8.28)中只有两个本征值和两个本征矢量。因此，其通解为

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})=\sum_{q=1}^{2}C_q(\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{E}_q(\theta_k,\varphi_k)\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_q\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.30}$$

式中

$$\boldsymbol{E}_q(\theta_k,\varphi_k)=E_{qx}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{e}_x+E_{qy}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{e}_y+E_{qz}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{e}_z,\quad q=1,2 \tag{8.31}$$

由行列式的性质可得

$$\frac{E_{qx}(\theta_k,\varphi_k)}{\begin{vmatrix}G_{12}(k_q,\theta_k,\varphi_k) & G_{13}(k_q,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{22}(k_q,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k_q,\theta_k,\varphi_k)\end{vmatrix}}=\frac{E_{qy}(\theta_k,\varphi_k)}{-\begin{vmatrix}G_{11}(k_q,\theta_k,\varphi_k) & G_{13}(k_q,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{21}(k_q,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k_q,\theta_k,\varphi_k)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{E_{qz}(\theta_k,\varphi_k)}{\begin{vmatrix}G_{11}(k_q,\theta_k,\varphi_k) & G_{12}(k_q,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{21}(k_q,\theta_k,\varphi_k) & G_{22}(k_q,\theta_k,\varphi_k)\end{vmatrix}}$$

从而得到

$$\begin{aligned}&E_{qx}(\theta_k,\varphi_k):E_{qy}(\theta_k,\varphi_k):E_{qz}(\theta_k,\varphi_k)=\{k_q^2\sin\theta_k\cos\theta_k[(k_q^2-\varepsilon_{yy})\cos\varphi_k+\varepsilon_{xy}\sin\varphi_k]\}:\\&\{k_q^2\sin\theta_k\cos\theta_k[(k_q^2-\varepsilon_{xx})\sin\varphi_k+\varepsilon_{yx}\cos\varphi_k]\}:\{k_q^4\cos^4\theta_k-k_q^2\cos^2\theta_k(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}-k_q^2\sin^2\theta_k)\\&+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}-\varepsilon_{xy}\varepsilon_{yx}-k_q^2\sin^2\theta_k[\varepsilon_{xx}\cos^2\varphi_k+(\varepsilon_{xy}+\varepsilon_{yx})\sin\varphi_k\cos\varphi_k+\varepsilon_{yy}\sin^2\varphi_k]\}\end{aligned} \tag{8.32}$$

根据式(8.23),很容易推导出磁场为

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k})=\sum_{q=1}^{2}C_q(\boldsymbol{k})(\omega\mu)^{-1}\cdot\boldsymbol{k}_q\times\boldsymbol{E}_q\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_q\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.33}$$

波进入各向异性介质后,立即分解为介质能够维持的特征波的叠加。特征波的波数是波矢方向的函数,特征波的方向的变化规律也是波矢方向的函数[19]。而在各向同性介质中波数沿任何方向都一样,特征波的电磁场亦不随波矢方向变化。

8.1.5 本征平面波解的球波函数展开

铁氧体球在环形器和谐振器中广泛采用,工程实践中迫切需要严格方法来分析其对电磁波的导行和散射。在微波遥感、复合材料的研究中,经常涉及颗粒的多体散射。矩量法、有限元法等在处理单体散射时很有效。若用于处理 N 体散射则会遇到困难,因为其计算时间与 N^3 成正比。将无界各向异性介质的本征平面波解用球波函数展开,能很好地解决上述问题。

考察各向异性球中的电磁场,取电场 $\boldsymbol{E}$ 的三维傅里叶变换

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=\int\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k} \tag{8.34}$$

将式(8.34)代入波动方程(8.28),得到

$$\int\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}\boldsymbol{k}=0 \tag{8.35}$$

式中

$$\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)=\begin{bmatrix}G_{11}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{12}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{13}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{21}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{22}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{31}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{32}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{33}(k,\theta_k,\varphi_k)\end{bmatrix} \tag{8.36}$$

式(8.35)对应着 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$ 的本征值问题,虽然 $\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)$ 是 3×3 的矩阵,但受到条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$ 的约束,$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k})$ 只有两个分量是独立的,因而式(8.34)的积分变成仅对球面分量(θ_k,φ_k)的积分

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}k_q\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k C_q(\boldsymbol{k})\boldsymbol{E}(\theta_k,\varphi_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_q\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.37}$$

对于磁场则有

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}k_q\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k C_q(\boldsymbol{k})\boldsymbol{H}(\theta_k,\varphi_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_q\cdot\boldsymbol{r}} \tag{8.38}$$

式(8.37)和式(8.38)中，$\boldsymbol{E}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{H}(\theta_k,\varphi_k)$是电场和磁场的特征波，$\boldsymbol{k}_q$ 是特征波的波数，$C_q(\boldsymbol{k})$是特征波的待定振幅函数。

将待定振幅函数用正交完备的球面谐函数展开为

$$C_q(\boldsymbol{k}) = \sum_{n',m'}u_{qn'm'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k} \tag{8.39}$$

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$表示波矢量为 $\boldsymbol{k}$ 的平面波。波矢沿(θ_k,φ_k)方向的平面波的矢量球面波展开式为[20]

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}[&-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}(\boldsymbol{kr},\theta,\varphi)\\&+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}(kr,\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}(\boldsymbol{kr},\theta,\varphi)]\end{aligned} \tag{8.40}$$

对于空间的任意径向位置，该展开式都是收敛的，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\theta_k,\varphi_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_q\cdot\boldsymbol{r}} = \sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}[&-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_q(\boldsymbol{k}_q)\boldsymbol{L}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\&+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_q(\boldsymbol{k}_q)\boldsymbol{M}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\&-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_q(\boldsymbol{k}_q)\boldsymbol{N}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\end{aligned} \tag{8.41}$$

将式(8.39)、式(8.41)代入式(8.37)，得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{n',m'}u_{qm'n'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}[&\alpha_{qmn}\boldsymbol{M}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})+\beta'_{qmn}\boldsymbol{N}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})\\&+\gamma_{qmn}\boldsymbol{L}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})]\boldsymbol{k}_q\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k\end{aligned} \tag{8.42}$$

对于磁场则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{n',m'}u_{qm'n'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}[&\alpha'_{qmn}\boldsymbol{M}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})+\beta'_{qmn}\boldsymbol{N}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})\\&+\gamma'_{qmn}\boldsymbol{L}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})]\boldsymbol{k}_q\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k\end{aligned} \tag{8.43}$$

式(8.42)、式(8.43)就是满足 Maxwell 方程的各向异性球电场和磁场的解。由于四类球 Bessel 函数满足同样的方程和递推关系，若将式中的$\boldsymbol{M}_{mn}$，$\boldsymbol{N}_{mn}$，$\boldsymbol{L}_{mn}$替换为第二、三、四类球矢量波函数，得到的解也满足 Maxwell 方程。由此得到各向异性介质四类球波函数的定义

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{(l)}(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{n',m'}u_{qm'n'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}[&\alpha_{qmn}\boldsymbol{M}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})+\beta_{qmn}\boldsymbol{N}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})\\&+\gamma_{qmn}\boldsymbol{L}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})]\boldsymbol{k}_q\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k,\quad l=1,2,3,4\end{aligned} \tag{8.44}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{H}^{(l)}(\boldsymbol{r}) = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{n',m'}u_{qm'n'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}[&\alpha'_{qmn}\boldsymbol{M}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})+\beta'_{qmn}\boldsymbol{N}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})\\&+\gamma'_{qmn}\boldsymbol{L}_{mn}(\boldsymbol{k}_q\boldsymbol{r})]\boldsymbol{k}_q\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k,\quad l=1,2,3,4\end{aligned} \tag{8.45}$$

式中，球矢量波函数的系数为

$$\begin{cases}\alpha_{qmn}=(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_q(\theta_k,\varphi_k)\\\beta_{qmn}=-\mathrm{j}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_q(\theta_k,\varphi_k)\\\gamma_{qmn}=-\mathrm{j}n(n+1)(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_q(\theta_k,\varphi_k)\end{cases}\tag{8.46}$$

$$\begin{cases}\alpha'_{qmn}=(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_q(\theta_k,\varphi_k)\\\beta'_{qmn}=-\mathrm{j}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_q(\theta_k,\varphi_k)\\\gamma'_{qmn}=-\mathrm{j}n(n+1)(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_q(\theta_k,\varphi_k)\end{cases}\tag{8.47}$$

$\boldsymbol{P}_{mn}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta_k,\varphi_k)$是矢量球谐函数；$\boldsymbol{L}_{mn}^{(l)}$，$\boldsymbol{M}_{mn}^{(l)}$，$\boldsymbol{N}_{mn}^{(l)}$为第 l 类球矢量波函数。从式(8.46)和式(8.47)可以明显看出，当各向异性介质的参数给定以后，各向异性球的波函数解也就相应地确定了。

8.2　各向异性三层球电磁散射的角谱积分方法

由于各向异性介质的本构参数以张量的形式出现，对解偏微分方程十分有效的分离变量法不再适用，均匀各向异性介质中的齐次波动方程在圆球坐标系下的解析解导出十分困难。文献[12]～[14] 提出的均匀各向异性介质波函数理论所给出的解析法，其独到之处在于不用分离变量法，而采用基于矢量球面波展开的角谱积分表达式展开整个理论。解的正确性已在二维圆柱的情形得到验证[21]，这里将其推广应用于三维球体电磁散射的计算。

各向异性介质球波函数的角谱积分表达式具有重要应用价值。本节将基于各向异性介质球波函数的角谱积分表达式，推导、建立计算各向异性三层球电磁散射的公式体系。

8.2.1　物理模型

如图 8.6 所示，均匀各向异性三层球位于自由空间中，由内到外球的半径分别为 r_1，

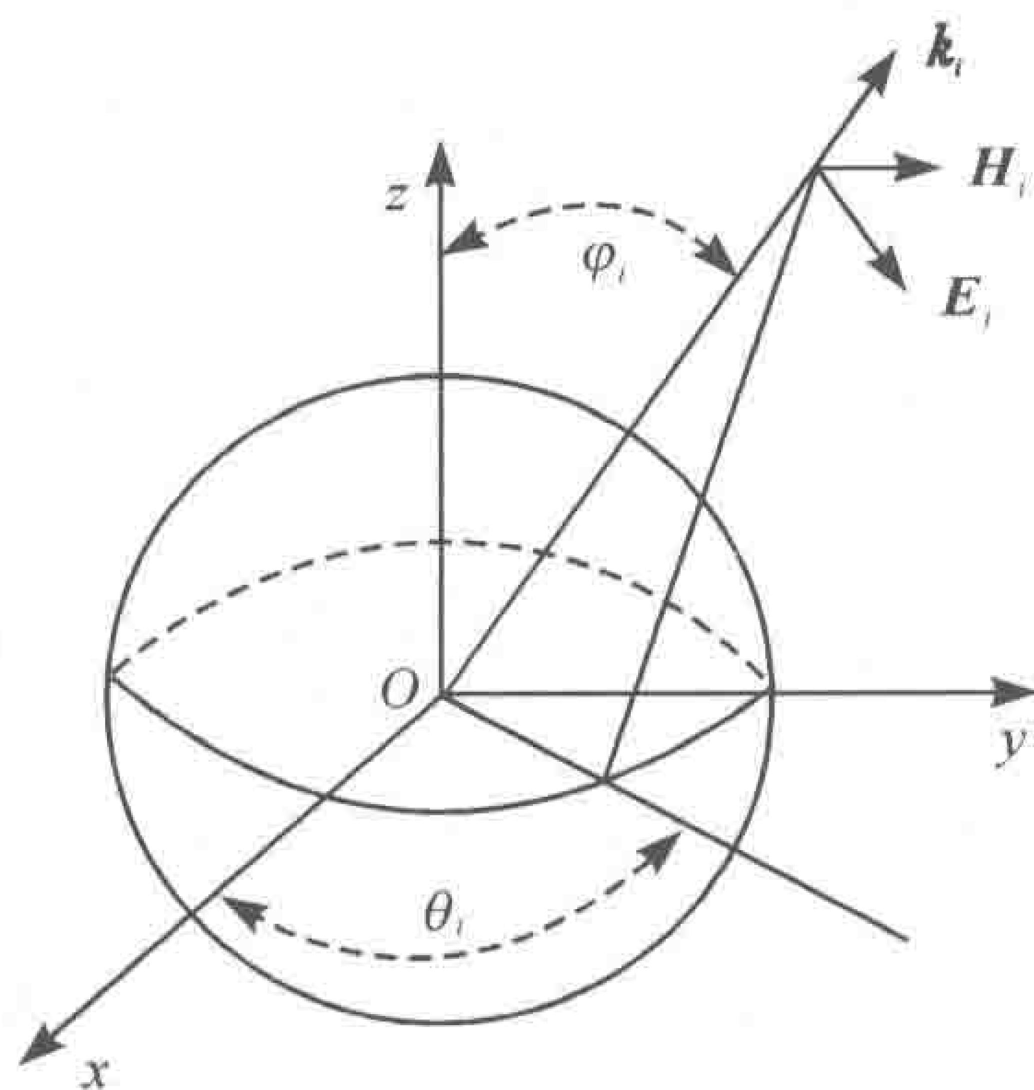


图 8.6　平面波入射到各向异性三层球

r_2, r_3，三个球层的介电率和磁导率为

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx}^n & \varepsilon_{xy}^n & 0 \\ \varepsilon_{yx}^n & \varepsilon_{yy}^n & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz}^n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\mu}_n = \mu_0 \begin{bmatrix} \mu_{xx}^n & \mu_{xy}^n & 0 \\ \mu_{yx}^n & \mu_{yy}^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz}^n \end{bmatrix}, \quad n=1,2,3$$

单色平面波$\boldsymbol{E}_i = \boldsymbol{e}_i E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}}$入射到各向异性三层球。为方便读者理解，在此给出了三层球的剖面图，如图 8.7 所示。

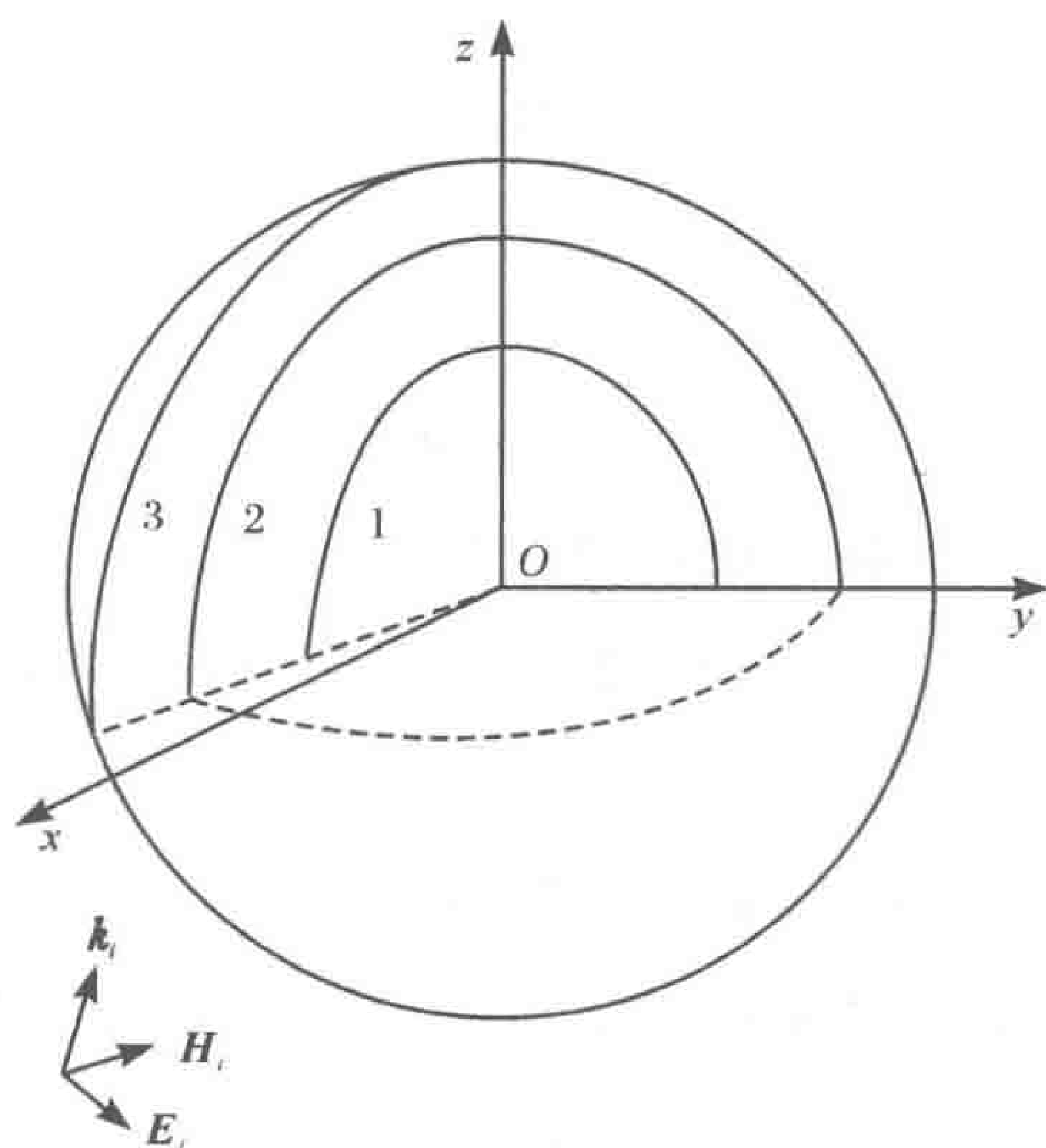


图 8.7　各向异性三层球的剖面图

8.2.2　建立各区域的电磁场量

自由空间的入射场用球矢量波函数展开为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_i = \sum\limits_{n,m} \left[p_{mn} \boldsymbol{M}^{(1)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) + q_{mn} \boldsymbol{N}^{(1)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) \right] \\ \boldsymbol{H}_i = \dfrac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0} \sum\limits_{n,m} \left[p_{mn} \boldsymbol{N}^{(1)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) + q_{mn} \boldsymbol{M}^{(1)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) \right] \end{cases} \tag{8.48}$$

式中，p_{mn}，q_{mn}是入射系数，由入射角度(θ_i, φ_i)和极化矢量$\boldsymbol{e}_i$求得[20]

$$\begin{cases} p_{mn} = (-1)^m \mathrm{j}^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_i, \varphi_i) \\ q_{mn} = (-1)^m \mathrm{j}^{n-1} \dfrac{2n+1}{n(n+1)} \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_i, \varphi_i) \end{cases} \tag{8.49}$$

自由空间的散射场也用球矢量波函数展开为

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_s = \sum\limits_{n,m} \left[p_{mn}^s \boldsymbol{M}^{(3)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) + q_{mn}^s \boldsymbol{N}^{(3)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) \right] \\ \boldsymbol{H}_s = \dfrac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0} \sum\limits_{n,m} \left[p_{mn}^s \boldsymbol{N}^{(3)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) + q_{mn}^s \boldsymbol{M}^{(3)}(k_0 \boldsymbol{r}, \theta, \varphi) \right] \end{cases} \tag{8.50}$$

式中，p_{mn}^s，q_{mn}^s是待求的散射系数。由于三个球层区域的电磁本构参数不同，三个区域将

建立起不同的电磁场。根据式(8.48)、式(8.49),区域 1 的电磁场用第一类球矢量波函数展开为[1]

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_1 = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}u_{1qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} \\ \quad\cdot[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{1q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{1q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{1q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)] \\ \boldsymbol{H}_1 = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}u_{1qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} \\ \quad[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{1q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{1q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{1q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\end{cases}\tag{8.51}$$

区域 2 为环形区域,电磁场用第一类和第二类球矢量波函数展开为[1]

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_2 = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}u_{2qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} \\ \quad\cdot[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)] \\ \quad+\sum_{n',m'}v_{2qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k) \\ \quad\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\Big\} \\ \boldsymbol{H}_2 = \sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}u_{2qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)} \\ \quad\cdot\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}\,\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad+\sum_{n',m'}v_{2qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{(2n+1)}{n(n+1)}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k) \\ \quad\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{2q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\Big\}\end{cases}\tag{8.52}$$

区域 3 亦为环形区域,电磁场用第一类和第二类球矢量波函数展开为[1]

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_3=\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}u_{3qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\right.\\ \quad\cdot[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\\ \quad+\sum_{n',m'}v_{3qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{(2n+1)}{n(n+1)}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\\ \quad\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad\left.-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\right\}\\ \boldsymbol{H}_3=\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}u_{3qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\right.\\ \quad\cdot\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad+\sum_{n',m'}v_{3qm'n'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{(2n+1)}{n(n+1)}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\\ \quad\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\\ \quad\left.-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{3q}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\right\}\end{cases}\tag{8.53}$$

8.2.3 根据边界条件建立方程组

在不同介质的分界面电场强度的切向分量连续;介质分界面不存在表面电流,磁场强度的切向分量也是连续的。因此,三个球层的分界面以及球体与外部自由空间的交界面,都满足电磁场的边界条件。

在区域 1 和区域 2 的分界面有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{E}_1-\boldsymbol{E}_2)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\\(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\end{cases}\tag{8.54}$$

将$\boldsymbol{E}_1$,$\boldsymbol{E}_2$ 的表达式代入电场的边界条件,并利用关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(kr)\times\hat{\boldsymbol{r}}=-j_n(kr)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(kr)\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\dfrac{j_n(kr)}{\rho}+j_n'(kr)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(kr)\times\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{j_n(kr)}{kr}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases}\tag{8.55}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(kr)\times\hat{\boldsymbol{r}}=-y_n(kr)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(kr)\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\dfrac{y_n(kr)}{kr}+y_n'(kr)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(kr)\times\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{y_n(kr)}{kr}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases}\tag{8.56}$$

化简整理,得到

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{1qm'n'}$$
$$\cdot\left\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$
$$\left.\cdot j_n(k_{1q}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}+j_n'(k_{1q}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}$$
$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{2qm'n'}\right.$$
$$\cdot\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)$$
$$\cdot j_n(k_{2q}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+j_n'(k_{2q}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\}$$
$$+v_{2qm'n'}\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$$
$$-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$
$$\left.-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+y_n'(k_{2q}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\}\right\}=0$$
$$(8.57)$$

令式(8.57)中$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零,得到

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{1qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{1q}r_1)$$
$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}[u_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\right.\quad(8.58)$$
$$\left.\cdot j_n(k_{2q}r_1)+v_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_1)]\right\}=0$$

令式(8.57)中$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零,得到

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}\boldsymbol{P}_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{1qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$
$$\left.\cdot\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}+j_n'(k_{1q}r_1)\right]\right\}-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k$$
$$\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{2qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\right.\right.$$
$$\left.+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+j_n'(k_{2q}r_1)\right]\right\}$$
$$+v_{2qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\right.$$
$$\left.\left.+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+y_n'(k_{2q}r_1)\right]\right\}\right\}=0$$
$$(8.59)$$

将$\boldsymbol{H}_1$,$\boldsymbol{H}_2$ 代入磁场的边界条件,化简整理得到

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{1qm'n'}$$

$$\cdot\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)$$

$$\cdot j_n(k_{1q}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}+j_n'(k_{1q}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\}$$

$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{2qm'n'}\right.$$

$$\cdot\left\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$

$$\left.\cdot j_n(k_{2q}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+j_n'(k_{2q}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}$$

$$+v_{2qm'n'}\left\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$\left.\left.-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+y_n'(k_{2q}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}\right\}=0 \tag{8.60}$$

令式(8.60)中$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得[1]

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{1qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{1q}r_1)$$

$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}[u_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{2q}r_1)\right.$$

$$\left.+v_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_1)]\right\}=0 \tag{8.61}$$

令式(8.60)中$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{1q}\sin\theta_k u_{1qm'n'}\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$

$$\left.\cdot\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{1q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{1q}r_1)}{k_{1q}r_1}+j_n'(k_{1q}r_1)\right]\right\}-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k$$

$$\cdot\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{2qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\right.\right.$$

$$\left.+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+j_n'(k_{2q}r_1)\right]\right\}$$

$$+v_{2qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}\right.$$

$$\left.\left.+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_1)}{k_{2q}r_1}+y_n'(k_{2q}r_1)\right]\right\}\right\}=0 \tag{8.62}$$

在区域 2 和区域 3 的分界面有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\\(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\end{cases}$$

将$\boldsymbol{E}_2$,$\boldsymbol{E}_3$ 的表达式代入电场的边界条件,并利用关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-j_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=[\frac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\rho}+j_n'(\boldsymbol{kr})]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{j_n(\boldsymbol{kr})}{kr}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases}\tag{8.63}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-y_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\frac{y_n(\boldsymbol{kr})}{kr}+y_n'(kr)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{y_n(\boldsymbol{kr})}{kr}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases}\tag{8.64}$$

化简整理得

$$\begin{aligned}&\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{2qm'n'}\\&\cdot\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\\&\cdot j_n(k_{2q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+j_n'(k_{2q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\\&+v_{2qm'n'}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\\&\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+y_n'(k_{2q}r_2)\right]\\&\cdot\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\\&\cdot u_{3qm'n'}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\&-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\&-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+j_n'(k_{3q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\\&+v_{3qm'n'}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\&-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\&-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+y_n'(k_{3q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}=0\end{aligned}\tag{8.65}$$

令式(8.65)中$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}[u_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{2q}r_2)$$

$$+v_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_2)]\Big\}$$

$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}[u_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_2)$$

$$+v_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_2)]\Big\}=0 \tag{8.66}$$

令式(8.65)中$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{2qm'n'}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)$$

$$\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+j_n'(k_{2q}r_2)\right]\Big\}$$

$$+v_{2qm'n'}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)$$

$$\cdot\boldsymbol{E}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+y_n'(k_{2q}r_2)\right]\Big\}\Big\}$$

$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{3qm'n'}\Big\{n(n+1)$$

$$\cdot\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(k_{3q})\left[\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+j_n'(k_{3q}r_2)\right]\Big\}$$

$$+v_{3qm'n'}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}$$

$$+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+y_n'(k_{3q}r_2)\right]\Big\}\Big\}=0 \tag{8.67}$$

将$\boldsymbol{H}_2$,$\boldsymbol{H}_3$ 的表达式代入磁场的边界条件,化简整理得

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{2qm'n'}$$

$$\cdot\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)$$

$$\cdot j_n(k_{2q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+j_n'(k_{2q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}$$

$$+v_{2qm'n'}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+y_n'(k_{2q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}$$

$$-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\Big\{\sum_{n',m'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{3qm'n'}$$

$$\cdot\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)$$

$$\cdot j_n(k_{3q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+j_n'(k_{3q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}$$

$$+ v_{3qm'n'}\left\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right.$$
$$-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$
$$\left.\left.-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+y_n'(k_{3q}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}\right\}=0 \quad (8.68)$$

令式(8.68)中$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得[1]

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\left[u_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot j_n(k_{2q}r_2)+v_{2qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{2q}r_2)\right]\right\}-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k$$
$$\cdot\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\left[u_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_2)+v_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_2)\right]\right\}=0$$
$$(8.69)$$

令式(8.68)中$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得[1]

$$\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{2q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{2qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\right.\right.$$
$$\left.\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+j_n'(k_{2q}r_2)\right]\right\}+v_{2qm'n'}$$
$$\cdot\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{2q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{2q}r_2)}{k_{2q}r_2}\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.+y_n'(k_{2q}r_2)\right]\right\}\right\}-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{3qm'n'}\left\{n(n+1)\right.\right.$$
$$\left.\cdot\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(k_{3q})\left[\frac{j_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+j_n'(k_{3q}r_2)\right]\right\}$$
$$+v_{3qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdot\left[\frac{y_n(k_{3q}r_2)}{k_{3q}r_2}+y_n'(k_{3q}r_2)\right]\right\}\right\}\right\}=0$$
$$(8.70)$$

在球体和自由空间的交界面,满足边界条件

$$\begin{cases}(\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{E}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\\(\boldsymbol{H}_s+\boldsymbol{H}_i-\boldsymbol{H}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\end{cases}$$

将$\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{E}_3$ 的表达式代入电场的边界条件,并利用关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-j_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\dfrac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}+j_n'(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases} \quad (8.71)$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(3)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-h_n^1(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{N}_{mn}^{(3)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\dfrac{h_n^1(\boldsymbol{kr})}{\rho}+h_n^1(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\ \boldsymbol{L}_{mn}^{(3)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{h_n^1(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases}\tag{8.72}$$

化简整理得

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}q_{mn}^s\left[\frac{h_n^1(k_0r_3)}{k_0r_3}+h_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-p_{mn}^sh_n^1(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\sum_{n,m}q_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}\right.\\&\left.+j_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-p_{mn}j_n(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)=-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_kk_{3q}\sin\theta_k\\&\cdot\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}u_{3qm'n'}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\right.\right.\\&\cdot\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\\&\left.\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+j_n'(k_{3q}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}+v_{3qm'n'}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\right.\\&\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\&\left.\left.+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+y_n'(k_{3q}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\end{aligned}\tag{8.73}$$

令式(8.73)中$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得

$$\begin{aligned}&(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_kk_{3q}\sin\theta_k\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\{u_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\\&\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_3)+v_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_3)\}-\{p_{mn}^sh_n^1(k_0r_3)\\&+p_{mn}j_n(k_0r_3)\}=0\end{aligned}\tag{8.74}$$

令式(8.73)中$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得

$$\begin{aligned}&-\mathrm{j}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_kk_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{3qm'n'}\left\{n(n+1)\right.\right.\\&\left.\cdot\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+j_n'(k_{3q}r_3)\right]\right\}\\&+v_{3qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{E}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\right.\\&\left.\left.\cdot\left[\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+y_n'(k_{3q}r_3)\right]\right\}\right\}-\left\{q_{mn}^s\left[\frac{h_n^1(k_0r_3)}{k_0r_3}+h_n^{1\prime}(k_0r_3)\right]\right.\\&\left.+q_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right]\right\}=0\end{aligned}\tag{8.75}$$

将$\boldsymbol{H}_s,\boldsymbol{H}_i,\boldsymbol{H}_3$的表达式代入磁场的边界条件，化简整理得[1]

$$\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left\{\sum_{n,m}p_{mn}^{s}\left[\frac{h_n^1(k_0r_3)}{k_0r_3}+h_n^{1\prime}(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-q_{mn}^{s}h_n^1(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\right.$$
$$\left.+\sum_{n,m}p_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-q_{mn}j_n(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}$$
$$=-\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{n,m}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\right.$$
$$\cdot u_{3qm'n'}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\quad\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+j_n'(k_{3q}r_3)\right]$$
$$\left.\cdot\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}+v_{3qm'n'}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(k_{3q})\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right.$$
$$+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)$$
$$\left.\left.\cdot\left[\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+y_n'(k_{3q}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\tag{8.76}$$

令式(8.76)中 $\boldsymbol{B}_{mn}(\theta\varphi)$的系数为零得

$$(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$
$$\left.\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)j_n(k_{3q}r_3)+v_{3qm'n'}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)y_n(k_{3q}r_3)\right\}-\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\{q_{mn}^{s}j_n(k_0r_3)$$
$$+q_{mn}j_n(k_0r_3)\}=0\tag{8.77}$$

令式(8.76)中$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的系数为零得

$$\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\left\{p_{mn}^{s}\left[\frac{h_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+h_n'(k_0r_3)\right]+p_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right]\right\}$$
$$=-\mathrm{j}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\sum_{q=1}^{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k k_{3q}\sin\theta_k\left\{\sum_{n',m'}P_{n'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}u_{3qm'n'}\left\{n(n+1)\right.\right.$$
$$\cdot\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(k_{3q})\left[\frac{j_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}\right.$$
$$\left.\left.+j_n'(k_{3q}r_3)\right]\right\}+v_{3qm'n'}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$
$$\left.\left.\left.\cdot\boldsymbol{H}_{3q}(\theta_k,\varphi_k)\left[\frac{y_n(k_{3q}r_3)}{k_{3q}r_3}+y_n'(k_{3q}r_3)\right]\right\}\right\}\right\}\tag{8.78}$$

至此,已根据边界条件建立起完备的公式体系。总共得到 12 个方程,将方程联立求解,就能得到散射系数。二重积分元素的计算是编程实现的难点,方法选用不当,积分将是发散的。关于(θ_k,φ_k)的二重积分,外层对 φ_k 的积分选用梯形积分公式,内层对 θ_k 的积分则选用 Matlab 内置的 quad 函数计算。有关改进见本书第二卷第十章。

8.2.4　改写方程组为矩阵形式

前面导出的 12 个方程之间存在耦合,需要对它们进行适当的排列,将方程组改写成容易求解的矩阵形式。一组确定的$[n,m]$值就对应着一种电磁波模式,因此应将求和符号 $\sum_{n,m}$ 展开,进行模式匹配。如此一来,这 12 个方程的每个都将裂变为若干个方程,裂变出来的方程数目由模式数决定。裂变出来的方程称为子方程,每个子方程中又涉及求和符号$\sum_{q}$ 和$\sum_{n',m'}$,其中$\sum_{q}$ 是将两个特征波叠加,$\sum_{n',m'}$ 是对待定振幅函数展开式中的级数求和。理清这些关系,在改写的时候才不会出错。另外,还必须搞清楚这 12 个方程的耦合关系。边界 r_1 导出的四个方程涉及待求量 $u_{1qm'n'}$,$u_{2qm'n'}$,$v_{2qm'n'}$,边界 r_2 导出的四个方程涉及待求量 $u_{2qm'n'}$,$v_{2qm'n'}$,$u_{3qm'n'}$,$v_{3qm'n'}$,边界 r_3 导出的四个方程涉及待求量 $u_{3qm'n'}$,$v_{3qm'n'}$,p_{mn}^s,q_{mn}^s。将 12 个方程联立写成矩阵形式后,这些待求量都占据着相应的位置。在改写 r_1 的四个方程时,未涉及的其他方程中的待求量,一律采取填零占位的方式。同样,在列写 r_2,r_3 的方程时,未涉及的待求量必须采取填零占位的方式。最后,得到方程组的矩阵形式

$$\begin{bmatrix}
* & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
* & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathrm{diag} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathbf{0} & \mathrm{diag} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathbf{0} & \mathrm{diag} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathrm{diag} & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\boldsymbol{u}_{1qm'n'} \\ \boldsymbol{u}_{2qm'n'} \\ \boldsymbol{v}_{2qm'n'} \\ \boldsymbol{u}_{3qm'n'} \\ \boldsymbol{v}_{3qm'n'} \\ \boldsymbol{p}_{mn}^{s} \\ \boldsymbol{q}_{mn}^{s}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
\mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\
p_{mn} j_n(k_0 r_3) \\
q_{mn}\left[\dfrac{j_n(k_0 r_3)}{k_0 r_3} + j_n'(k_0 r_3)\right] \\
q_{mn} j_n(k_0 r_3) \\
p_{mn}\left[\dfrac{j_n(k_0 r_3)}{k_0 r_3} + j_n'(k_0 r_3)\right]
\end{bmatrix}$$

式中,$\boldsymbol{u}_{1qm'n'}$,$\boldsymbol{u}_{2qm'n'}$,$\boldsymbol{v}_{2qm'n'}$,$\boldsymbol{u}_{3qm'n'}$,$\boldsymbol{v}_{3qm'n'}$,$\boldsymbol{p}_{mn}^s$,$\boldsymbol{q}_{mn}^s$ 构成待求的解列向量;系数矩阵中的 $*$ 代表非零子矩阵;**0** 代表零子矩阵。

$[n,m]$中的 n 和 m 之间存在关系 $n=[0,N_{\max}]$,$m\in[-n,n]$。考虑到$[n,m]$之间的这种特殊关系,为简化问题的讨论,将采用简单的标记方法。对于每组确定的$[n,m]$,都赋予对应的标记 h。h,m,n 三者之间的换算关系为 $h=n(n+1)+m$,每个 n 对应的 h 的值由不等式 $(n-1)(n+1)<h\leqslant n(n+2)$ 确定。关于 h,m,n 三者之间的对应关系,请参见表 8.1[1]。

表 8.1　h 与(n,m)的对应关系

n	m	h
1	−1	1
1	0	2
1	1	3
2	−2	4
2	−1	5
2	0	6
2	1	7
2	2	8
3	−3	9
3	−2	10
3	−1	11
3	0	12
3	1	13
3	2	14
3	3	15
⋮	⋮	⋮
$N_{\max}$	$N_{\max}$	$H_{\max}$

采用上述的标记方法,对于讨论问题和编程实现都十分方便。将 12 个方程按 h 标记方式裂变展开,矩阵的行数按 h 计算,矩阵的列数按 h,h' 计算。最后得到系数矩阵的维数为 $12H_{\max}$行、$2H_{\max}+10H'_{\max}$列。

8.3　各向异性三层球电磁散射的简化方法[22]

应用角谱积分方法进行计算所得到的结果是精确的,但系数矩阵的每个元素都含有二重积分,导致计算时间长、效率低。将(θ_k,φ_k)的积分离散化可减少计算时间。令

$$\begin{cases}\theta_{ks}=\theta_{k0}+s\Delta, & \theta_{k0}=0, \quad \Delta=\pi/S\\ \varphi_{kt}=\varphi_{k0}+t\Delta', & \varphi_{k0}=0, \quad \Delta'=2\pi/T\end{cases} \tag{8.79}$$

式中,s 和 t 有多种离散取法,例如可以取 $s=0,1,2,\cdots,S$,$t=0,1,2,\cdots,T$,其中 S 和 T 为待定常数。经过上述处理,得到各向异性介质球波函数解的简化形式[23,24]为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}^{(l)}(\boldsymbol{r})=\sum_{n,m}\sum_{q}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{qst}\big[&\alpha_{qmn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{mn}^{(l)}(\boldsymbol{k}_{qst}\boldsymbol{r})+\beta_{qmn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(l)}(\boldsymbol{k}_{qst}\boldsymbol{r})\\&+\gamma_{qmn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(l)}(\boldsymbol{k}_{qst}\boldsymbol{r})\big]\end{aligned} \tag{8.80}$$

$$\boldsymbol{H}^{(l)}(\boldsymbol{r})=\sum_{n,m}\sum_{q}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{qst}\left[\alpha'_{qmn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{mn}^{(l)}(\boldsymbol{k}_{qst}\boldsymbol{r})+\beta'_{qmn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(l)}(\boldsymbol{k}_{qst}\boldsymbol{r})\right.$$
$$\left.+\gamma'_{qmn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(l)}(\boldsymbol{k}_{qst}\boldsymbol{r})\right] \tag{8.81}$$

式(8.80)、式(8.81)中,球矢量波函数的系数为

$$\begin{cases}\alpha_{qmn}=(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{E}_{qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\[2ex]\beta_{qmn}=-\mathrm{j}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{E}_{qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\[2ex]\gamma_{qmn}=-\mathrm{j}n(n+1)(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{E}_{qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\end{cases} \tag{8.82}$$

$$\begin{cases}\alpha'_{qmn}=(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{H}_{qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\[2ex]\beta'_{qmn}=-\mathrm{j}(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{H}_{qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\[2ex]\gamma'_{qmn}=-\mathrm{j}n(n+1)(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{H}_{qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\end{cases} \tag{8.83}$$

采用简化方法计算各向异性三层球的电磁散射,数值计算时间缩短。角谱积分方法计算时间长,但结果的精度较高,两种方法的计算结果可相互印证。

在此仍采用8.2节的物理模型,不再赘述。

8.3.1 建立各区域的电磁场量

利用球矢量波函数将自由空间的入射场展开为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_i=\displaystyle\sum_{n,m}\left[p_{mn}\boldsymbol{M}^{(1)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)+q_{mn}\boldsymbol{N}^{(1)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]\\[2ex]\boldsymbol{H}_i=\dfrac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\displaystyle\sum_{n,m}\left[p_{mn}\boldsymbol{N}^{(1)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)+q_{mn}\boldsymbol{M}^{(1)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]\end{cases} \tag{8.84}$$

式中,p_{mn},q_{mn}是入射系数,由入射波的角度(θ_i,φ_i)和极化矢量$\boldsymbol{e}_i$求得[25],即

$$\begin{cases}p_{mn}=(-1)^m\mathrm{j}^n\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_i,\varphi_i)\\[2ex]q_{mn}=(-1)^m\mathrm{j}^{n-1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_i,\varphi_i)\end{cases} \tag{8.85}$$

自由空间的散射场也用球矢量波函数展开为

$$\begin{cases}\boldsymbol{E}_s=\displaystyle\sum_{n,m}\left[p_{mn}^s\boldsymbol{M}^{(3)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)+q_{mn}^s\boldsymbol{N}^{(3)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]\\[2ex]\boldsymbol{H}_s=\dfrac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\displaystyle\sum_{n,m}\left[p_{mn}^s\boldsymbol{N}^{(3)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)+q_{mn}^s\boldsymbol{M}^{(3)}(k_0\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]\end{cases} \tag{8.86}$$

式中 p_{mn}^{s}, q_{mn}^{s} 是待求的散射系数。

由于三个球层区域的电磁本构参数不同,三个区域将建立起不同的电磁场。根据式(8.80)、(8.81),区域1的电磁场用第一类球矢量波函数展开[1]为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_1 = \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{n,m} c_{1qst}(-1)^m \mathrm{j}^n \frac{2n+1}{n(n+1)}\left[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right. \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{1qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{1qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad \left. -\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{1qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right] \\
\boldsymbol{H}_1 = \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{n,m} c_{1qst}(-1)^m \mathrm{j}^n \frac{2n+1}{n(n+1)}\left[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right. \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{1qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{1qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad \left. -\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{1qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]
\end{cases}
\tag{8.87}
$$

区域2为环形区域,电磁场用第一类和第二类球矢量波函数展开[1]为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_2 = \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{n,m} (-1)^m \mathrm{j}^n \frac{2n+1}{n(n+1)}\left\{c_{2qst}\left[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.\right. \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}n(n+1) \\
\quad \left. \cdot \boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right] + d_{2qst}\left[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right. \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad \left.\left. -\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]\right\} \\
\boldsymbol{H}_2 = \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{n,m} (-1)^m \mathrm{j}^n \frac{(2n+1)}{n(n+1)}\left\{c_{2qst}\left[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.\right. \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}n(n+1) \\
\quad \left. \cdot \boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right] + d_{2qst}\left[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right. \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad \left.\left. -\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{2qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)\right]\right\}
\end{cases}
\tag{8.88}
$$

区域3亦为环形区域,电磁场用第一类和第二类球矢量波函数展开[1]为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{E}_3 = \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{n,m}(-1)^m \mathrm{j}^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)}\{c_{3qst}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt}) \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad - \mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)] \\
\quad + d_{3qst}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad - \mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\} \\
\boldsymbol{H}_3 = \sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\sum_{n,m}(-1)^m \mathrm{j}^n \dfrac{2n+1}{n(n+1)}\{c_{3qst}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt}) \\
\quad \cdot \boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad - \mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)] \\
\quad + d_{3qst}[\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad - \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi) \\
\quad - \mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(k_{3qst}\boldsymbol{r},\theta,\varphi)]\}
\end{cases}
\tag{8.89}
$$

8.3.2 根据边界条件建立方程组

在不同介质的分界面电场强度的切向分量连续；介质分界面不存在表面电流，磁场强度的切向分量也是连续的。因此，三个球层的分界面以及球体与外部自由空间的交界面都满足电磁场的边界条件。

在区域 1 和区域 2 的分界面有

$$
\begin{cases}
(\boldsymbol{E}_1 - \boldsymbol{E}_2)\times\hat{\boldsymbol{r}} = 0 \\
(\boldsymbol{H}_1 - \boldsymbol{H}_2)\times\hat{\boldsymbol{r}} = 0
\end{cases}
\tag{8.90}
$$

将$\boldsymbol{E}_1$，$\boldsymbol{E}_2$ 的表达式代入电场的边界条件，并利用关系式

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}} = -j_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \\
\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}} = \left[\dfrac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\rho} + j_n'(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) \\
\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)
\end{cases}
\tag{8.91}
$$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}} = -y_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \\
\boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}} = \left[\dfrac{y_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}} + y_n'(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) \\
\boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}} = \dfrac{y_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)
\end{cases}
\tag{8.92}
$$

化简整理得

$$\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$$
$$+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{1qst}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\left[\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}+j_n'(k_{1qst}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}-\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\Big\{c_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{2qst}r_1)$$
$$\cdot\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+j_n'(k_{2qst}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}$$
$$+d_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{2qst}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\right.$$
$$\left.+y_n'(k_{2qst}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}\Big\}=0 \tag{8.93}$$

令式(8.93)中$\boldsymbol{B}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})c_{1qst}j_n(k_{1qst}r_1)-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{E}_{2qst}(k_{2qst})[c_{2qst}j_n(k_{2qst}r_1)+d_{2qst}y_n(k_{2qst}r_1)]=0 \tag{8.94}$$

令式(8.93)中$\boldsymbol{C}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{E}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}+j_n'(k_{1qst}r_1)\right]\Big\}-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+j_n'(k_{2qst}r_1)\right]\Big\}$$
$$+d_{2qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+y_n'(k_{2qst}r_1)\right]\Big\}=0 \tag{8.95}$$

将$\boldsymbol{H}_1$,$\boldsymbol{H}_2$ 代入磁场的边界条件,化简整理得

$$\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$$
$$+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{1qst}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\left[\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}+j_n'(k_{1qst}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}-\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\Big\{c_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{2qst}r_1)$$
$$\cdot\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+j_n'(k_{2qst}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}$$
$$+d_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{2qst}r_1)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\right.$$
$$\left.+y_n'(k_{2qst}r_1)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}=0 \tag{8.96}$$

令式(8.96)中$\boldsymbol{B}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1qst}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{1qst}r_1)-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})[c_{2qst}j_n(k_{2qst}r_1)+d_{2qst}y_n(k_{2qst}r_1)]=0 \tag{8.97}$$

令式(8.96)中$\boldsymbol{C}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{1qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{1qst}r_1)}{k_{1qst}r_1}+j_n'(k_{1qst}r_1)\right]\Big\}-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+j_n'(k_{2qst}r_1)\right]\Big\} \tag{8.98}$$
$$+d_{2qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$
$$\cdot\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}+y_n'(k_{2qst}r_1)\right]\Big\}=0$$

在区域 2 和区域 3 的分界面有

$$\begin{cases}(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\\(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\end{cases} \tag{8.99}$$

将$\boldsymbol{E}_2$,$\boldsymbol{E}_3$ 的表达式代入电场的边界条件,并利用关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-j_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\dfrac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\rho}+j_n'(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases} \tag{8.100}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-y_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{N}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\dfrac{y_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}+y_n'(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{L}_{mn}^{(2)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\dfrac{y_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{8.101}$$

化简整理得

$$\begin{aligned}
&\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\
&+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{2qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+j_n'(k_{2qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}+d_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{2qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\
&+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+y_n'(k_{2qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\\
&-\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\Big\{c_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\
&+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{2qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+j_n'(k_{2qst}r_1)\right]\\
&\cdot\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}+d_{2qst}\Big\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{2qst}r_1)}{k_{2qst}r_1}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\
&+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{2qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\
&+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+y_n'(k_{2qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}=0
\end{aligned} \tag{8.102}$$

令式(8.102)中$\boldsymbol{B}_{mn}$的系数为零得

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})[c_{2qst}j_n(k_{2qst}r_2)+d_{2qst}y_n(k_{2qst}r_2)]\\
&-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})[c_{3qst}j_n(k_{3qst}r_2)+d_{3qst}y_n(k_{3qst}r_2)]=0
\end{aligned} \tag{8.103}$$

令式(8.102)中$\boldsymbol{C}_{mn}$的系数为零得

$$\begin{aligned}
&\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[c_{2qst}\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+d_{2qst}\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\right]\\
&+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\Big\{c_{2qst}\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+j_n'(k_{2qst}r_2)\right]\\
&+d_{2qst}\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+y_n'(k_{2qst}r_2)\right]\Big\}\Big\}-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})
\end{aligned}$$

$$\cdot \boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[c_{3qst}\frac{j_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+d_{3qst}\frac{y_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}\right]+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot \boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left\{c_{3qst}\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+j_n'(k_{3qst}r_2)\right]+d_{3qst}\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+y_n'(k_{3qst}r_2)\right]\right\}\Bigg\}=0 \tag{8.104}$$

将$\boldsymbol{H}_2$,$\boldsymbol{H}_3$ 的表达式代入磁场的边界条件,化简整理得

$$\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2qst}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right.$$

$$+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{2qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\left.\cdot \boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+j_n'(k_{2qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}+d_{2qst}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.$$

$$\cdot \boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{2qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$\left.+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+y_n'(k_{2qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}$$

$$-\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\left\{c_{3qst}\left\{\mathrm{j}n(n+1)P_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right.\right.$$

$$+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{3qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\left.\cdot \boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+j_n'(k_{3qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}+d_{3qst}\left\{\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.$$

$$\cdot \boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{3qst}r_1)}{k_{3qst}r_2}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{3qst}r_2)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$\left.\left.+\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+y_n'(k_{3qst}r_2)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}\right\}=0 \tag{8.105}$$

令式(8.105)中$\boldsymbol{B}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})[c_{2qst}j_n(k_{2qst}r_2)+d_{2qst}y_n(k_{2qst}r_2)]$$

$$-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})[c_{3qst}j_n(k_{3qst}r_2)+d_{3qst}y_n(k_{3qst}r_2)]=0 \tag{8.106}$$

令式(8.105)中$\boldsymbol{C}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[c_{2qst}\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+d_{2qst}\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}\right]\right.$$

$$+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{2qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left\{c_{2qst}\left[\frac{j_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+j_n'(k_{2qst}r_2)\right]\right.$$

$$\left.\left.+d_{2qst}\left[\frac{y_n(k_{2qst}r_2)}{k_{2qst}r_2}+y_n'(k_{2qst}r_2)\right]\right\}\right\}-\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}\left\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.$$

$$\cdot \boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[c_{3qst}\frac{j_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+d_{3qst}\frac{y_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}\right]+\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot \boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left\{c_{3qst}\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+j_n'(k_{3qst}r_2)\right]+d_{3qst}\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_2)}{k_{3qst}r_2}+y_n'(k_{3qst}r_2)\right]\right\}\Bigg\}=0 \tag{8.107}$$

在球体和自由空间的交界面,满足边界条件

$$\begin{cases}(\boldsymbol{E}_s+\boldsymbol{E}_i-\boldsymbol{E}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\\(\boldsymbol{H}_s+\boldsymbol{H}_i-\boldsymbol{H}_3)\times\hat{\boldsymbol{r}}=0\end{cases} \tag{8.108}$$

将$\boldsymbol{E}_s,\boldsymbol{E}_i,\boldsymbol{E}_3$ 的表达式代入电场的边界条件,并利用关系式

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-j_n(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{N}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\frac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}+j_n'(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{L}_{mn}^{(1)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{j_n(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases} \tag{8.109}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{M}_{mn}^{(3)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=-h_n^1(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{N}_{mn}^{(3)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\left[\frac{h_n^1(\boldsymbol{kr})}{\rho}+h_n^{1\prime}(\boldsymbol{kr})\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\\boldsymbol{L}_{mn}^{(3)}(\boldsymbol{kr})\times\hat{\boldsymbol{r}}=\frac{h_n^1(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\end{cases} \tag{8.110}$$

化简整理得

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}\left\{q_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-p_{mn}j_n(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}+\sum_{n,m}\Big\{q_{mn}^s\\&\cdot\left[\frac{h_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+h_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-p_{mn}^sh_n(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}-\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}(-1)^m\mathrm{j}^n\\&\cdot\frac{2n+1}{n(n+1)}\Big\{c_{3qst}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\\&-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{3qst}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\&\cdot\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}+j_n'(k_{3qst}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}+d_{3qst}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\&\cdot\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)-\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{3qst}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\\&-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}+y_n'(k_{3qst}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}=0\end{aligned} \tag{8.111}$$

令式(8.111)中$\boldsymbol{B}_{mn}$的系数为零得

$$\begin{aligned}&\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\{\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})[c_{3qst}j_n(k_{3qst}r_3)\\&+d_{3qst}y_n(k_{3qst}r_3)]\}-\sum_{n,m}p_{mn}^sh_n(k_0r_3)=\sum_{n,m}p_{mn}j_n(k_0r_3)\end{aligned} \tag{8.112}$$

令式(8.111)中$\boldsymbol{C}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}(-1)^{m+1}\mathrm{j}^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\Big\{c_{3qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot \frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + \boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + j_n'(k_{3qst}r_3)\right]\Bigg\}$$

$$+ d_{3qst}\Bigg\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + \boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot \boldsymbol{E}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + y_n'(k_{3qst}R_3)\right]\Bigg\}\Bigg\} - \sum_{n,m} q_{mn}^s\left[\frac{h_n(k_0r_3)}{k_0r_3} + h_n'(k_0r_3)\right]$$

$$= \sum_{n,m} q_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3} + j_n'(k_0r_3)\right] \tag{8.113}$$

将$\boldsymbol{H}_s$，$\boldsymbol{H}_i$，$\boldsymbol{H}_3$ 的表达式代入磁场的边界条件，化简整理得

$$\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\Bigg\{\sum_{n,m}\left\{p_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3} + j_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) - q_{mn}j_n(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}$$

$$+ \sum_{n,m}\left\{p_{mn}^s\left[\frac{h_n(k_0r_3)}{k_0r_3} + h_n'(k_0r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) - q_{mn}^s h_n(k_0r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)\right\}\Bigg\}$$

$$- \sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}(-1)^m \mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\Bigg\{c_{3qst}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot \boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) - \boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{3qst}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$- \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + j_n'(k_{3qst}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}$$

$$+ d_{3qst}\Big\{-\mathrm{j}n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$- \boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{3qst}r_3)\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$$

$$- \mathrm{j}\boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + y_n'(k_{3qst}r_3)\right]\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\Big\}\Bigg\} = 0$$

$$\tag{8.114}$$

令式(8.114)中$\boldsymbol{B}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T}(-1)^m\mathrm{j}^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\big[c_{3qst}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_n(k_{3qst}r_3)$$

$$+ d_{3qst}\boldsymbol{C}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_n(k_{3qst}r_3)\big] - \frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\sum_{n,m}q_{mn}^s h_n(k_0r_3)$$

$$= \frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\sum_{n,m}q_{mn}j_n'(k_0r_3) \tag{8.115}$$

令式(8.114)中$\boldsymbol{C}_{mn}$的系数为零得

$$\sum_{n,m}\sum_{q=1}^{2}\sum_{s=1}^{S}\sum_{t=1}^{T}(-1)^{m+1}\mathrm{j}^{n+1}\frac{(2n+1)}{n(n+1)}\Bigg\{c_{3qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot \boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + \boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{j_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + j_n'(k_{3qst}r_3)\right]\Big\}$$

$$+ d_{3qst}\Big\{n(n+1)\boldsymbol{P}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3}$$

$$+ \boldsymbol{B}_{-mn}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{H}_{3qst}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{y_n(k_{3qst}r_3)}{k_{3qst}r_3} + y_n'(k_{3qst}r_3)\right]\Big\}\Bigg\}$$

$$-\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\sum_{n,m}p_{mn}^{s}\left[\frac{h_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+h_n'(k_0r_3)\right]$$

$$=\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\sum_{n,m}p_{mn}\left[\frac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right] \tag{8.116}$$

至此已根据边界条件建立起完备的公式体系。过程是这样的:将各个区域电场和磁场的表达式代入边界条件,将方程化为关于球谐函数$\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)$的级数展开形式;由于$\{\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi)\}$是正交函数集,必须分别令它们的每个系数都为零,系数又是对级数的求和。总共得到 12 个方程,将方程联立求解,就能得到散射系数。

8.3.3　改写方程组为矩阵形式

前面导出的 12 个方程之间存在耦合,需要对它们进行适当的排列,将方程组改写成容易求解的矩阵形式。一组确定的$[n,m]$值就对应着一种电磁波模式,因此应将求和符号$\sum\limits_{n,m}$展开,进行模式匹配。如此一来,这 12 个方程都将裂变为若干个方程,裂变出来的方程数目由匹配的模式数决定。裂变出来的方程称为子方程,每个子方程中又涉及求和符号$\sum\limits_{q}$和$\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}$,其中$\sum\limits_{q}$是将两个特征波叠加,$\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}$是对角谱$(\theta_k,\varphi_k)$中的每个离散点进行求和。理清这些关系,在改写的时候才不会出错。另外,还必须搞清楚这 12 个方程的耦合关系。边界r_1导出的四个方程是关于待求量c_{1qst},c_{2qst},d_{2qst}的方程组;边界r_2导出的四个方程是关于待求量c_{2qst},d_{2qst},c_{3qst},d_{3qst}的方程组;边界r_3导出的四个方程是关于待求量c_{3qst},d_{3qst},p_{mn}^{s},q_{mn}^{s}的方程组。将 12 个方程联立写成矩阵形式后,这些待求量都占据着相应的位置。在列写r_1的四个方程时,未涉及的其他方程中的待求量,一律采取填零占位的方式。同样,在列写r_2,r_3的方程时,未涉及的待求量必须采取填零占位的方式。最后,得到方程组的矩阵形式[1]

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & * & * & * & * & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathrm{diag} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathbf{0} & \mathrm{diag}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathbf{0} & \mathrm{diag}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & * & * & \mathrm{diag} & \mathbf{0} \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{c}_{1qst}\\ \boldsymbol{c}_{2qst}\\ \boldsymbol{d}_{2qst}\\ \boldsymbol{c}_{3qst}\\ \boldsymbol{d}_{3qst}\\ \boldsymbol{p}_{mn}^{s}\\ \boldsymbol{q}_{mn}^{s}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ p_{mn}j_n(k_0r_3)\\ q_{mn}\left[\dfrac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right]\\ q_{mn}j_n(k_0r_3)\\ p_{mn}\left[\dfrac{j_n(k_0r_3)}{k_0r_3}+j_n'(k_0r_3)\right]\end{bmatrix}$$

式中，$\boldsymbol{c}_{1qst}$，$\boldsymbol{c}_{2qst}$，$\boldsymbol{d}_{2qst}$，$\boldsymbol{c}_{3qst}$，$\boldsymbol{d}_{3qst}$ 均是长度为 $2(S+1)(T+1)$ 的列向量；$\boldsymbol{p}_{mn}^{s}$，$\boldsymbol{q}_{mn}^{s}$ 是长度为 $h_{\max}$ 的列向量；* 代表非零子矩阵；**0** 代表零子矩阵。

$[n,m]$中的 n 和 m 之间存在关系 $n\in[0,N_{\max}]$，$m\in[-n,n]$。考虑到$[n,m]$之间的这种特殊关系，为简化问题的讨论，将采用简单的标记方法。对于每组确定的$[n,m]$都赋予对应的标记 h。h,m,n 三者之间的换算关系为 $h=n(n+1)+m$，每个 n 对应的 h 的值由不等式 $(n-1)(n+1)<h\leqslant n(n+2)$ 确定。关于 h,m,n 三者之间的对应关系，请参见表 8.2[1]。

表 8.2　h 与 (n,m) 的对应关系

n	m	h
1	−1	1
1	0	2
1	1	3
2	−2	4
2	−1	5
2	0	6
2	1	7
2	2	8
3	−3	9
3	−2	10
3	−1	11
3	0	12
3	1	13
3	2	14
3	3	15
⋮	⋮	⋮
$N_{\max}$	$N_{\max}$	$H_{\max}$

采用上述的标记方法，对于讨论问题和编程实现都十分方便。将 12 个方程按 h 标记方式裂变展开，矩阵的行数按 h 计算，矩阵的列数按 h,h' 计算。最后得到系数矩阵的维数为 $12H_{\max}$ 行、$2H_{\max}+10(S+1)(T+1)$ 列。

数值算例请参考相关文献[1]。使用电磁场的角谱积分表达式进行计算，矩阵的每个填充元素时都要进行一个双重积分的计算，这对于普通计算机来说是一个很大的时间和内存的开销。而利用波函数的简化理论，在计算系数矩阵的每个元素时既没有双重积分，也无循环的级数运算，只有矢量的点乘运算和特殊函数的计算，因而能够缩短运行时间，同时也能够节省有限的内存资源。

另外，基于本章的方法，可以继续求解 $n(n>3)$ 层各向异性球的电磁散射问题。求解各向异性颗粒的多体散射也非常方便。当然，随着 n 值的增大以及散射体数目的增加，计算的复杂度以及计算量都会成倍增加。波函数简化理论的优势就在于适合作 n 值较大的成层球的多体散射分析。

本章参考了相关学者的科研成果[26~40]，在此对他们表示由衷的感谢。

参 考 文 献

[1] 董志龙.各向异性三层球的电磁散射分析.杭州:杭州电子科技大学硕士学位论文,2006.

[2] 焦志伟.应用矢量波函数分析各向异性媒质球的电磁散射.杭州:杭州电子科技大学硕士学位论文,2005.

[3] 潘伟良.用简化波函数理论分析各向异性球壳的电磁散射.杭州:杭州电子科技大学硕士学位论文,2005.

[4] Eggimann W H. Scattering of a plane wave on a ferrite cylinder at normal incidence. IEEE Transactions on Microwave Theory Technology,1960,8(7):440~445.

[5] Palais J C. Radiation from a ferrite cylinder. Journal of Applied Physics,1964,35(3):779~781.

[6] Eaves R E. Electromagnetic scattering from a conducting circular cylinder covered with a circumferentially magnetized ferrite. IEEE Transactions on Antenna Propagation,1976,24(2): 190~197.

[7] Okamoto N. Scattering of obliquely incident plane waves from a finite periodic structure of ferrite cylinders. IEEE Transactions on Antenna Propagation,1979,27(3):317~323.

[8] Monzon J C,Damaskoa N J. Two-dimensional scattering by a homogeneous anisotropic rod. IEEE Transactions on Antenna Propagation,1986,34(10):1243~1249.

[9] Kalesinskas V,Konstantinov A,Shugurov V. Plane electromagnetic wave scattering by transversely magnetized ferrite cylinder. International Journal of Infrared and Millimeter, 1997, 18 (6): 1269~1279.

[10] Polycarpou C,Balanis C,Aberle J T,et al. Radiation and scattering from ferrite-tuned cavity backed slot antennas: theory and experiment. IEEE Transactions on Antenna Propagation,1998,46(9): 1297~1306.

[11] 杨利霞,葛德彪,郑奎松,等.电各向异性介质 FDTD 并行算法的研究.电波科学学报,2006,21(1): 43~48.

[12] Ren W. Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media. Physics on Review E,1993,47:664.

[13] Ren W. Spherical wave functions and dyadic Green's functions for homogeneous elastic anisotropic media. Physics on Review E,1993,47:4439.

[14] Ren W. Exact solutions of coupled-wave equations in piezoelectric solids. Journal of Mathematical Physics,1993,34:5376.

[15] Geng Y L,Wu X B. Analysis of electromagnetic scattering by a plasma anisotropic sphere. Radio Science,2003,38(6):1104~1115.

[16] 黄志洵.电磁理论研究的新方向.北京广播学院学报(自然科学版),1998,4.

[17] Kong J A.电磁波理论.北京:电子工业出版社,1984.

[18] Chen H C. Theory of Electromagnetic Waves: A Coordinate Free Approach. New York: McGraw-Hill,1983.

[19] 任伟,赵家升.电磁场与微波技术.北京:电子工业出版社,2005.

[20] Tsang L,Kong J A,Ding K H. Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications. New York: Wiley,2000.

[21] Ren W,Wu X B. Application of an eigenfunction representation to the scattering of a plane wave by an anisotropically coated circular cylinder. Journal of Physics D,1995,28:1031~1039.

[22] Chew W C. Waves of Fields in Inhomogeneous Media. New York: Nostrand Reimhold,1990.

[23] 任伟.均匀各向异性媒质的简化波函数理论.//第三届中国科协青年学术年会文集.北京:中国科

学技术出版社,1998.

[24] 任伟,焦志伟. 均匀各向异性媒质的简化波函数理论. 杭州电子科技大学学报,2004,24(3):1.

[25] Geng Y L, Wu X B, Li L W. Characterization of electromagnetic scattering by a plasma anisotropic spherical shell. IEEE Antennas and Wireless Propagation,2004,3:102.

[26] Lin Z F, Chui S T. Electromagnetic scattering by optically anisotropic magnetic particle. Physical Review E,2004,69(5).

[27] 王湃,周乐柱,谭云华,等. 不同吸波涂层对三维复杂目标的 RCS 影响的分析. 微波学报,2005,21(4):33～37.

[28] 江长荫. 均匀圆球对平面波的散射. 电波科学学报,1996,11(3):65～88.

[29] 盛新庆. 计算电磁学要论. 北京:科学出版社,2004.

[30] 倪光正. 工程电磁场数值计算. 北京:机械工业出版社,2004.

[31] 鲁述,徐鹏根. 电磁场边值问题解析方法. 武汉:武汉大学出版社,2005.

[32] 王竹溪,郭敦仁. 特殊函数概论. 北京:北京大学出版社,2000.

[33] 程云鹏,张凯院,徐仲. 矩阵论. 西安:西北工业大学出版社,1998.

[34] 何光渝,高永利. Visual Fortran 常用数值算法集. 北京:科学出版社,2000.

[35] Stratton J A. Electromagnetic Theory. New York:McGraw-Hill,1941.

[36] Harrington R F. Time-Harmonic Electromagnetic Fields. New York:McGraw-Hill,1961.

[37] 王一平. 电磁场与波理论基础. 西安:西安电子科技大学出版社,2000.

[38] Kong J A. 电磁波理论. 吴季等译. 北京:电子工业出版社,2003.

[39] John D Kraus, Ronald J Marhefka. 天线. 章文勋译. 北京:电子工业出版社,2004.

[40] Xu Y L. Scattering Mueller matrix of an ensemble of variously shaped small particles. Journal of Optical Socieity of America A,2003,20(11):2093～2105.

第九章　各向异性单层球弹性波散射分析

本章取材于肖刘琴的硕士学位论文[1]，本章由任伟和肖刘琴共同撰写，数值计算由肖刘琴独立完成[1]，任伟定稿。

20 世纪 70 年代初，随着各种大型重要构件的广泛应用，对超声波无损检验技术提出了更高的要求，不仅需要探测出构件中的缺陷，而且还要求能够确定缺陷的尺寸和性质，这就要求对超声波与缺陷的相互作用进行更加深入的研究[2]。因此，对于边界清晰的物体所产生的弹性波的高频散射与衍射的研究日益受到人们的重视。70 年代中期，人们以波函数展开式、积分方程和积分变换式解这些经典方法作为基础，对于球形和圆柱形的物体散射提出了解决办法[3~6]。半无限长条(刚硬的或者是空的)是抛物柱的退化情况，因此，弹性波在半无限长条($y=0, x\geqslant 0$ 的一个平面)上发生的散射，可以用韦伯函数(抛物波函数)来表示[7]。同样，有限长条($y=0, -b\leqslant x\leqslant b$)是椭圆柱的退化情况，因此，弹性波在其上的散射，可以应用 Mathieu 函数(椭圆柱函数)来分析[7]。但仅在低频和谐振区低端时，才可能近似地计算这些函数以及散射系数。对于任意形状物体引起的弹性波的散射，需要用其他方法，这些方法多数是声学和电磁学中已有方法的推广。例如过渡矩阵法($\boldsymbol{T}$ 矩阵法)。Waterman[8] 以及 Varadan[9] 和 Pao[10] 同时提出了弹性波散射的 $\boldsymbol{T}$ 矩阵法。此外，还有几何射线法、有限差分法、有限元法等[2]。

1993 年，作者在其系列论文[11~13]中导出了均匀各向异性介质的波函数，给出了经典物理学各领域的波动方程在圆柱和圆球坐标系下的严格级数解。这解的独到之处在于不用分离变量法，而采用角谱积分表达式，采用基于矢量球面波展开的角谱积分表达式展开整个理论。数值验证表明，应用均匀各向异性介质的本征波函数计算均匀各向异性球的电磁散射，结果正确，简捷高效[14~16]。研究弹性波散射的方法可借助于空气中的声波与电磁波的研究方法，所以，借助矢量波函数求解各向异性介质的弹性波散射是可以尝试的。

弹性波场和电磁场不同，对均匀各向异性介质而言，电磁场可以有两种特征波，而弹性波场有三种特征波。特征波的波数是波矢方向的函数，特征波的方向的变化规律也是波矢方向的函数[17]。借助矢量波函数求解各向异性介质的弹性波散射存在着一些关键技术问题，如各向同性和各向异性介质中的应力场法向表达，球的弹性散射截面的推导等。解决这些问题，将为求解均匀各向异性单层球的弹性波散射打下基础。

而各向异性介质波函数理论将为处理各向同性背景介质内的各向异性多粒子散射奠定基础。各向异性介质和弹性各向异性材料在毫米波器件、集成光电器件和声波器件中被广泛采用。

本章应用均匀各向异性介质的波函数理论，研究了均匀各向异性单层球的弹性波散射。本章中时谐因子取 $e^{-j\omega t}$。

9.1　无界均匀各向异性介质中的弹性波理论

本节基于本书第二卷第一章弹性波理论基础，介绍了弹性波方程的推导过程及其最终表达形式；接着，由圆球坐标系下的波动方程得到圆球波函数，介绍了本章中出现的特殊数学函数；然后，将本征平面波解用矢量球面波展开，给出了各向异性介质球波函数的一般定义；最后，结合矢量波函数的定义和本章的具体应用情况，给出了各向同性弹性介质球表面应力场的具体表达式。

本节许多内容在前文已有论述，但为了保证系统性和可读性，现再次论述，从不同角度对同一问题作分析，也是做学问的好方法。

9.1.1　弹性波方程

为了分析弹性介质内任一点的应力状态，即各个截面上应力的大小和方向，在这一点从介质中取出一个微小的长方体，它的边平行于坐标轴而长度为 $\Delta x,\Delta y,\Delta z$，如图 9.1 所示[17]。

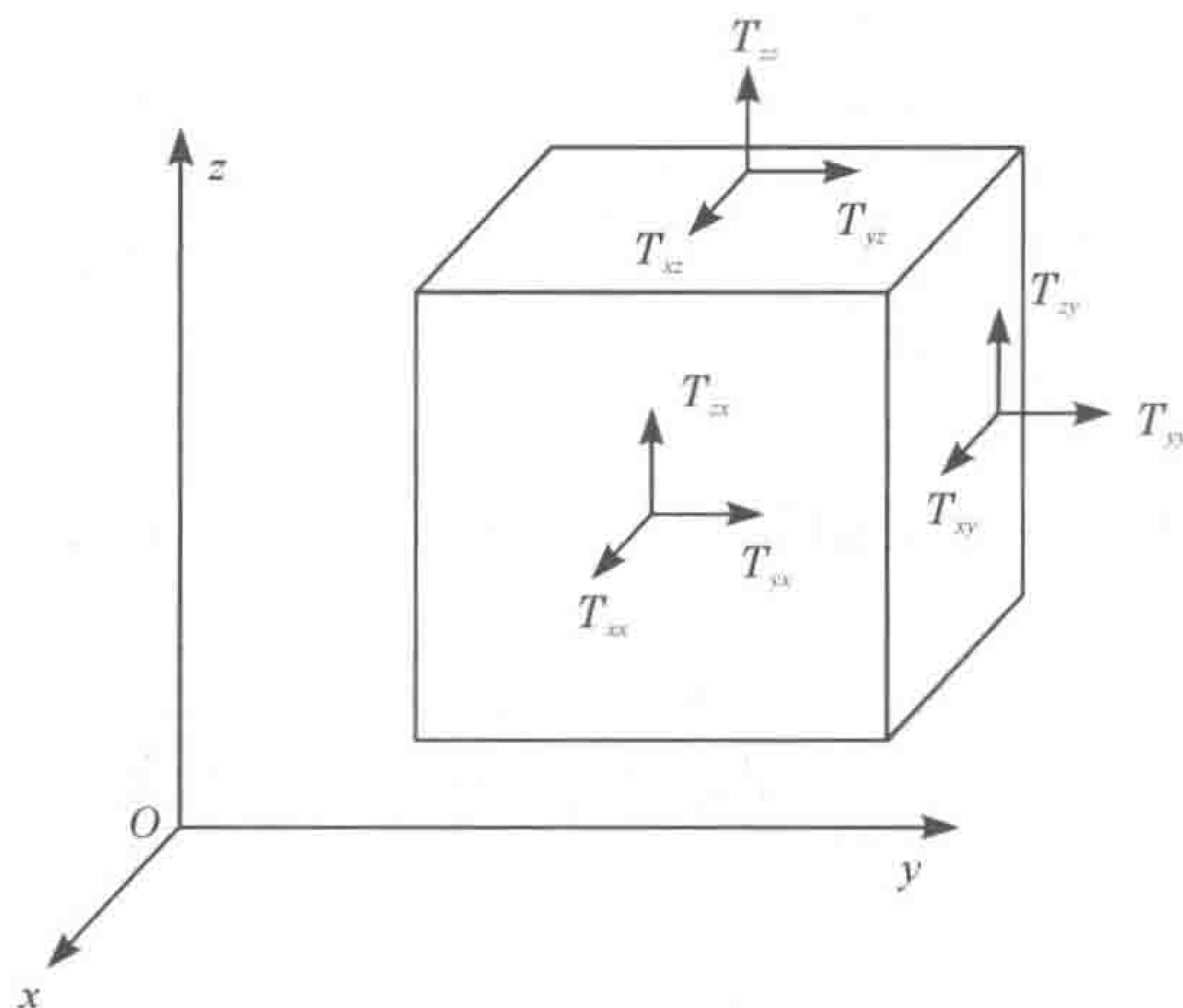


图 9.1　作用在无限小体积元表面上的应力

当弹性波在介质中传播时，小长方体以外的介质对它的每一个面上都作用着一个力。通常，这个作用力与小长方体的表面成任意角度，但总可以将这个作用力分解为一个正应力（与表面垂直）和两个切应力（与表面平行），分别与三个坐标轴平行。正应力用 T_{mm} $(m=x,y,z)$表示，例如，T_{xx}是作用在与 x 轴垂直的面上沿 x 轴方向的正应力。切应力用 $T_{ij}\,(i,j=x,y,x$ 且 $i\neq j)$表示，下标 i 表示力的分量，j 表示为垂直于表面的方向，例如，T_{xy}是作用在与 y 轴垂直的面上沿 x 轴方向的切应力。由于长方体是平衡的，六个切应力之间具有一定的互等关系：作用在两个互相垂直的面上并且垂直于该两个面交线的切应力是互等的（大小相等，正负号也相同），即 $T_{xy}=T_{yx}$，$T_{xz}=T_{zx}$，$T_{yz}=T_{zy}$，因此也可采用缩写下标表示应力为[18]

$$\boldsymbol{T}=\begin{bmatrix}T_{xx} & T_{xy} & T_{xz}\\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz}\\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{1} & T_{6} & T_{5}\\ T_{6} & T_{2} & T_{4}\\ T_{5} & T_{4} & T_{3}\end{bmatrix}\tag{9.1}$$

这样,就可以将应力写成六元直列矩阵,即

$$\boldsymbol{T}=[T_1,T_2,T_3,T_4,T_5,T_6]^{\mathrm{T}} \tag{9.2}$$

总之,物体的每一个点受到九个应力,最多只有六个是独立的。相应的有九个应变,也只有六个是独立的。

考虑一个任意形状的振动质点,其体积为 $\mathrm{d}V$,表面积为 $\mathrm{d}S$。与质点振动相关联的力为彻体力 $\boldsymbol{F}\mathrm{d}V$ 和由相邻质点作用在质点表面上的应力,由牛顿定律得[19]

$$\int_{\mathrm{d}S}\boldsymbol{T}\cdot\hat{\boldsymbol{n}}\mathrm{d}S+\int_{\mathrm{d}V}\boldsymbol{F}\mathrm{d}V=\int_{\mathrm{d}V}\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}\mathrm{d}V \tag{9.3}$$

式中,$\boldsymbol{u}$ 是质点位移场,单位为 m;$\boldsymbol{T}$ 是应力场,单位为 $\mathrm{N/m^2}$;ρ 是介质的平衡质量密度,单位为 $\mathrm{kg/m^3}$;$\boldsymbol{F}$ 是体力场,单位为 $\mathrm{N/m^3}$。如果质点的体积足够小($\mathrm{d}V\to0$),式中体积分的被积函数基本上是常数,对表面的积分部分使用散度表示为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{u}}{\partial t^2}-\boldsymbol{F} \tag{9.4}$$

这就是振动介质的平动运动方程。

应力使用缩写下标表示,在平面直角坐标系中,散度算子为

$$\nabla\cdot=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&0&0&0&\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial y}\\0&\frac{\partial}{\partial y}&0&\frac{\partial}{\partial z}&0&\frac{\partial}{\partial x}\\0&0&\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}&0\end{bmatrix} \tag{9.5}$$

应变 $\boldsymbol{S}$ 是描述单位物体形变的物理量。在线性形变条件下,可表示为位移的梯度[20],即

$$\boldsymbol{S}=\nabla_s\boldsymbol{u} \tag{9.6}$$

式中,应变使用缩写下标,在平面直角坐标系中,对称梯度算子为

$$\nabla_s=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x}&0&0\\0&\frac{\partial}{\partial y}&0\\0&0&\frac{\partial}{\partial z}\\0&\frac{\partial}{\partial z}&\frac{\partial}{\partial y}\\\frac{\partial}{\partial z}&0&\frac{\partial}{\partial x}\\\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial x}&0\end{bmatrix} \tag{9.7}$$

如果不使用质点位移场 $\boldsymbol{u}$,而用质点速度场 $\boldsymbol{v}$ 来表示弹性波方程,根据速度和位移的关系 $\boldsymbol{v}=\partial\boldsymbol{u}/\partial t$,可以将式(9.4)和式(9.6)改写得到无损耗弹性波方程的一阶微分形式

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\rho\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\boldsymbol{F}\\\nabla_s\boldsymbol{v}=\dfrac{\partial\boldsymbol{S}}{\partial t}\end{cases} \tag{9.8}$$

所以弹性波方程是牛顿运动定律和应变定义式的修正形式，表明了弹性波场中应力场和速度场之间的耦合关系，是弹性波场的支配方程。方程两边是对时间变量和空间变量的一阶偏微分。

物体的应变和应力之间存在一定的关系，根据广义虎克定律，在弹性介质中，应力和应变存在关系

$$\boldsymbol{T}=\boldsymbol{c}:\boldsymbol{S},\quad \boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}:\boldsymbol{T} \tag{9.9}$$

式中，$\boldsymbol{c}$ 为劲度矩阵；$\boldsymbol{s}$ 为顺度矩阵。$\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{s}$ 都是四阶张量。

使用关于顺度矩阵的本构关系，得到关于速度-应力的弹性波方程为

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{T}=\rho\dfrac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}-\boldsymbol{F}\\ \nabla_s\boldsymbol{v}=\boldsymbol{s}\dfrac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t}\end{cases} \tag{9.10}$$

9.1.2　Christoffel 方程

在电磁学中，求得平面波解的最有效的一种方法是：从 Maxwell 方程和本构关系中削去 $\boldsymbol{H}$ 或 $\boldsymbol{E}$，就能推出 $\boldsymbol{E}$ 场或 $\boldsymbol{H}$ 场的波方程。也就是说，用符号形式的场方程削去不必要的变量。同样，从弹性波方程和本构关系中任意削去 $\boldsymbol{T}$ 或 $\boldsymbol{v}$，也可推出弹性波的波动方程。在弹性波场中，通常是削去 $\boldsymbol{T}$，因为它包含六个场分量，而不像 $\boldsymbol{v}$ 只包含三个。

削去应力场的方法首先是将式(9.10)中的第一式对 t 进行微分得

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t}\right)=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}-\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t} \tag{9.11}$$

然后，将式(9.10)中的第二式乘以劲度系数得

$$\boldsymbol{c}:\nabla_s\boldsymbol{v}=\frac{\partial\boldsymbol{T}}{\partial t} \tag{9.12}$$

将式(9.12)代入式(9.11)，得到 $\boldsymbol{v}$ 的波方程

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{c}:\nabla_s\boldsymbol{v})=\rho\frac{\partial^2\boldsymbol{v}}{\partial t^2}-\frac{\partial\boldsymbol{F}}{\partial t} \tag{9.13}$$

用带缩写下标的矩阵形式表示，即

$$\nabla_{iK}c_{KL}\nabla_{Lj}v_j=\rho\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}-\frac{\partial F_i}{\partial t} \tag{9.14}$$

式中，微分算符 ∇_{iK} 和 ∇_{Lj} 矩阵已分别由式(9.5)和式(9.7)定义过了。

在无源区($\boldsymbol{F}=0$)，沿着方向

$$\hat{\boldsymbol{l}}=\hat{\boldsymbol{x}}l_x+\hat{\boldsymbol{y}}l_y+\hat{\boldsymbol{z}}l_z \tag{9.15}$$

传播的均匀平面波具有正比于 $\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-k\hat{\boldsymbol{l}}\cdot\boldsymbol{r})}$ 的场，在这种情形，式(9.14)中的 ∇_{iK} 和 ∇_{Lj} 可以用 $-\mathrm{j}k_{iK}$ 和 $-\mathrm{j}k_{Lj}$ 替代，其中

$$-\mathrm{j}k_{iK}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}l_{iK}\rightarrow-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\begin{bmatrix}l_x&0&0&0&l_z&l_y\\0&l_y&0&l_z&0&l_x\\0&0&l_z&l_y&l_x&0\end{bmatrix} \tag{9.16}$$

$$-\mathrm{j}k_{Lj}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}l_{Lj}=-\mathrm{j}\boldsymbol{k}\begin{bmatrix}l_x & 0 & 0\\ 0 & l_y & 0\\ 0 & 0 & l_z\\ 0 & l_z & l_y\\ l_z & 0 & l_x\\ l_y & l_x & 0\end{bmatrix}\tag{9.17}$$

于是,波方程(9.14)在 $\boldsymbol{F}=0$ 的情形化为

$$(-\mathrm{j}\boldsymbol{k}l_{iK})c_{KL}(-\mathrm{j}\boldsymbol{k}l_{Lj})v_j=\rho\mathrm{j}^2\omega^2 v_i\tag{9.18}$$

进一步化简为

$$\boldsymbol{k}^2 l_{iK}c_{KL}l_{Lj}v_j=\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{\Gamma}_{ij}v_j=\rho\omega^2 v_i\tag{9.19}$$

式(9.19)称作 Christoffel 方程,等式左边的矩阵

$$\boldsymbol{\Gamma}_{ij}=l_{iK}c_{KL}l_{Lj}\tag{9.20}$$

称作 Christoffel 矩阵。它的矩阵元只是平面波传播方向和介质劲度常数的函数。将式(9.19)写成矩阵形式

$$\boldsymbol{k}^2\begin{bmatrix}\alpha & \delta & \varepsilon\\ \delta & \beta & \xi\\ \varepsilon & \xi & \gamma\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_x(\boldsymbol{k})\\ V_y(\boldsymbol{k})\\ V_z(\boldsymbol{k})\end{bmatrix}=\rho\omega^2\begin{bmatrix}V_x(\boldsymbol{k})\\ V_y(\boldsymbol{k})\\ V_z(\boldsymbol{k})\end{bmatrix}\tag{9.21}$$

式中

$$\begin{cases}\alpha=c_{11}l_x^2+c_{66}l_y^2+c_{55}l_z^2+2c_{16}l_xl_y+2c_{15}l_xl_z+2c_{56}l_zl_y\\ \beta=c_{66}l_x^2+c_{22}l_y^2+c_{44}l_z^2+2c_{26}l_xl_y+2c_{46}l_xl_z+2c_{24}l_zl_y\\ \gamma=c_{55}l_x^2+c_{44}l_y^2+c_{33}l_z^2+2c_{45}l_xl_y+2c_{35}l_xl_z+2c_{34}l_zl_y\\ \delta=c_{16}l_x^2+c_{26}l_y^2+c_{45}l_z^2+(c_{12}+c_{66})l_xl_y+(c_{14}+c_{56})l_xl_z+(c_{46}+c_{25})l_zl_y\\ \varepsilon=c_{15}l_x^2+c_{46}l_y^2+c_{35}l_z^2+(c_{14}+c_{56})l_xl_y+(c_{13}+c_{55})l_xl_z+(c_{36}+c_{45})l_zl_y\\ \xi=c_{56}l_x^2+c_{24}l_y^2+c_{34}l_z^2+(c_{46}+c_{25})l_xl_y+(c_{36}+c_{45})l_xl_z+(c_{23}+c_{44})l_zl_y\end{cases}\tag{9.22}$$

9.1.3 标量波函数

圆球坐标系中的齐次标量波动方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}+k^2\psi=0\tag{9.23}$$

令 $\psi=R(r)H(\theta)\Phi(\varphi)$,代入式(9.23),应用分离变量法得

$$\begin{cases}r^2\dfrac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}r^2}+2r\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+[k^2r^2-n(n+1)]R=0\\ \dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\theta}\right)+\left[n(n+1)-\dfrac{m^2}{\sin^2\theta}\right]H=0\\ \dfrac{\mathrm{d}^2\Phi}{\mathrm{d}\varphi^2}+m^2\Phi=0\end{cases}\tag{9.24}$$

式中,n,m 为分离常数。由于场量在空间任意点必为单值,分离常数的选取必须符合物理限制。$\Phi(\varphi)$方程是熟知的谐方程,产生 $h(m\varphi)$解。

$R(r)$方程和 Bessel 方程紧密相关,其解称为球 Bessel 函数,用 $b_l(kr)$表示,它和普通 Bessel 函数有关系

$$b_n(kr) = \sqrt{\frac{\pi}{2kr}} B_{n+\frac{1}{2}}(kr) \tag{9.25}$$

球 Bessel 函数有四类: $j_n(kr)$, $y_n(kr)$表示球面驻波; $h_n^{(1)}(kr)$表示外行球面波, $h_n^{(2)}(kr)$表示内行球面波。

$H(\theta)$方程和勒让德方程有关,其解称为连带勒让德函数,一般以 $L_n^m(\cos\theta)$表示为

$$L_n^m(\cos\theta) \sim P_n^m(\cos\theta), Q_n^m(\cos\theta) \tag{9.26}$$

式中, $P_n^m(\cos\theta)$是第一类连带勒让德函数; $Q_n^m(\cos\theta)$是第二类连带勒让德函数。函数 $P_n^m(\cos\theta)$在 $\theta=0,\pi$ 处取有限的值,而 $Q_n^m(\cos\theta)$在 $\theta=0,\pi$ 有奇异点。在 $r=0$ 为有限值的球 Bessel 函数只有 $j_n(kr)$。因此表示球内有限场的基本波函数为

$$\psi = j_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{9.27}$$

要表示球外的有限场,必须选择外向行波,可取基本波函数为

$$\psi = h_n^{(1)}(kr) P_n^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{9.28}$$

照样,可以由基本波函数的叠加表示任意波场为

$$\psi = \sum_{mn} C_{bn} b_n(kr) P_n^m(\cos\theta) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{9.29}$$

9.1.4 矢量波函数

由前述的标量波函数可构造出矢量波函数,在计算球形边界的弹性波场边值问题时,采用矢量波函数非常方便。矢量波函数由 Hansen 提出,后来 Waterman 建立了声波、电磁波、弹性波散射的 $\boldsymbol{T}$ 矩阵理论,后经多人发展,在 20 世纪 80 年代初已形成比较系统的理论,使得矢量波函数成为计算波场与材料相互作用的有力工具[21]。黄志洵等对矢量波函数也作过精辟的论述[22]。

球矢量波函数 $\boldsymbol{M},\boldsymbol{N},\boldsymbol{L}$ 定义为

$$\begin{cases} \boldsymbol{M}_{mn}^{(i)}(\boldsymbol{kr},\theta,\varphi) = b_n^{(i)}(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{N}_{mn}^{(i)}(\boldsymbol{kr},\theta,\varphi) = n(n+1)\dfrac{b_n^{(i)}(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi) + \left[b_n'^{i}(\boldsymbol{kr}) + \dfrac{b_n^{(i)}(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\right]\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \\ \boldsymbol{L}_{mn}^{(i)}(\boldsymbol{kr},\theta,\varphi) = b_n'^{i}(\boldsymbol{kr})\boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi) + \dfrac{b_n^{(i)}(\boldsymbol{kr})}{\boldsymbol{kr}}\boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) \end{cases} \tag{9.30}$$

式中, $i=1,2,3,4$,分别表示第 i 类矢量球波函数。从式(9.30)可以看出 $\boldsymbol{M}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{L}$ 由径向函数 $b_n(kr)$和球谐函数 $\boldsymbol{P}_{mn}$, $\boldsymbol{B}_{mn}$, $\boldsymbol{C}_{mn}$ 构成。式中的球谐函数定义为

$$\begin{cases} \boldsymbol{P}_{mn}(\theta,\varphi) = \hat{\boldsymbol{r}} P_n^m(\cos\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \\ \boldsymbol{B}_{mn}(\theta,\varphi) = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\dfrac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta} + \hat{\boldsymbol{\varphi}}\dfrac{\mathrm{j}m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta)\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \\ \boldsymbol{C}_{mn}(\theta,\varphi) = \left[\hat{\boldsymbol{\theta}}\dfrac{\mathrm{j}m}{\sin\theta}P_n^m(\cos\theta) - \hat{\boldsymbol{\varphi}}\dfrac{\mathrm{d}P_n^m(\cos\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \end{cases} \tag{9.31}$$

而相应的 $b_n^{(i)}(\boldsymbol{kr})$为

$$b_n^{(i)}(\boldsymbol{kr})=\begin{cases}j_n(\boldsymbol{kr}),i=1\\y_n(\boldsymbol{kr}),i=2\\j_n(\boldsymbol{kr})+\mathrm{j}y_n(\boldsymbol{kr}),i=3\\j_n(\boldsymbol{kr})-\mathrm{j}y_n(\boldsymbol{kr}),i=4\end{cases}\tag{9.32}$$

矢量波函数分别满足矢量波动方程$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{M}-\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{M}=0$,$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{N}-\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{N}=0$,$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{L})+\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{L}=0$。

矢量波函数有性质:$\nabla\times\boldsymbol{M}=\boldsymbol{kN}$,$\nabla\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{kM}$;由于$\nabla\times\boldsymbol{M}\neq0$,$\nabla\times\boldsymbol{N}\neq0$,$\nabla\cdot\boldsymbol{M}=0$,$\nabla\cdot\boldsymbol{N}=0$,$\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{N}$是旋度场;由于$\nabla\cdot\boldsymbol{L}=\nabla\cdot\nabla\psi$,$\nabla\times\boldsymbol{L}=0$,$\boldsymbol{L}$是散度场。

9.1.5　各向异性弹性介质的本征平面波解[17,23]

均匀各向异性介质的平面波解是计算各向异性介质弹性波散射的关键,也是难点所在。在求得平面波解的基础上,利用均匀各向异性介质波函数理论,可以得到球体或柱体的各向异性介质的弹性波散射解。下面详细阐述如何导出无界均匀各向异性介质中的本征平面波解。

各向异性介质的劲度矩阵为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}c_{11}&c_{12}&c_{13}&c_{14}&c_{15}&c_{16}\\c_{21}&c_{22}&c_{23}&c_{24}&c_{25}&c_{26}\\c_{31}&c_{32}&c_{33}&c_{34}&c_{35}&c_{36}\\c_{41}&c_{42}&c_{43}&c_{44}&c_{45}&c_{46}\\c_{51}&c_{52}&c_{53}&c_{54}&c_{55}&c_{56}\\c_{61}&c_{62}&c_{63}&c_{64}&c_{65}&c_{66}\end{bmatrix}\tag{9.33}$$

已知弹性波的波动方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{C}:\nabla_s\boldsymbol{V}-\rho\omega^2\boldsymbol{V}=0\tag{9.34}$$

式中,$\boldsymbol{C}$为劲度矩阵;ρ为介质密度;ω为弹性波频率。

为求得波动方程的平面波解,假设$\boldsymbol{V}$的形式为[17]

$$\boldsymbol{V}=\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\tag{9.35}$$

式中,$\boldsymbol{k}=(r,\theta_k,\varphi_k)$为平面波的波矢;$\boldsymbol{r}=(r,\theta,\varphi)$为径向矢量。且有

$$\boldsymbol{k}=(k_x,k_y,k_z)=(k(\theta_k,\varphi_k),\theta_k,\varphi_k)$$

$$\begin{cases}k_x=k(\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\cos\varphi_k\\k_y=k(\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\sin\varphi_k\\k_z=k(\theta_k,\varphi_k)\cos\theta_k\end{cases}\tag{9.36}$$

将式(9.35)代入式(9.34),则在式(9.34)中,有

$$\nabla\cdot=\mathrm{j}\boldsymbol{k}_{iK},\nabla_s=\mathrm{j}\boldsymbol{k}_{Lj}\tag{9.37}$$

式中

$$\boldsymbol{k}_{iK}=k\begin{bmatrix}\sin\theta_k\cos\varphi_k&0&0&0&\cos\theta_k&\sin\theta_k\sin\varphi_k\\0&\sin\theta_k\sin\varphi_k&0&\cos\theta_k&0&\sin\theta_k\cos\varphi_k\\0&0&\cos\theta_k&\sin\theta_k\sin\varphi_k&\sin\theta_k\cos\varphi_k&0\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{k}_{Lj}=k\begin{bmatrix}\sin\theta_k\cos\varphi_k & 0 & 0\\ 0 & \sin\theta_k\sin\varphi_k & 0\\ 0 & 0 & \cos\theta_k\\ 0 & \cos\theta_k & \sin\theta_k\sin\varphi_k\\ \cos\theta_k & 0 & \sin\theta_k\cos\varphi_k\\ \sin\theta_k\sin\varphi_k & \sin\theta_k\cos\varphi_k & 0\end{bmatrix} \tag{9.38}$$

将式(9.37)代入式(9.34)，整理化简之后，可以得到[17]

$$[\boldsymbol{k}^2\boldsymbol{k}_{iK}C_{KL}\boldsymbol{k}_{Lj}-\rho\omega^2]\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k})=\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k})=0 \tag{9.39}$$

式中

$$\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)=\begin{bmatrix}G_{11}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{12}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{13}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{21}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{22}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{31}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{32}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{33}(k,\theta_k,\varphi_k)\end{bmatrix}$$

式(9.39)是关于 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k})$ 的本征值问题。令 $\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)$ 的行列式为零，可以得到特征波数 $k(\theta_k,\varphi_k)$ 的六次方程

$$\begin{aligned}&-\lambda^3+(\alpha+\beta+\gamma)\lambda^2-\lambda(\alpha\gamma+\beta\gamma+\alpha\beta-\varepsilon^2-\delta^2-\xi^2)\\&+(\alpha\beta\gamma+2\delta\varepsilon\xi-\alpha\xi^2-\beta\varepsilon^2-\gamma\delta^2)=0\end{aligned} \tag{9.40}$$

式中，$\lambda=\rho\omega^2/k^2$，$\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\xi$ 已在式(9.22)定义过。式(9.40)的根即特征波数，本来有六个，舍弃实部为负的根后剩下三个根。特征波数是 (θ_k,φ_k) 的函数。这里波数 k 已经对 ω 作了归一化。在各向异性介质中，特征波数是传播方向的函数，下面给出具体例子。

立方晶体金刚石的参数为 $c_{11}=102\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$，$c_{44}=49.2\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$，$c_{12}=25\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$，$\rho=3512\mathrm{kg/m^3}$。根据计算结果，特征波数的平面图和空间分布如图 9.2 所示。

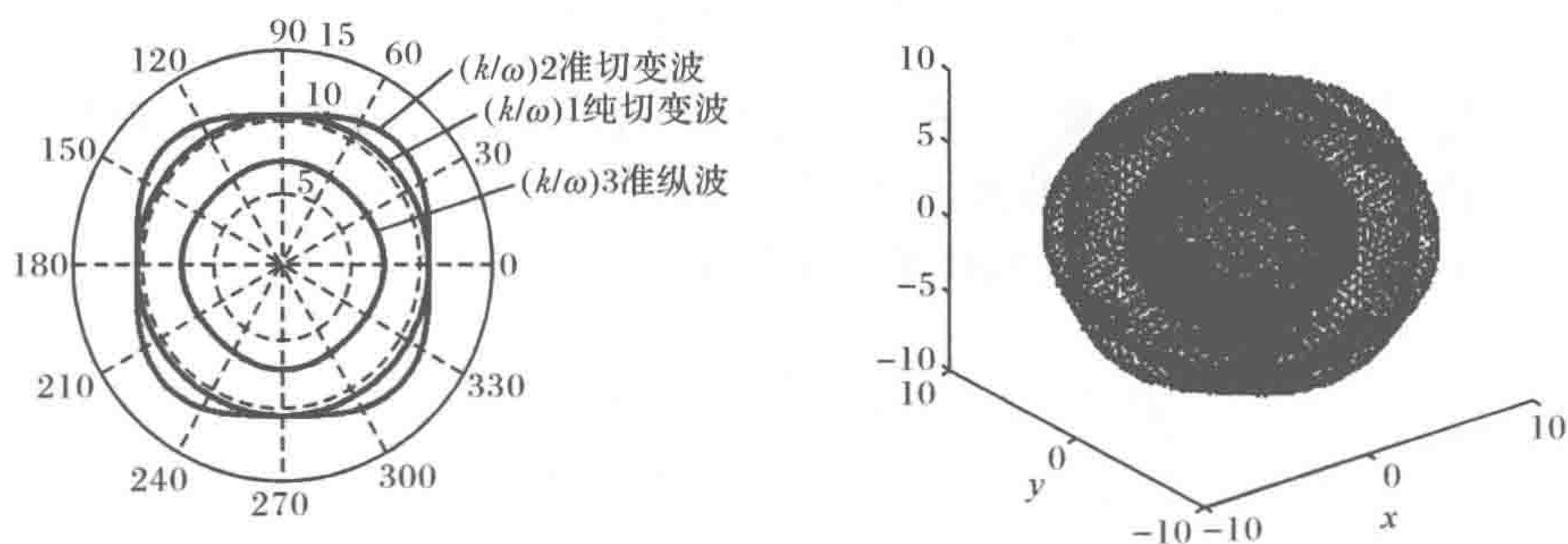


图 9.2　立方晶体金刚石的特征波数的平面图和空间分布图

由于 $\boldsymbol{G}(\theta_k,\varphi_k)$ 是一个 3×3 的矩阵，故上述方程会有三个本征值和本征矢量。因此，其通解为[17,23]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k})=\sum_{n=1}^{3}C_n(\boldsymbol{k})\boldsymbol{V}_n(\theta_k,\varphi_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.41}$$

式中

$$\boldsymbol{V}_n(\theta_k,\varphi_k)=V_{nx}(\theta_k,\varphi_k)\hat{\boldsymbol{x}}+V_{ny}(\theta_k,\varphi_k)\hat{\boldsymbol{y}}+V_{nz}(\theta_k,\varphi_k)\hat{\boldsymbol{z}}$$

$$V_{nx}(\theta_k,\varphi_k):V_{ny}(\theta_k,\varphi_k):V_{nz}(\theta_k,\varphi_k)=\begin{vmatrix}G_{22}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{32}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{33}(k,\theta_k,\varphi_k)\end{vmatrix}$$
$$:-\begin{vmatrix}G_{21}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{23}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{31}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{33}(k,\theta_k,\varphi_k)\end{vmatrix}$$
$$:\begin{vmatrix}G_{21}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{22}(k,\theta_k,\varphi_k)\\ G_{31}(k,\theta_k,\varphi_k) & G_{32}(k,\theta_k,\varphi_k)\end{vmatrix}$$

根据式(9.6),很容易推导出应力场为[18]

$$\boldsymbol{T}_n=\sum_{n=1}^{3}-C_{KL}l_{Lj}V_{jn}\boldsymbol{k}/\omega \tag{9.42}$$

波进入各向异性介质后,立即分解为介质能够维持的特征波的叠加。特征波的波数是波矢方向的函数,特征波的方向的变化规律也是波矢方向的函数[17]。而在各向同性介质中波数沿任何方向都一样,特征波的场亦不会随波矢方向变化。

9.1.6 本征平面波解的球波函数展开

考察各向异性球中的速度场,取速度场 $\boldsymbol{V}$ 的三维傅里叶变换[11~13]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\boldsymbol{V}(\boldsymbol{k}) \tag{9.43}$$

式中,$\boldsymbol{k}=k_x\hat{\boldsymbol{x}}+k_y\hat{\boldsymbol{y}}+k_z\hat{\boldsymbol{z}}$。各向异性介质内,存在着三个特征波,因而,根据式(9.43),可得出速度场在各向异性介质球内的本征角谱积分表达为[11~13]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k\boldsymbol{k}_n\sin\theta_kV_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_jC_n(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.44}$$

对于应力场,则有[11~13]

$$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta_k\boldsymbol{k}_n\sin\theta_kT_{ijn}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_jC_n(\boldsymbol{k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}} \tag{9.45}$$

式中,$\hat{\boldsymbol{e}}_j$ 是第 j 方向的单位矢量,例如 $\hat{\boldsymbol{e}}_1=\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{e}}_2=\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{e}}_3=\hat{\boldsymbol{z}}$;$C_n(\boldsymbol{k})$是待定振幅函数;$\boldsymbol{k}_n$,$V_{jn}$,$T_{ijn}$分别为第 n 个本征波的波数,速度场的分量,应力场的分量。

将待定振幅函数用正交完备的球面谐函数展开为[11~13]

$$C_n(\boldsymbol{k})=\sum_{l'=0}^{\infty}\sum_{m'=-l'}^{+l'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k} \tag{9.46}$$

为了得到均匀各向异性弹性介质内的矢量波函数,用并矢平面波展开为[11~13]

$$I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}}=\sum_{l,m}a_{lm}\{-\mathrm{j}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$$
$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}(k_n\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\} \tag{9.47}$$

式中,$a_{lm}=\mathrm{j}^l(2l+1)\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}$对于空间的任意径向位置,该展开式都是收敛的。所以[11~13]

$$V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}}=V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_n\cdot\boldsymbol{r}}$$
$$=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}a_{lm}\{-\mathrm{j}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})-\mathrm{j}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\Big\}\tag{9.48}$$

式中，$\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$为矢量球谐函数；$\boldsymbol{M}_{lm}$，$\boldsymbol{N}_{lm}$，$\boldsymbol{L}_{lm}$为球矢量波函数，它们的定义见式(9.30)。

将式(9.48)、式(9.46)代入式(9.44)，得到[11~13]

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{l,m}a_{lm}\{-\mathrm{j}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$$
$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})-\mathrm{j}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\tag{9.49}$$

在球面上，应力场要求法向连续，则球面上的应力场表达为[11~13]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{r})&=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{T}(\boldsymbol{r})\\&=\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{lm}a_{lm}\{-\mathrm{j}T_{ijn}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[T_{ijn}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\\&\quad-\mathrm{j}T_{ijn}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\end{aligned}\tag{9.50}$$

观察式(9.50)，为了降低计算复杂度，提高计算效率，此处对 $\hat{\boldsymbol{r}}$ 这一算符进行富于技巧的数学处理，这是任伟的一个创造，对于最后结果的简化有大的作用，通常是谱域用空域表达，这里是空域用谱域表达，肖刘琴细化了作者的这一思想。得到最终表达式为

$$\hat{\boldsymbol{r}}=-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\left(\hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}_n}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\frac{1}{\boldsymbol{k}_n}\frac{\partial}{\partial\theta_k}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k\frac{1}{\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k}\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)\tag{9.51}$$

将式(9.51)代入式(9.50)，将式(9.50)中的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j(i,j=1,2,3;\hat{\boldsymbol{e}}_1=\hat{\boldsymbol{x}},\hat{\boldsymbol{e}}_2=\hat{\boldsymbol{y}},\hat{\boldsymbol{e}}_3=\hat{\boldsymbol{z}})$ 和式(9.51)中的单位矢量 $\hat{\boldsymbol{k}},\hat{\boldsymbol{\theta}}_k,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k$ 化为同一种坐标下，经过计算整理得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_r(\boldsymbol{r})&=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\&\quad\times\sum_{lm}a_{lm}\Big\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\\&\quad+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\\&\quad-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\Big]\Big\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\end{aligned}\tag{9.52}$$

式中，$\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)$的表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)&=\left(\hat{\boldsymbol{k}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}_n}+\hat{\boldsymbol{\theta}}_k\frac{1}{\boldsymbol{k}_n}\frac{\partial}{\partial\theta_k}+\hat{\boldsymbol{\varphi}}_k\frac{1}{\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k}\frac{\partial}{\partial\varphi_k}\right)\cdot\sum_{n=1}^{3}T_{ijn}\hat{\boldsymbol{e}}_i\hat{\boldsymbol{e}}_j\\&=\sum_{n=1}^{3}\Big\{\hat{\boldsymbol{e}}_x\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}_n}[T_{11n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\cos\varphi_k\\&\quad+2T_{12n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\sin\varphi_k+2T_{13n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\cos\theta_k]\end{aligned}$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}_n}[2T_{12n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\cos\varphi_k$$

$$+T_{22n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\sin\varphi_k+2T_{23n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\cos\theta_k]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}_n}[2T_{13n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\cos\varphi_k$$

$$+2T_{23n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\sin\theta_k\sin\varphi_k+T_{33n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\cos\theta_k]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{1}{\boldsymbol{k}_n}\Big[\cos\theta_k\cos\varphi_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{11n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)$$

$$+2\cos\theta_k\sin\varphi_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{12n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)-2\sin\theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{13n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\Big]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{1}{\boldsymbol{k}_n}\Big[2\cos\theta_k\cos\varphi_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{12n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)$$

$$+\cos\theta_k\sin\varphi_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{22n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)-2\sin\theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{23n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\Big]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{1}{\boldsymbol{k}_n}\Big[2\cos\theta_k\cos\varphi_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{13n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)$$

$$+2\cos\theta_k\sin\varphi_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{23n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)-\sin\theta_k \frac{\partial}{\partial\theta_k}T_{33n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\Big]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_x \frac{1}{\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k}\Big[-\sin\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k}T_{11n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)+2\cos\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k}T_{12n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\Big]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_y \frac{1}{\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k}\Big[-2\sin\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k}T_{12n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)+\cos\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k}T_{22n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\Big]$$

$$+\hat{\boldsymbol{e}}_z \frac{1}{\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k}\Big[-2\sin\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k}T_{13n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)+2\cos\varphi_k \frac{\partial}{\partial\varphi_k}T_{23n}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\Big]\Big\} \tag{9.53}$$

式(9.49)、式(9.52)就是满足弹性波波动方程的各向异性球的速度场和应力场(法向)的解。由于四类球 Bessel 函数满足同样的方程和递推关系,将式中的 $\boldsymbol{M}_{lm},\boldsymbol{N}_{lm},\boldsymbol{L}_{lm}$ 替换为第二、三、四类球矢量波函数,得到的解也满足弹性波波动方程。由此得到各向异性介质四类球波函数的定义为

$$\boldsymbol{V}^i(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{l,m}[\alpha_{nlm}\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$$

$$+\beta_{nlm}\boldsymbol{N}_{lm}^{i}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})+\gamma_{nlm}\boldsymbol{L}_{lm}^{i}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k,\quad i=1,2,3,4 \tag{9.54}$$

$$\boldsymbol{T}_r^{(i)}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\sum_{l,m}[\alpha'_{nlm}\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$$

$$+\beta'_{nlm}\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})+\gamma'_{nlm}\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k,\quad i=1,2,3,4 \tag{9.55}$$

式(9.51)、式(9.52)中,球矢量波函数的系数为

$$\begin{cases}\alpha_{nlm}=\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}a_{lm}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\\ \beta_{nlm}=-\dfrac{\mathrm{j}}{\sqrt{l(l+1)}}a_{lm}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\\ \gamma_{nlm}=-a_{lm}\mathrm{j}V_{jn}\hat{\boldsymbol{e}}_j\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\end{cases} \tag{9.56}$$

$$\begin{cases}\alpha'_{nlm}=-\dfrac{\mathrm{j}}{r\sqrt{l(l+1)}}a_{lm}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\\ \beta'_{nlm}=-\dfrac{1}{r\sqrt{l(l+1)}}a_{lm}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\\ \gamma'_{nlm}=-\dfrac{1}{r}a_{lm}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\end{cases} \tag{9.57}$$

式中，$a_{lm}=\mathrm{j}^l(2l+1)(l-m)!/(l+m)!$；$\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)$为矢量球谐函数；$\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}$为第 i 类球矢量波函数。从式(9.56)和式(9.57)可以明显看出，当各向异性介质的参数给定以后，各向异性球的波函数解也就相应地确定了。

9.1.7　各向同性弹性介质球表面的应力场表达

由于本章要求解的各向异性弹性成层球的弹性波散射的背景空间是各向同性弹性介质，故如何正确表达各向同性弹性介质球表面的应力场是相当重要的问题。文献[24]，已经直接给出各向同性弹性介质球表面的应力场表达式

$$\boldsymbol{T}_r=\lambda\hat{\boldsymbol{r}}\ \nabla\cdot u+\mu\hat{\boldsymbol{r}}(\nabla\boldsymbol{u}+\widetilde{\nabla\boldsymbol{u}}) \tag{9.58}$$

式中，$\lambda=c_{12}$，$\mu=c_{44}$，c_{12}和 c_{44}为劲度矩阵中的分量。

在处理各向同性弹性介质的边界问题时，可以把弹性波分为纵波 $\boldsymbol{L}$(波数为 $k_c=\omega\sqrt{\rho/(\lambda+2\mu)}$)和切变波 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{N}$(波数为 $k_s=\omega\sqrt{\rho/\mu}$)来分析，即位移场 $\boldsymbol{u}$ 可以表示成[25]

$$\boldsymbol{u}=\sum[\boldsymbol{L}(k_c\boldsymbol{r})+\boldsymbol{M}(k_s\boldsymbol{r})+\boldsymbol{N}(k_s\boldsymbol{r})] \tag{9.59}$$

由此得出，可以将波分为纵波 $\boldsymbol{L}(k_c\boldsymbol{r})$和切变波 $\boldsymbol{M}(k_s\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}(k_s\boldsymbol{r})$，将其分别代入式(9.58)，分步求得各向同性弹性介质球表面法向的应力场表达式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{rL}(k_c\boldsymbol{r})=&\frac{1}{k_c}\left[-\lambda k_c^2b_l^{(i)}(k_cr)+2\mu\frac{\partial^2b_l^{(i)}(k_cr)}{\partial r^2}\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\\&+\frac{2\mu}{k_cr}\left[\frac{\partial b_l^{(i)}(k_cr)}{\partial r}-\frac{1}{r}b_l^{(i)}(k_cr)\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\end{aligned} \tag{9.60}$$

$$\boldsymbol{T}_{rM}(k_s\boldsymbol{r})=\mu\left[\frac{\partial b_l^{(i)}(k_sr)}{\partial r}-\frac{b_l^{(i)}(k_sr)}{r}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) \tag{9.61}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{rN}(k_s\boldsymbol{r})=&\frac{2\mu l(l+1)}{k_s}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{b_l^{(i)}(k_sr)}{r}\right]\\&+\frac{\mu}{k_s}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r^2}b_l^{(i)}(k_sr)+\frac{\partial^2[b_l^i(k_sr)]}{\partial r^2}\right\}\end{aligned} \tag{9.62}$$

式(9.60)～(9.62)与文献[24]给出的具体表达式不同，是因为本章中矢量波函数 $\boldsymbol{L}(k_c\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}(k_s\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}(k_s\boldsymbol{r})$的定义和文献[24]不同。

将式(9.60)～(9.62)应用到本章的具体情况中，根据位移场 $\boldsymbol{u}=A\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t-\boldsymbol{kl}\cdot\boldsymbol{r})}$，可以得出速度与位移的关系

$$\boldsymbol{u}=\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\boldsymbol{V} \tag{9.63}$$

而对于作为背景(球外)的各向同性弹性介质来说，此时的法向为

$$\hat{\boldsymbol{n}}=-\hat{\boldsymbol{r}} \tag{9.64}$$

假设入射场的速度场为

$$\boldsymbol{V}^{\mathrm{inc}}(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[aA_{lm}^{i}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB_{lm}^{i}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC_{lm}^{i}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{9.65}$$

式中,a,b 表示控制参数。当 $a=1$,$b=0$ 时,$\boldsymbol{V}^{\mathrm{inc}}$表示平面 S 波入射的入射速度场;当 $a=0$,$b=1$ 时,$\boldsymbol{V}^{\mathrm{inc}}$表示平面 P 波入射的入射速度场。联合式(9.58)、式(9.63)～(9.65),可以得到球表面法向的入射应力场为

$$\boldsymbol{T}_{r}^{\mathrm{inc}}=-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[aA_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{9.66}$$

$\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}$,$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}$,$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}$的表达式已在式(9.60)～(9.62)中给出。散射场的球表面法向的应力场同理可推。

9.2　有界均匀各向异性单层球弹性波散射的角谱积分方法

由于各向异性弹性介质的劲度常数以张量的形式出现,因此对解偏微分方程十分有效的分离变量法不再适用,均匀各向异性介质中的齐次波动方程在圆球坐标系下的解析解导出十分困难。文献[11]～[13]提出的均匀各向异性介质波函数理论所给出的解析法,其独到之处在于不用分离变量法,而采用基于矢量球面波展开的角谱积分表达式展开整个理论。解的正确性已在二维圆柱的电磁散射情形得到验证[26]。根据电磁波和弹性波的相似性,这里将其推广应用于一层各向异性球体弹性波散射的计算。

各向异性介质球波函数的角谱积分表达式具有重要应用价值。本节将基于各向异性弹性介质球波函数的角谱积分表达式,推导、建立计算各向异性单层球弹性波散射的公式体系。

9.2.1　物理模型

如图 9.3、图 9.4 所示,均匀各向异性单层球位于各向同性背景空间中,整个球体受到一个弹性平面波的照射,假设 $\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{e}_iV_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_i\boldsymbol{r}}$,其中 $\boldsymbol{k}_i=(k_i,\theta_i,\varphi_i)$。图 9.4 是各向异性球的截面图,其半径为 r_a。区域 1 为各向同性介质,区域 2 为各向异性介质构成的球,其球心与坐标原点重合。

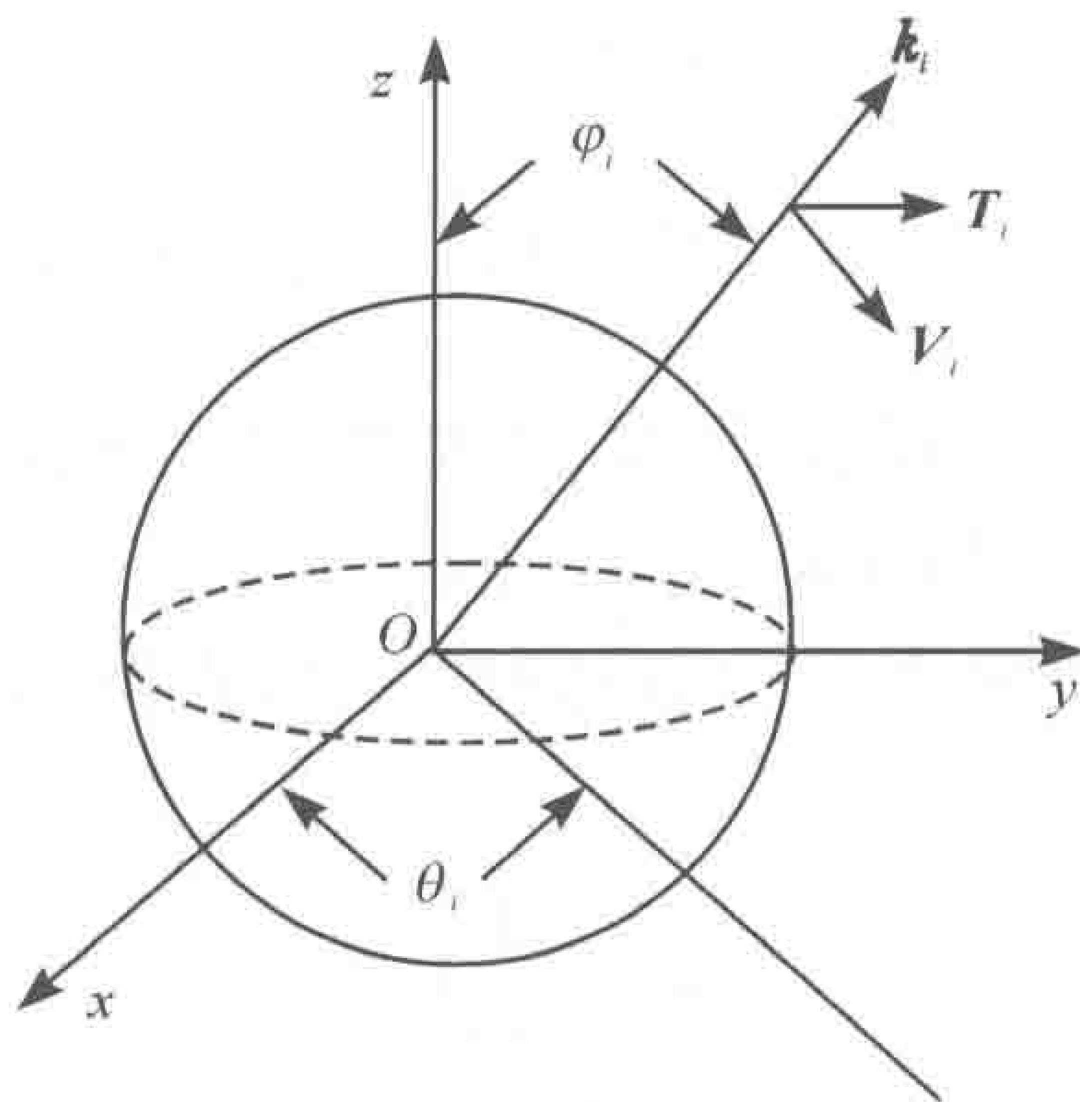


图 9.3　弹性平面波入射到各向异性单层球

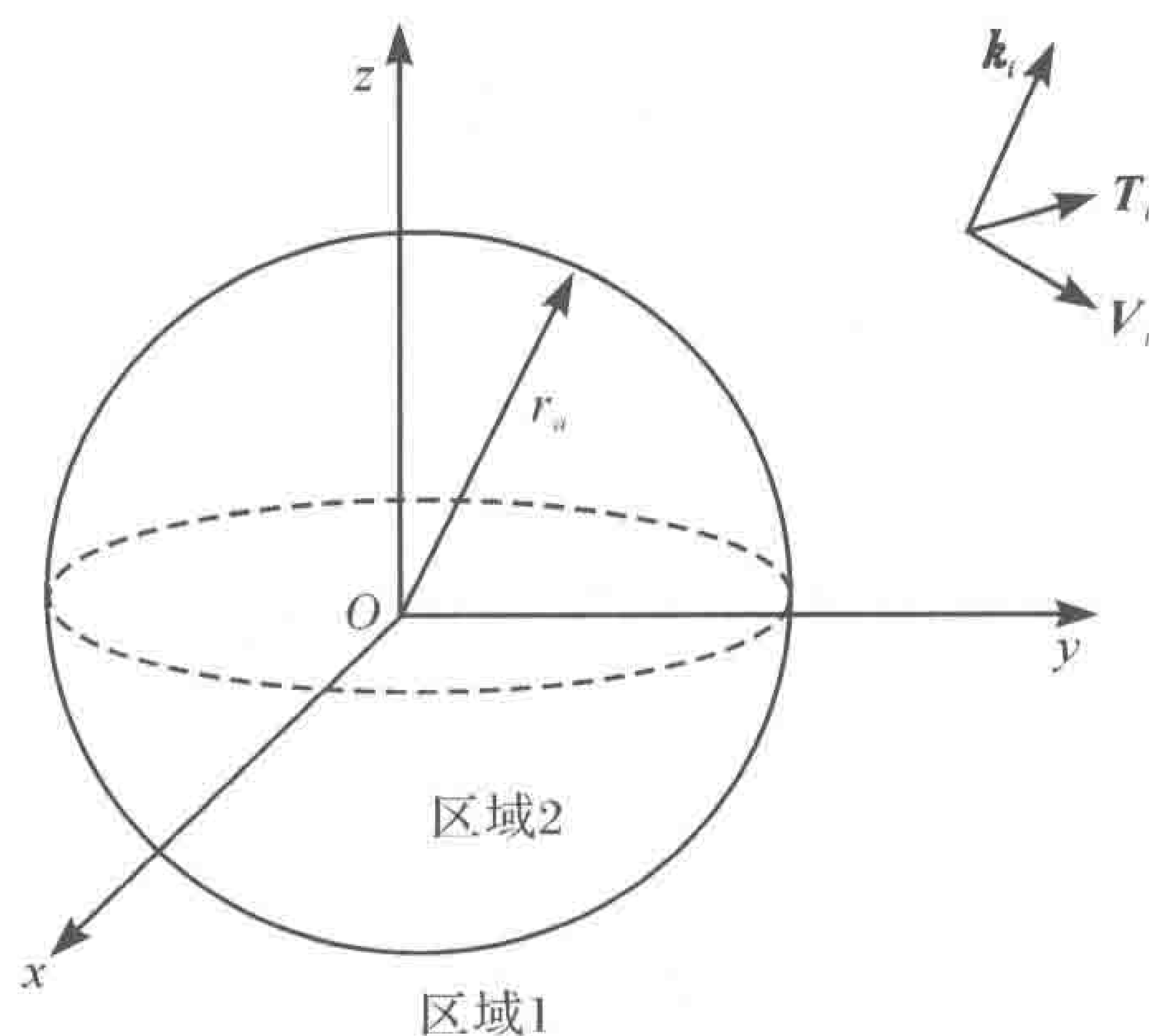


图 9.4　各向异性单层球的剖面图

9.2.2　建立各区域的弹性波场量

区域 1(各向同性弹性介质)的入射场用球矢量波函数展开为

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1^{\mathrm{inc}} = \sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{+l}\left[aA_{lm}^i\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + aB_{lm}^i\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + bC_{lm}^i\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ \boldsymbol{T}_{1r}^{\mathrm{inc}} = -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{+l}\left[aA_{lm}^i\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + aB_{lm}^i\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + bC_{lm}^i\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \end{cases} \tag{9.67}$$

式中,a,b 表示控制参数。当 $a=1$,$b=0$ 时,$\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{inc}}$ 表示平面 S 波入射的入射速度场;当 $a=0$,$b=1$ 时,表示平面 P 波入射的入射速度场。A_{lm}^i,B_{lm}^i,C_{lm}^i 是入射系数,由入射角度(θ_i,φ_i)和极化矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 求得[27,28]

$$\begin{cases} A_{lm}^i = (-1)^m i^l \dfrac{2l+1}{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{-lm}(\theta_i,\varphi_i)\boldsymbol{e}_i V_0 \\ B_{lm}^i = (-1)^m i^{l-1} \dfrac{2l+1}{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{-lm}(\theta_i,\varphi_i)\boldsymbol{e}_i V_0 \\ C_{lm}^i = (-1)^m i^{l-1} \dfrac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{P}_{-lm}(\theta_i,\varphi_i)\boldsymbol{e}_i V_0 \end{cases} \tag{9.68}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}_{-lm}(\theta_i,\varphi_i) = \dfrac{(l-m)!}{(-1)^m(l+m)!}\boldsymbol{C}_{lm}^*(\theta_i,\varphi_i) \\ \boldsymbol{B}_{-lm}(\theta_i,\varphi_i) = \dfrac{(l-m)!}{(-1)^m(l+m)!}\boldsymbol{B}_{lm}^*(\theta_i,\varphi_i) \\ \boldsymbol{P}_{-lm}(\theta_i,\varphi_i) = \dfrac{(l-m)!}{(-1)^m(l+m)!}\boldsymbol{P}_{lm}^*(\theta_i,\varphi_i) \end{cases} \tag{9.69}$$

式(9.67)中,$k_{1s}=\omega(\rho_1/\mu)^{1/2}$,$k_{1c}=\omega[\rho_1/(\lambda+2\mu)]^{1/2}$,其中 k_{1s} 为入射切变波的波数,k_{1c} 为入射纵波的波数,$\boldsymbol{r}$ 为径向矢量。$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 为第一类球矢量波函数,$\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 是切变波 $\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$ 和纵波 $\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 在球表面的法向表示。

区域 1 中的散射场也用球矢量波函数展开为

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1^s = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^s\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^s\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^s\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ \boldsymbol{T}_{1r}^s = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^s\boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^s\boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^s\boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \end{cases} \tag{9.70}$$

式中，$A_{lm}^s, B_{lm}^s, C_{lm}^s$ 是待求的散射系数。

区域 2 是各向异性介质构成的球，其中场量用本征波角谱展开式为

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_2 = &\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_n^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k} \\ &\cdot\sum_{l,m}a_{lm}\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k) \\ &\cdot\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k \end{aligned} \tag{9.71}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{2r} = &\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k} \\ &\cdot\sum_{l,m}a_{lm}\Big\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r}) \\ &+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r}) \\ &-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\Big]\Big\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k \end{aligned} \tag{9.72}$$

式中，$\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)$ 的准确含义是 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)$，简写为 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)$，因为不同的 θ_k 和 φ_k，$\boldsymbol{k}_n$ 及 $\boldsymbol{V}_n$ 也不同是不言自明的，以下各方程均采用这一缩写记号。

9.2.3　根据边界条件建立方程组

在区域 1 和区域 2 都为固体的前提下，根据速度场和应力场的边界条件，质点位移速度和应力的法向分量和切向分量在穿越不连续表面时必须连续。所以在区域 1 和区域 2 的分界面有

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{T}_{1r} = \boldsymbol{T}_{2r} \end{cases} \tag{9.73}$$

将 $\boldsymbol{V}_1, \boldsymbol{V}_2$ 的表达式代入速度场的边界条件，得

$$\begin{aligned} &\sum_{lm}\left[aA_{lm}^i\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB_{lm}^i\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC_{lm}^i\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ &+\sum_{lm}\left[A_{lm}^s\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^s\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^s\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ = &\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k} \\ &\cdot\sum_{l,m}a_{lm}\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k) \\ &\cdot\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})]\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k \end{aligned} \tag{9.74}$$

将 $\boldsymbol{T}_{1r}, \boldsymbol{T}_{2r}$ 的表达式代入应力场的边界条件得

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left[aA_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left[A_{lm}^{s}\boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^{s}\boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^{s}\boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_{0}^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{n}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot\sum_{l,m}a_{lm}\left\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[-\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})\right]\right\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k \tag{9.75}$$

将球矢量波函数 $\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$代入式(9.74)，得

$$\sum_{lm}\left\{aA_{lm}^{i}j_l(k_{1s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$+aB_{lm}^{i}\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\right\}$$

$$\left.+bC_{lm}^{i}\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\right\}$$

$$+\sum_{lm}\left\{A_{lm}^{s}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$+B_{lm}^{s}\left\{\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\right\}$$

$$\left.+C_{lm}^{s}\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_{0}^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot\sum_{lm}a_{lm}\left\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(\boldsymbol{k}_nr_a)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)}{\boldsymbol{k}_nr_a}\right]\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left\{\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\right.$$

$$\left.\left.\left.\cdot\left\{\frac{l(l+1)j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)}{\boldsymbol{k}_nr_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\left[j_l'(\boldsymbol{k}_nr_a)+\frac{j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)}{\boldsymbol{k}_nr_a}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\right\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\,\mathrm{d}\theta_k \tag{9.76}$$

将球矢量波函数 $\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(\boldsymbol{k}_n\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$的具体表达式代入式(9.75)，得

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left\{aA_{lm}^{i}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1s}r_a)-\frac{1}{r_a}j_l(k_{1s}r_a)\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$+aB_{lm}^{i}\left\{\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\right.$$

$$+\frac{\mu}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}j_l(k_{1s}r_a)+\frac{l^2+l-2}{r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)\right]\Bigg\}$$

$$+bC_{lm}^i\left\{\frac{1}{k_{1c}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\left[-\lambda k_{1c}^2 j_l(k_{1c}r_a)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}j_l(k_{1c}r_a)\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2\mu}{k_{1c}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{1}{r_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)-\frac{1}{r_a^2}j_l(k_{1c}r_a)\right]\right\}\Bigg\}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left\{A_{lm}^s\mu\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)-\frac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]\right.$$

$$+B_{lm}^s\left\{\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{l^2+l-2}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]\right\}$$

$$+C_{lm}^s\left\{\frac{1}{k_{1c}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\left[-\lambda k_{1c}^2 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2\mu}{k_{1c}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{1}{r_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)-\frac{1}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]\right\}\right\}$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{nl'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot\sum_{lm}a_{lm}\left\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\times\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(\boldsymbol{k}_nr_a)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)}{\boldsymbol{k}_nr_a}\right]\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left\{-\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n,\theta_k,\varphi_k)B_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\times\left\{\frac{l(l+1)j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)}{\boldsymbol{k}_nr_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\left[j_l'(\boldsymbol{k}_nr_a)+\frac{j_l(\boldsymbol{k}_nr_a)}{\boldsymbol{k}_nr_a}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\right\}\boldsymbol{k}_n\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k \tag{9.77}$$

以上由各向异性球的几何结构和弹性波在球各个区域的散射特性,分别给出了球内外各个区域弹性波场的表达式,再根据弹性波场的边界条件建立求解弹性波场的基本方程组,并且将各类球矢量波函数代入方程,为下一步继续简化方程做好准备。

观察式(9.78)、式(9.79),它们已经简化成了关于矢量球谐函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$的方程,因为$\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$是正交函数集,所以 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$的每个系数都必须为零才能使方程成立。

在式(9.76)中,令 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,整理得

$$aB_{lm}^i\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+bC_{lm}^i\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)+B_{lm}^s\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}$$

$$+C_{lm}^s\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{1l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot\sum_{lm}a_{lm}\left[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)j_l'(k_1r_a)+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_1r_a)}{k_1r_a}\right]$$

$$\cdot k_1\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{2l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\times \sum_{lm} a_{lm} \Big[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_2)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k) j_l'(k_2 r_a)$$

$$+ \mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_2)\cdot \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_2 r_a)}{k_2 r_a}\Big] k_2 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$+ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{3l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\times \sum_{lm} a_{lm} \Big[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_3)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k) j_l'(k_3 r_a)$$

$$+ \mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_3)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_3 r_a)}{k_3 r_a}\Big] k_3 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k = 0 \tag{9.78}$$

在式(9.76)中,令 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,整理得

$$aB_{lm}^i\Big[j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]+bC_{lm}^i\frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}$$

$$+B_{lm}^s\Big[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]+C_{lm}^s\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}$$

$$+ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{1l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \Big\{ \mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_l(k_1 r_a)}{k_1 r_a}$$

$$+\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_1(k_1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\Big[j_l'(k_1 r_a)+\frac{j_l(k_1 r_a)}{k_1 r_a}\Big]\Big\} k_1 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$+ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{2l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \Big\{ \mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_2)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_l(k_2 r_a)}{k_2 r_a}$$

$$+\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_2(k_2)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\Big[j_l'(k_2 r_a)+\frac{j_l(k_2 r_a)}{k_2 r_a}\Big]\Big\} k_2 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$+ \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{3l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \Big\{ \mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_3)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_l(k_3 r_a)}{k_3 r_a}+\frac{\mathrm{j}}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_3(k_3)$$

$$\cdot \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\Big[j_l'(k_3 r_a)+\frac{j_l(k_3 r_a)}{k_3 r_a}\Big]\Big\} k_3 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k = 0 \tag{9.79}$$

在式(9.76)中,令 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,整理得

$$aA_{lm}^i j_l(k_{1s}r_a)+A_{lm}^s h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)$$

$$- \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{1l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_1(k_1)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k) j_l(k_1 r_a) k_1 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$- \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{2l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \boldsymbol{V}_2(k_2) \boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) j_l(k_2 r_a) k_2 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$- \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{3l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \boldsymbol{V}_3(k_3) \boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) j_l(k_3 r_a) k_3 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k = 0 \tag{9.80}$$

同理,在式(9.77)中,令 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,整理得

$$\frac{a}{\omega} B_{lm}^i \frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{j_l(k_{1s} r_a)}{r_a}\right] + \frac{b}{\omega} C_{lm}^i \frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2 j_l(k_{1c} r_a) + 2\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} j_l(k_{1c} r_a)\right]$$

$$+ \frac{1}{\omega} B_{lm}^s \frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s} r_a)}{r_a}\right]$$

$$+ \frac{1}{\omega} C_{lm}^s \frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2 h_l^{(2)}(k_{1c} r_a) + 2\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} h_l^{(2)}(k_{1c} r_a)\right]$$

$$- \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{1l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \left\{ \frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_1, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) j_l'(k_1 r_a) \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_1, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \frac{\sqrt{l(l+1)} j_l(k_1 r_a)}{k_1 r_a} \right\} k_1 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$- \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{2l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \left\{ \frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_2, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) j_l'(k_2 r_a) \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_2, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \frac{\sqrt{l(l+1)} j_l(k_2 r_a)}{k_2 r_a} \right\} k_2 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k$$

$$- \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi_k \int_0^{\pi} \sum_{l',m'} b_{3l'm'} P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k) \mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}$$

$$\cdot \sum_{lm} a_{lm} \left\{ \frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_3, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) j_l'(k_3 r_a) \right.$$

$$\left. + \frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_3, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \frac{\sqrt{l(l+1)} j_l(k_3 r_a)}{k_3 r_a} \right\} k_3 \sin\theta_k \mathrm{d}\theta_k = 0 \tag{9.81}$$

在式(9.77)中,令 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,整理得

$$\frac{1}{\omega} a B_{lm}^i \frac{\mu}{k_{1s}}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} j_l(k_{1s} r_a) + \frac{l^2 + l - 2}{r_a^2} j_l(k_{1s} r_a)\right]$$

$$+ \frac{1}{\omega} b C_{lm}^i \frac{2\mu}{k_{1c}}\left[\frac{1}{r_a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} j_l(k_{1c} r_a) - \frac{1}{r_a^2} j_l(k_{1c} r_a)\right]$$

$$+ \frac{1}{\omega} B_{lm}^s \frac{\mu}{k_{1s}}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} h_l^{(2)}(k_{1s} r_a) + \frac{l^2 + l - 2}{r_a^2} h_l^{(2)}(k_{1s} r_a)\right]$$

$$+ \frac{1}{\omega} C_{lm}^s \frac{2\mu}{k_{1c}}\left[\frac{1}{r_a} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} h_l^{(2)}(k_{1c} r_a) - \frac{1}{r_a^2} h_l^{(2)}(k_{1c} r_a)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{1l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\
&\cdot\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_1,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_l(k_1r_a)}{k_1r_a}\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{j}}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_1,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\left[j_l'(k_1r_a)+\frac{j_l(k_1r_a)}{k_1r_a}\right]\right\}k_1\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\\
&-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{2l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\
&\cdot\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_2,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_l(k_2r_a)}{k_2r_a}\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{j}}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_2,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\left[j_l'(k_2r_a)+\frac{j_l(k_2r_a)}{k_2r_a}\right]\right\}k_2\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\\
&-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{3l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\
&\cdot\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_3,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\frac{j_l(k_3r_a)}{k_3r_a}\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{j}}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_3,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)\left[j_l'(k_3r_a)+\frac{j_l(k_3r_a)}{k_3r_a}\right]\right\}k_3\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k=0
\end{aligned}
\tag{9.82}
$$

在式(9.77)中，令 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零，整理得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}aA_{lm}^{i}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1s}r_a)-\frac{1}{r_a}j_l(k_{1s}r_a)\right]\\
&+\frac{1}{\omega}A_{lm}^{s}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)-\frac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]\\
&+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{1l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\
&\cdot\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_1,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)j_l(k_1r_a)k_1\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\\
&+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{2l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\
&\cdot\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_2,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)j_l(k_2r_a)k_2\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k\\
&+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi_k\int_0^{\pi}\sum_{l',m'}b_{3l'm'}P_{l'}^{m'}(\cos\theta_k)\mathrm{e}^{\mathrm{j}m'\varphi_k}\\
&\cdot\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_3,\theta_k,\varphi_k)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k,\varphi_k)j_l(k_3r_a)k_3\sin\theta_k\mathrm{d}\theta_k=0
\end{aligned}
\tag{9.83}
$$

至此已建立起完备的公式体系，总共得到六个方程，将方程联立求解，就能得到散射系数。

9.2.4 改写方程组

前面导出的六个方程之间存在耦合,需要对它们进行适当的排列,将方程组改写成容易求解的矩阵形式。一组确定的[l,m]值就对应着一种弹性波模式,因此应将求和符号$\sum_{l,m}$展开,进行模式匹配,如此一来,这六个方程的每个都将裂变为若干个方程,裂变出来的方程数目由模式数决定。裂变出来的方程我们称为子方程,每个子方程中又涉及求和符号$\sum_{n}$和$\sum_{l',m'}$,其中$\sum_{n}$是将三个特征波叠加,$\sum_{l',m'}$是对待定振幅函数展开式的级数求和。理清这些关系,在改写的时候才不会出错。另外,还必须搞清楚这六个方程的耦合关系。这六个方程涉及的待求量有$b_{1l'm'}$,$b_{2l'm'}$,$b_{3l'm'}$,A_{lm}^{s},B_{lm}^{s},C_{lm}^{s},将六个方程联立写成矩阵形式后,这些待求量都占据着相应的位置。在改写方程过程中,某一方程遇到未涉及的其他方程的待求量,一律采用填零占位的方式。最后,得到方程组的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} * & * & * & \mathbf{0} & \text{diag} & \text{diag} \\ * & * & * & \mathbf{0} & \text{diag} & \text{diag} \\ * & * & * & \text{diag} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ * & * & * & \mathbf{0} & \text{diag} & \text{diag} \\ * & * & * & \mathbf{0} & \text{diag} & \text{diag} \\ * & * & * & \text{diag} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{1l'm'} \\ b_{2l'm'} \\ b_{3l'm'} \\ A_{lm}^{s} \\ B_{lm}^{s} \\ C_{lm}^{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \tag{9.84}$$

式中

$$a_1 = aB_{lm}^{i} \frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a} + bC_{lm}^{i} \frac{1}{k_{1c}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} j_l(k_{1c}r_a)$$

$$a_2 = aB_{lm}^{i}\left[j_l'(k_{1s}r_a) + \frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right] + bC_{lm}^{i} \frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}$$

$$a_3 = aA_{lm}^{i} j_l(k_{1s}r_a)$$

$$a_4 = \frac{1}{\omega}aB_{lm}^{i} \frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right] + \frac{1}{\omega}bC_{lm}^{i} \frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2 j_l(k_{1c}r_a) + 2\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} j_l(k_{1c}r_a)\right]$$

$$\begin{aligned} a_5 = {} & \frac{1}{\omega}aB_{lm}^{i} \frac{\mu}{k_{1s}}\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} j_l(k_{1s}r_a) + \frac{l^2+l-2}{r_a^2} j_l(k_{1s}r_a)\right] \\ & + \frac{1}{\omega}bC_{lm}^{i} \frac{2\mu}{k_{1c}}\left[\frac{1}{r_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} j_l(k_{1c}r_a) - \frac{1}{r_a^2} j_l(k_{1c}r_a)\right] \end{aligned}$$

$$a_6 = \frac{1}{\omega}aA_{lm}^{i}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} j_l(k_{1s}r_a) - \frac{1}{r_a} j_l(k_{1s}r_a)\right]$$

在式(9.84)中,$b_{1l'm'}$,$b_{2l'm'}$,$b_{3l'm'}$,A_{lm}^{s},B_{lm}^{s},C_{lm}^{s}构成待求的解列向量,系数矩阵中的 * 代表非零子矩阵,**0** 代表零子矩阵。

[l,m]中的l和m之间存在关系$l=[0,L_{\max}]$,$m\in[-l,l]$。考虑到[l,m]之间的这种特殊关系,为简化问题的讨论,将采用简单的标记方法。对于每组确定的[l,m],都赋予对应的标记h。h,l,m三者之间的换算关系为$h=l(l+1)+m$,每个l对应的h的值由不等式$(l-1)(l+1)<h<l(l+2)$确定。关于h,l,m三者之间的对应关系,请参见表9.1[1]。

表 9.1　h 与 (l,m) 的关系

l	m	h
1	−1	1
1	0	2
1	1	3
2	−2	4
2	−1	5
2	0	6
2	1	7
2	2	8
3	−3	9
3	−2	10
3	−1	11
3	0	12
3	1	13
3	2	14
3	3	15
⋮	⋮	⋮
$L_{\max}$	$L_{\max}$	$H_{\max}$

采用上述的标记方法，对于讨论问题和编程实现都十分方便。将六个方程按 h 标记方式裂变展开，矩阵的行数按 h 计算，矩阵的列数按 h,h' 计算。最后得到系数矩阵的维数为 $6H_{\max}$ 行、$3H_{\max}+3H'_{\max}$ 列。

9.3　各向异性单层球弹性波散射的简化

应用角谱积分方法进行计算所得到的结果是精确的，但由于系数矩阵的每个元素都含有二重积分，导致计算时间长，效率低。将 (θ_k,φ_k) 的积分离散化可减少计算时间。如果令[29]

$$\begin{cases}\theta_{ks}=\theta_{k0}+sh, & \theta_{k0}=0, \quad h=\pi/S \\ \varphi_{kt}=\varphi_{k0}+th', & \varphi_{k0}=0, \quad h'=2\pi/T\end{cases} \tag{9.85}$$

式中，s 和 t 有多种离散的取法，例如可以取 $s=0,1,2,\cdots,S$，$t=0,1,2,\cdots,T$，S 和 T 为待定常数。经过上述处理，得到各向异性弹性介质球波函数解的简化形式[14,29]

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}^{(i)}(\boldsymbol{r})=&\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{l,m}\left[\alpha_{nlm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})+\beta_{nlm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\right.\\&\left.+\gamma_{nlm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\right],\quad i=1,2,3,4\end{aligned} \tag{9.86}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_r^{(i)}(\boldsymbol{r})=&\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{l,m}\left[\alpha'_{nlm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})+\beta'_{nlm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\right.\\&\left.+\gamma'_{nlm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\right],\quad i=1,2,3,4\end{aligned} \tag{9.87}$$

式(9.86)、式(9.87)中，球矢量波函数的系数为

$$
\begin{cases}
\alpha_{nlm} = \dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}} a_{lm} \boldsymbol{V}_{jn} \hat{\boldsymbol{e}}_j \boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \\
\beta_{nlm} = -\dfrac{\mathrm{j}}{\sqrt{l(l+1)}} a_{lm} \boldsymbol{V}_{jn} \hat{\boldsymbol{e}}_j \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \\
\gamma_{nlm} = -a_{lm} \mathrm{j} \boldsymbol{V}_{jn} \hat{\boldsymbol{e}}_j \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k, \varphi_k)
\end{cases} \tag{9.88}
$$

$$
\begin{cases}
\alpha'_{nlm} = -\dfrac{\mathrm{j}}{r\sqrt{l(l+1)}} a_{lm} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{C}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \\
\beta'_{nlm} = -\dfrac{1}{r\sqrt{l(l+1)}} a_{lm} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_k, \varphi_k) \\
\gamma'_{nlm} = -\dfrac{1}{r} a_{lm} \boldsymbol{G}(\boldsymbol{k}_n, \theta_k, \varphi_k) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_k, \varphi_k)
\end{cases} \tag{9.89}
$$

式中,$a_{lm} = \mathrm{j}^l (2l+1)(l-m)! / (l+m)!$。

采用简化方法计算各向异性弹性介质球的弹性波散射,数值计算时间缩短。角谱积分方法计算时间长,但结果的精度较高,两种方法的计算结果可相互印证相互补充。作者曾在加拿大 McMaster 大学留学深造,学习犹太人科学家 Bandler 的空间变换(space mapping)的优化方法。寻优时往往需要一个精度较高的精细模型和一个精度稍差但较快的粗模型。我们的研究工作为进一步优化打下了坚实的基础。

9.3.1　物理模型

仍然采用第 9.2 节的物理模型,见图 9.3、图 9.4,均匀各向异性单层球位于各向同性背景空间中,整个球体受到一个弹性平面波的照射,如假设 $\boldsymbol{V}_i = e_i V_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r}}$。图 9.4 是各向异性球的截面图,其半径为 r_a,区域 1 为各向同性介质,区域 2 为各向异性介质构成的球,其球心与坐标原点重合。

9.3.2　建立各区域的弹性波场量

通过将弹性波场角谱积分表达式的矢量平面波用并矢平面波展开后,再将其中的 (θ_k, φ_k) 进行离散化,得到简化的球矢量波函数。以下将基于简化波函数理论来求解各向异性介质球的弹性波散射问题。

首先利用球矢量波函数的级数展开得到区域 1(各向异性弹性介质)的入射速度场和应力场(球表面法向)的级数展开式

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{inc}} = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[aA_{lm}^i \boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + aB_{lm}^i \boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + bC_{lm}^i \boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r}) \right] \\
\boldsymbol{T}_{1r}^{\mathrm{inc}} = -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} \left[aA_{lm}^i \boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + aB_{lm}^i \boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + bC_{lm}^i \boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r}) \right]
\end{cases} \tag{9.90}
$$

式中,a,b 表示控制参数。当 $a=1$,$b=0$ 时,$\boldsymbol{V}_1^{\mathrm{inc}}$ 表示平面 S 波入射的入射速度场;当 $a=0$,$b=1$ 时,表示平面 P 波入射的入射速度场。A_{lm}^i,B_{lm}^i,C_{lm}^i 是入射系数,由入射角度 (θ_i, φ_i) 和极化矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 求得

$$\begin{cases} A_{lm}^{i} = (-1)^{m} \mathrm{j}^{l} \dfrac{2l+1}{l(l+1)} \boldsymbol{C}_{-lm}(\theta_i, \varphi_i) \boldsymbol{e}_i V_0 \\ B_{lm}^{i} = (-1)^{m} \mathrm{j}^{l-1} \dfrac{2l+1}{l(l+1)} \boldsymbol{B}_{-lm}(\theta_i, \varphi_i) \boldsymbol{e}_i V_0 \\ C_{lm}^{i} = (-1)^{m} \mathrm{j}^{l-1} \dfrac{2l+1}{\sqrt{l(l+1)}} \boldsymbol{P}_{-lm}(\theta_i, \varphi_i) \boldsymbol{e}_i V_0 \end{cases} \tag{9.91}$$

式中

$$\begin{cases} \boldsymbol{C}_{-lm}(\theta_i, \varphi_i) = \dfrac{(l-m)!}{(-1)^m (l+m)!} \boldsymbol{C}_{lm}^{*}(\theta_i, \varphi_i) \\ \boldsymbol{B}_{-lm}(\theta_i, \varphi_i) = \dfrac{(l-m)!}{(-1)^m (l+m)!} \boldsymbol{B}_{lm}^{*}(\theta_i, \varphi_i) \\ \boldsymbol{P}_{-lm}(\theta_i, \varphi_i) = \dfrac{(l-m)!}{(-1)^m (l+m)!} \boldsymbol{P}_{lm}^{*}(\theta_i, \varphi_i) \end{cases} \tag{9.92}$$

式(9.90)中，$k_{1s} = \omega (\rho_1/\mu)^{1/2}$，$k_{1c} = \omega [\rho_1/(\lambda+2\mu)]^{1/2}$，其中 k_{1s} 为入射切变波的波数，k_{1c} 为入射纵波的波数，$\boldsymbol{r}$ 为径向矢量。$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 为第一类球矢量波函数，$\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 是切变波 $\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$ 和纵波 $\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 在球表面的法向表示。

区域 1 中的散射场也可以表示为向外散射波的线性组合

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1^{s} = \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm}^{s} \boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^{s} \boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}^{s} \boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})] \\ \boldsymbol{T}_{1r}^{s} = -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega} \displaystyle\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm}^{s} \boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^{s} \boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}^{s} \boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})] \end{cases} \tag{9.93}$$

式中，A_{lm}^{s}，B_{lm}^{s}，C_{lm}^{s} 是待求的散射系数。

区域 2 是各向异性弹性介质构成的球，根据各向异性弹性介质的简化波函数理论，结合弹性波场的第一类球矢量波函数导出各向异性球内的散射场有限和展开式：

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}_2 = \sum_{n=1}^{3} \sum_{s=0}^{S} \sum_{t=0}^{T} c_{nst} \sum_{l,m} a_{lm} \{ & -\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} [\boldsymbol{V}_n(k_{nst}) \boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ & - \mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}) \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})] \} \end{aligned} \tag{9.94}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T}_{2r} = \sum_{n=1}^{3} \sum_{s=0}^{S} \sum_{t=0}^{T} c_{nst} \sum_{l,m} a_{lm} \Big\{ & -\frac{1}{r} \boldsymbol{G}(k_{nst}, \theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ & + \frac{1}{\sqrt{l(l+1)}} \Big[-\frac{\mathrm{j}}{r} \boldsymbol{G}(k_{nst}, \theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ & - \frac{1}{r} \boldsymbol{G}(k_{nst}, \theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks}, \varphi_{kt}) \boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \Big] \Big\} \end{aligned} \tag{9.95}$$

式中，c_{nst} 是未知量；$a_{lm} = \mathrm{j}^{l}(2l+1)(l-m)!\,/(l+m)!$；$k_{nst}$ 是各向异性弹性介质内第 n 个本征波的波数；$\theta_{ks} = \pi s/S$，$\varphi_{kt} = 2\pi t/T$，其中对 s 和 t 的离散取值的方法可以有多种，这里取 $s=0,1,2,\cdots,S$，$t=0,1,2,\cdots,T$。这里，$\boldsymbol{V}_n(k_{nst})$ 的精确含义是 $\boldsymbol{V}_n(\boldsymbol{k}_n, \theta_{ks}, \varphi_{kt})$，由于不同的 $(\theta_{ks}, \varphi_{kt})$ 对应不同的 k_{nst} 是不言自明的。为了节省篇幅，作了上述简写，希望读者不致含混，下同。

9.3.3 根据边界条件建立方程组

在区域 1 和区域 2 都为固体的前提下,根据速度场和应力场的边界条件,质点位移速度和应力的法向分量和切向分量在穿越不连续表面时必须连续。所以在区域 1 和区域 2 的分界面

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}_1 = \boldsymbol{V}_2 \\ \boldsymbol{T}_{1r} = \boldsymbol{T}_{2r} \end{cases} \tag{9.96}$$

将 $\boldsymbol{V}_1,\boldsymbol{V}_2$ 的表达式代入速度场的边界条件得[1]

$$\begin{aligned} &\sum_{lm}\left[aA^i_{lm}\boldsymbol{M}^{(1)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB^i_{lm}\boldsymbol{N}^{(1)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC^i_{lm}\boldsymbol{L}^{(1)}_{lm}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ &+\sum_{lm}\left[A^s_{lm}\boldsymbol{M}^{(4)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B^s_{lm}\boldsymbol{N}^{(4)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C^s_{lm}\boldsymbol{L}^{(4)}_{lm}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ =&\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ &+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ &-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r})]\} \end{aligned} \tag{9.97}$$

将 $\boldsymbol{T}_{1r},\boldsymbol{T}_{2r}$ 的表达式代入应力场的边界条件得[1]

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left[aA^i_{lm}\boldsymbol{T}^{(1)}_{rM}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB^i_{lm}\boldsymbol{T}^{(1)}_{rN}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC^i_{lm}\boldsymbol{T}^{(1)}_{rL}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ &-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left[A^s_{lm}\boldsymbol{T}^{(4)}_{rM}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B^s_{lm}\boldsymbol{T}^{(4)}_{rN}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C^s_{lm}\boldsymbol{T}^{(4)}_{rL}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \\ =&\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{l,m}a_{lm}\Big\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ &+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \\ &-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r})\Big]\Big\} \end{aligned} \tag{9.98}$$

式中,$\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})$的定义已在第 9.1 节给出。

将球矢量波函数 $\boldsymbol{L}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{M}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{N}^{(1)}_{lm}(k_{nst}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{L}^{(1)}_{lm}(k_{1c}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{M}^{(1)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{N}^{(1)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{L}^{(4)}_{lm}(k_{1c}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{M}^{(4)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{N}^{(4)}_{lm}(k_{1s}\boldsymbol{r})$代入式(9.97)得

$$\begin{aligned} &\sum_{lm}\Big\{aA^i_{lm}j_l(k_{1s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) \\ &+aB^i_{lm}\Big\{\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big[j'_l(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]\Big\} \\ &+bC^i_{lm}\Big[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\Big]\Big\} \\ &+\sum_{lm}\Big\{A^s_{lm}h^{(2)}_l(k_{1s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) \\ &+B^s_{lm}\Big\{\frac{l(l+1)h^{(2)}_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big[h'^{(2)}_l(k_{1s}r_a)+\frac{h^{(2)}_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]\Big\} \end{aligned}$$

$$+C_{lm}^{s}\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\bigg\}$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\Big\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})$$

$$\times\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{nst}r_a)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big\{\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\cdot\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{nst}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\cdot\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\times\left\{\begin{aligned}&\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}+\\&\left[j_l'(k_{nst}r_a)+\frac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\end{aligned}\right\}\Bigg\}\Bigg\}\Bigg\}\tag{9.99}$$

将球矢量波函数 $\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$和 $\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$的具体表达式代入式(9.98)得

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\Big\{aA_{lm}^{i}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1s}r_a)-\frac{1}{r_a}j_l(k_{1s}r_a)\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$+aB_{lm}^{i}\Big\{\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\Big\}$$

$$+\frac{\mu}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}j_l(k_{1s}r_a)+\frac{l^2+l-2}{r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)\right]\Big\}$$

$$+bC_{lm}^{i}\Big\{\frac{1}{k_{1c}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\left[-\lambda k_{1c}^2j_l(k_{1c}r_a)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}j_l(k_{1c}r_a)\right]$$

$$+\frac{2\mu}{k_{1c}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{1}{r_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)-\frac{1}{r_a^2}j_l(k_{1c}r_a)\right]\Big\}\Big\}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\Big\{A_{lm}^{s}\mu\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)-\frac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]$$

$$+B_{lm}^{s}\Big\{\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]$$

$$+\frac{\mu}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{l^2+l-2}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]\Big\}$$

$$+C_{lm}^{s}\Big\{\frac{1}{k_{1c}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\left[-\lambda k_{1c}^2h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]$$

$$+\frac{2\mu}{k_{1c}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{1}{r_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)-\frac{1}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]\Big\}\Big\}$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\Big\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{nst}r_a)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big\{-\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{nst}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$$

$$-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\times\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.+\left[j_l'(k_{nst}r_a)+\frac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\Bigg\}\Bigg\} \tag{9.100}$$

式(9.99)、式(9.100)是根据弹性波场的边界条件建立的方程组,可以看出,它们是关于矢量球谐函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的方程,因为{$\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$}是正交函数集,所以 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的每个系数都必须为零才能使方程成立。

在式(9.99)中,令 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,整理得

$$aB_{lm}^i\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+bC_{lm}^i\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)+B_{lm}^s\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}$$

$$+C_{lm}^s\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l'(k_{nst}r_a)$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}]=0 \tag{9.101}$$

在式(9.99)中,令 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,整理得[1]

$$aB_{lm}^i\left[j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]+bC_{lm}^i\frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}+B_{lm}^s\left[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]$$

$$+C_{lm}^s\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right.$$

$$\left.+\mathrm{j}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_l'(k_{nst}r_a)+\frac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]\right\}=0$$

$$\tag{9.102}$$

在式(9.99)中,令 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,整理得[1]

$$aA_{lm}^ij_l(k_{1s}r_a)+A_{lm}^sh_l^{(2)}(k_{1s}r_a)-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}$$

$$\cdot\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{nst}r_a)=0 \tag{9.103}$$

同理,在式(9.100)中,令 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,整理得[1]

$$\frac{a}{\omega}B_{lm}^i\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]+\frac{b}{\omega}C_{lm}^i\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2j_l(k_{1c}r_a)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}j_l(k_{1c}r_a)\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}B_{lm}^s\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}C_{lm}^s\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l'(k_{nst}r_a)\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right\}=0 \tag{9.104}$$

在式(9.100)中,令 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,整理得[1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\omega}aB_{lm}^{i}\frac{\mu}{k_{1s}}\left[\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}r^{2}}j_{l}(k_{1s}r_{a})+\frac{l^{2}+l-2}{r_{a}^{2}}j_{l}(k_{1s}r_{a})\right]\\
&+\frac{1}{\omega}bC_{lm}^{i}\frac{2\mu}{k_{1c}}\left[\frac{1}{r_{a}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_{l}(k_{1c}r_{a})-\frac{1}{r_{a}^{2}}j_{l}(k_{1c}r_{a})\right]\\
&+\frac{1}{\omega}B_{lm}^{s}\frac{\mu}{k_{1s}}\left[\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}r^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{a})+\frac{l^{2}+l-2}{r_{a}^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{a})\right]\\
&+\frac{1}{\omega}C_{lm}^{s}\frac{2\mu}{k_{1c}}\left[\frac{1}{r_{a}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{a})-\frac{1}{r_{a}^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{a})\right]\\
&-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{j_{l}(k_{nst}r_{a})}{k_{nst}r_{a}}\right.\\
&\left.+\frac{\mathrm{j}}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_{l}'(k_{nst}r_{a})+\frac{j_{l}(k_{nst}r_{a})}{k_{nst}r_{a}}\right]\right\}=0
\end{aligned}
\tag{9.105}
$$

在式(9.100)中,令 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,整理得[1]

$$
\begin{aligned}
&\frac{a}{\omega}A_{lm}^{i}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_{l}(k_{1s}r_{a})-\frac{1}{r_{a}}j_{l}(k_{1s}r_{a})\right]+\frac{1}{\omega}A_{lm}^{s}\mu\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{a})-\frac{1}{r_{a}}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{a})\right]\\
&+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{r}\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}(k_{nst}r_{a})=0
\end{aligned}
\tag{9.106}
$$

至此,根据正交矢量函数集 $\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$ 的特性,将边界条件简化成了有限级数的方程组的形式。在简化后的方程组中除了矢量间的点乘运算,已无其他的复杂运算。但是要直接上机求解方程还有点困难,需要继续对方程进行适当的改写和组合,使其变成更加容易上机的线性方程组。

9.3.4 改写方程组

前面导出的六个方程之间存在耦合关系,需要对它们进行适当的排列,将方程组改写成容易求解的矩阵形式。一组确定的$[l,m]$值就对应着一种弹性波模式,因此应将求和符号 $\sum\limits_{l,m}$ 展开,进行模式匹配,如此一来,这六个方程的每个都将裂变为若干个方程,裂变出来的方程数目由模式数决定。裂变出来的方程我们称为子方程,每个子方程中又涉及求和符号 $\sum\limits_{n}$ 和 $\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}$,其中 $\sum\limits_{n}$ 是将三个特征波叠加,$\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}$ 是对角谱(θ_k,φ_k)中的每个离散点进行求和。理清这些关系,在改写的时候才不会出错。

$[l,m]$中的 l 和 m 之间存在关系 $l=[0,L_{\max}]$,$m\in[-l,l]$。考虑到$[l,m]$之间的这种特殊关系,为简化问题的讨论,将采用简单的标记方法。对于每组确定的$[l,m]$都赋予对应的标记 h。h,l,m 三者之间的换算关系为 $h=l(l+1)+m$,每个 l 对应的 h 的值由不等式 $(l-1)(l+1)<h<l(l+2)$ 确定。关于 h,l,m 三者之间的对应关系,请参见表 9.2。

表 9.2　h 与 (l,m) 的关系

l	m	h
1	−1	1
1	0	2
1	1	3
2	−2	4
2	−1	5
2	0	6
2	1	7
2	2	8
3	−3	9
3	−2	10
3	−1	11
3	0	12
3	1	13
3	2	14
3	3	15
⋮	⋮	⋮
$L_{\max}$	$L_{\max}$	$H_{\max}$

前文已经得到式(9.101)～(9.106)的六个方程，根据以上的改写规则，可以将式(9.103)改写成

$$\begin{aligned}
&aB_h^i\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+bC_h^i\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)\\
&+B_h^s\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+C_h^s\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\\
&+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}a_h\Big[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l'(k_{nst}r_a)\\
&+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\Big]=0
\end{aligned}\tag{9.107}$$

同时，为了书写方便以及能够将改写以后的方程在最后写成矩阵乘向量等于向量的形式，将方程内的一些系数用带小标的大写字母来代替，在式(9.107)中，可以令

$$\begin{cases}
aB_h^i\dfrac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+bC_h^i\dfrac{1}{k_{1c}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)=I_{1h}\\
\dfrac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}=U_{1h}\\
\dfrac{1}{k_{1c}}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)=V_{1h}\\
a_h\Big[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l'(k_{nst}r_a)+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})\dfrac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\Big]=X_{nh}(S,T)
\end{cases}\tag{9.108}$$

接着将方程按表 9.2 中 h 的取值方式展开。式(9.107)可以展开成方程组[1]

$$
\begin{cases}
U_{11}B_1^s+V_{11}C_1^s+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}X_{11}(s,t)\\
+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}X_{21}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}X_{31}(s,t)=-I_{11}\\
\cdots\\
U_{1H_{\max}}B_{H_{\max}}^s+V_{1H_{\max}}C_{H_{\max}}^s+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}X_{1H_{\max}}(s,t)\\
+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}X_{2H_{\max}}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}X_{3H_{\max}}(s,t)=-I_{1H_{\max}}
\end{cases}
\tag{9.109}
$$

类似地可以将式(9.102)～(9.106)也改写成方程组的形式，在式(9.102)中，用 h 来代替 m 和 l 后，可以令

$$
\begin{cases}
aB_h^i\left[j_l'(k_{1s}r_a)+\dfrac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]+bC_h^i\dfrac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}=I_{2h}\\
\left[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\dfrac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]=U_{2h}\\
\dfrac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}=V_{2h}\\
a_h\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})\dfrac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}+\mathrm{j}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\right.\\
\left.\cdot\boldsymbol{B}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_l'(k_{nst}r_a)+\dfrac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]\right\}=Y_{nh}(s,t)
\end{cases}
\tag{9.110}
$$

将式(9.102)按照 h 的取值方式展开，得到方程组[1]

$$
\begin{cases}
U_{21}B_1^s+V_{21}C_1^s+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}Y_{11}(s,t)\\
+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}Y_{21}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}Y_{31}(s,t)=-I_{21}\\
\cdots\\
U_{2H_{\max}}B_{H_{\max}}^s+V_{2H_{\max}}C_{H_{\max}}^s+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}Y_{1H_{\max}}(s,t)\\
\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}Y_{2H_{\max}}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}Y_{3H_{\max}}(s,t)=-I_{2H_{\max}}
\end{cases}
\tag{9.111}
$$

在式(9.103)中，用 h 来代替 m 和 l 后，可以令

$$
\begin{cases}
aA_h^ij_l(k_{1s}r_a)=I_{3h}\\
h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)=U_{3h}\\
a_h\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{C}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{nst}r_a)=Z_{nh}(s,t)
\end{cases}
\tag{9.112}
$$

将式(9.103)按照 h 的取值方式展开，得到方程组

$$
\begin{cases}
U_{31}A_1^s - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{1st}Z_{11}(s,t) - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{2st}Z_{21}(s,t) - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{3st}Z_{31}(s,t) = -I_{31} \\
\cdots \\
U_{3H_{\max}}A_{H_{\max}}^s - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{1st}Z_{1H_{\max}}(s,t) - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{2st}Z_{2H_{\max}}(s,t) \\
- \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{3st}Z_{3H_{\max}}(s,t) = -I_{3H_{\max}}
\end{cases}
\tag{9.113}
$$

在式(9.104)中,用 h 来代替 m 和 l 后,可以令

$$
\begin{cases}
\frac{a}{\omega}B_h^i \frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right] + C_h^i \frac{b}{\omega k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2 j_l(k_{1c}r_a) + 2\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} j_l(k_{1c}r_a)\right] = I_{4h} \\
\frac{1}{\omega} \frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right] = U_{4h} \\
\frac{1}{\omega}\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^2 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a) + 2\mu \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2} h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right] = V_{4h} \\
a_h\left\{\frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt}) j_l'(k_{nst}r_a)\right. \\
\left. + \frac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt}) \frac{\sqrt{l(l+1)}\, j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right\} = W_{nh}(s,t)
\end{cases}
\tag{9.114}
$$

将式(9.104)按照 h 的取值方式展开,得到方程组[1]

$$
\begin{cases}
U_{41}B_1^s + V_{41}C_1^s - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{1st}W_{11}(s,t) \\
- \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{2st}W_{21}(s,t) - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{3st}W_{31}(s,t) = -I_{41} \\
\cdots \\
U_{4H_{\max}}B_{H_{\max}}^s + V_{4H_{\max}}C_{H_{\max}}^s - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{1st}W_{1H_{\max}}(s,t) \\
- \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{2st}W_{2H_{\max}}(s,t) - \sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{3st}W_{3H_{\max}}(s,t) = -I_{4H_{\max}}
\end{cases}
\tag{9.115}
$$

在式(9.105)中,用 h 来代替 m 和 l 后,可以令

$$
\begin{cases}
\dfrac{a}{\omega}B_h^i\dfrac{\mu}{k_{1s}}\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}j_l(k_{1s}r_a)+\dfrac{l^2+l-2}{r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)\right] \\
+\dfrac{b}{\omega}C_h^i\dfrac{2\mu}{k_{1c}}\left[\dfrac{1}{r_a}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1c}r_a)-\dfrac{1}{r_a^2}j_l(k_{1c}r_a)\right]=I_{5h} \\
\dfrac{1}{\omega}\dfrac{\mu}{k_{1s}}\left[\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+\dfrac{l^2+l-2}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]=U_{5h} \\
\dfrac{1}{\omega}\dfrac{2\mu}{k_{1c}}\left[\dfrac{1}{r_a}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)-\dfrac{1}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]=V_{5h} \\
a_h\left\{\dfrac{\mathrm{j}}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})\dfrac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right. \\
\left.+\dfrac{\mathrm{j}}{r}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_l'(k_{nst}r_a)+\dfrac{j_l(k_{nst}r_a)}{k_{nst}r_a}\right]\right\}=J_{nh}(s,t)
\end{cases}
\tag{9.116}
$$

将式(9.105)按照 h 的取值方式展开,得到方程组[1]

$$
\begin{cases}
U_{51}B_1^s+V_{51}C_1^s-\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}J_{11}(s,t) \\
-\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}J_{21}(s,t)-\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}J_{31}(s,t)=-I_{51} \\
\cdots \\
U_{5H_{\max}}B_{H_{\max}}^s+V_{5H_{\max}}C_{H_{\max}}^s-\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}J_{1H_{\max}}(s,t) \\
-\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}J_{2H_{\max}}(s,t)-\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}J_{3H_{\max}}(s,t)=-I_{5H_{\max}}
\end{cases}
\tag{9.117}
$$

在式(9.106)中,用 h 来代替 m 和 l 后,可以令

$$
\begin{cases}
\dfrac{a}{\omega}A_h^i\mu\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}j_l(k_{1s}r_a)-\dfrac{1}{r_a}j_l(k_{1s}r_a)\right]=I_{6h} \\
\dfrac{1}{\omega}\mu\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)-\dfrac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\right]=U_{6h} \\
a_h\dfrac{1}{r}\dfrac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_h(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{nst}r_a)=K_{nh}(s,t)
\end{cases}
\tag{9.118}
$$

将(9.106)按照 h 的取值方式展开,得到方程组

$$
\begin{cases}
U_{61}A_1^s+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}K_{11}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}K_{21}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}K_{31}(s,t)=-I_{61} \\
\cdots \\
U_{6H_{\max}}A_{H_{\max}}^s+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{1st}K_{1H_{\max}}(s,t) \\
+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{2st}K_{2H_{\max}}(s,t)+\sum\limits_{s=0}^{S}\sum\limits_{t=0}^{T}c_{3st}K_{3H_{\max}}(s,t)=-I_{6H_{\max}}
\end{cases}
\tag{9.119}
$$

至此,已经得到了按 h 取值方式展开的六个方程组,通过观察不难发现,这六个方程组中的待求量之间存在一定的耦合关系。如果将所有的待求量写在同一个待求向量里,就可以将六个方程组组合起来,表示成矩阵乘向量的形式,构成一个总的线性方程组。

这六个方程涉及的待求量有 c_{1st},c_{2st},c_{3st},A_{bm}^{s},B_{bm}^{s},C_{bm}^{s},将六个方程组联立写成矩阵形式后,这些待求量都占据着相应的位置。在改写方程过程中,某一方程遇到未涉及的其他方程的待求量,一律采用填零占位的方式。最后得到方程组的矩阵形式为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 的上半部分为[1]

$$
\left[\begin{array}{l}
0\ 0\ \cdots\ 0\ U_{11}\ \ 0\ \cdots\ 0\ V_{11}\ \ 0\ \cdots\ 0 \\
X_{11}(0,0)\ X_{11}(0,1)\ \cdots\ X_{11}(0,T)\ X_{11}(1,0)\ X_{11}(1,1)\ \cdots\ X_{11}(1,T)\ \cdots\ X_{11}(S,0)\ X_{11}(S,1)\ \cdots\ X_{11}(S,T) \\
X_{21}(0,0)\ X_{21}(0,1)\ \cdots\ X_{21}(0,T)\ X_{21}(1,0)\ X_{21}(1,1)\ \cdots\ X_{21}(1,T)\ \cdots\ X_{21}(S,0)\ X_{21}(S,1)\ \cdots\ X_{21}(S,T) \\
X_{31}(0,0)\ X_{31}(0,1)\ \cdots\ X_{31}(0,T)\ X_{31}(1,0)\ X_{31}(1,1)\ \cdots\ X_{31}(1,T)\ \cdots\ X_{31}(S,0)\ X_{31}(S,1)\ \cdots\ X_{31}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ U_{1H_{\max}}\ \ 0\ 0\ \cdots\ V_{1H_{\max}} \\
X_{1H_{\max}}(0,0)\ X_{1H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ X_{1H_{\max}}(0,T)\ X_{1H_{\max}}(1,0)\ X_{1H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ X_{1H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ X_{1H_{\max}}(S,0)\ X_{1H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ X_{1H_{\max}}(S,T) \\
X_{2H_{\max}}(0,0)\ X_{2H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ X_{2H_{\max}}(0,T)\ X_{2H_{\max}}(1,0)\ X_{2H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ X_{2H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ X_{2H_{\max}}(S,0)\ X_{2H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ X_{2H_{\max}}(S,T) \\
X_{3H_{\max}}(0,0)\ X_{3H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ X_{3H_{\max}}(0,T)\ X_{3H_{\max}}(1,0)\ X_{3H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ X_{3H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ X_{3H_{\max}}(S,0)\ X_{3H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ X_{3H_{\max}}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ 0\ U_{21}\ \ 0\ \cdots\ 0\ V_{21}\ \ 0\ \cdots\ 0 \\
Y_{11}(0,0)\ Y_{11}(0,1)\ \cdots\ Y_{11}(0,T)\ Y_{11}(1,0)\ Y_{11}(1,1)\ \cdots\ Y_{11}(1,T)\ \cdots\ Y_{11}(S,0)\ Y_{11}(S,1)\ \cdots\ Y_{11}(S,T) \\
Y_{21}(0,0)\ Y_{21}(0,1)\ \cdots\ Y_{21}(0,T)\ Y_{21}(1,0)\ Y_{21}(1,1)\ \cdots\ Y_{21}(1,T)\ \cdots\ Y_{21}(S,0)\ Y_{21}(S,1)\ \cdots\ Y_{21}(S,T) \\
Y_{31}(0,0)\ Y_{31}(0,1)\ \cdots\ Y_{31}(0,T)\ Y_{31}(1,0)\ Y_{31}(1,1)\ \cdots\ Y_{31}(1,T)\ \cdots\ Y_{31}(S,0)\ Y_{31}(S,1)\ \cdots\ Y_{31}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ U_{2H_{\max}}\ \ 0\ 0\ \cdots\ V_{2H_{\max}} \\
Y_{1H_{\max}}(0,0)\ Y_{1H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ Y_{1H_{\max}}(0,T)\ Y_{1H_{\max}}(1,0)\ Y_{1H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ Y_{1H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ Y_{1H_{\max}}(S,0)\ Y_{1H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ Y_{1H_{\max}}(S,T) \\
Y_{2H_{\max}}(0,0)\ Y_{2H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ Y_{2H_{\max}}(0,T)\ Y_{2H_{\max}}(1,0)\ Y_{2H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ Y_{2H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ Y_{2H_{\max}}(S,0)\ Y_{2H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ Y_{2H_{\max}}(S,T) \\
Y_{3H_{\max}}(0,0)\ Y_{3H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ Y_{3H_{\max}}(0,T)\ Y_{3H_{\max}}(1,0)\ Y_{3H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ Y_{3H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ Y_{3H_{\max}}(S,0)\ Y_{3H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ Y_{3H_{\max}}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
U_{31}\ \ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \\
-Z_{11}(0,0)\ -Z_{11}(0,1)\ \cdots\ -Z_{11}(0,T)\ -Z_{11}(1,0)\ -Z_{11}(1,1)\ \cdots\ -Z_{11}(1,T)\ \cdots\ -Z_{11}(S,0)\ -Z_{11}(S,1)\ \cdots\ -Z_{11}(S,T) \\
-Z_{21}(0,0)\ -Z_{21}(0,1)\ \cdots\ -Z_{21}(0,T)\ -Z_{21}(1,0)\ -Z_{21}(1,1)\ \cdots\ -Z_{21}(1,T)\ \cdots\ -Z_{21}(S,0)\ -Z_{21}(S,1)\ \cdots\ -Z_{21}(S,T) \\
-Z_{31}(0,0)\ -Z_{31}(0,1)\ \cdots\ -Z_{31}(0,T)\ -Z_{31}(1,0)\ -Z_{31}(1,1)\ \cdots\ -Z_{31}(1,T)\ \cdots\ -Z_{31}(S,0)\ -Z_{31}(S,1)\ \cdots\ -Z_{31}(S,T) \\
\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ U_{3H_{\max}}\ \ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \\
-Z_{1H_{\max}}(0,0)\ -Z_{1H_{\max}}(0,1)\cdots -Z_{1H_{\max}}(0,T)\ -Z_{1H_{\max}}(1,0)\ -Z_{1H_{\max}}(1,1)\cdots Z_{1H_{\max}}(1,T)\cdots -Z_{1H_{\max}}(S,0)\ -Z_{1H_{\max}}(S,1)\cdots -Z_{1H_{\max}}(S,T) \\
-Z_{2H_{\max}}(0,0)\ -Z_{2H_{\max}}(0,1)\cdots -Z_{2H_{\max}}(0,T)\ -Z_{2H_{\max}}(1,0)\ -Z_{2H_{\max}}(1,1)\cdots Z_{2H_{\max}}(1,T)\cdots -Z_{2H_{\max}}(S,0)\ -Z_{2H_{\max}}(S,1)\cdots -Z_{2H_{\max}}(S,T) \\
-Z_{3H_{\max}}(0,0)\ -Z_{3H_{\max}}(0,1)\cdots -Z_{3H_{\max}}(0,T)\ -Z_{3H_{\max}}(1,0)\ -Z_{3H_{\max}}(1,1)\cdots Z_{3H_{\max}}(1,T)\cdots -Z_{3H_{\max}}(S,0)\ -Z_{3H_{\max}}(S,1)\cdots -Z_{3H_{\max}}(S,T)
\end{array}\right]
$$

下半部分为

$$
\left[\begin{array}{l}
0\ 0\ \cdots\ 0\ U_{41}\ \ 0\ \cdots\ 0\ V_{41}\ \ 0\ \cdots\ 0 \\
-W_{11}(0,0)\ -W_{11}(0,1)\ \cdots\ -W_{11}(0,T)\ -W_{11}(1,0)\ -W_{11}(1,1)\ \cdots\ -W_{11}(1,T)\ \cdots\ -W_{11}(S,0)\ -W_{11}(S,1)\ \cdots\ -W_{11}(S,T) \\
-W_{21}(0,0)\ -W_{21}(0,1)\ \cdots\ -W_{21}(0,T)\ -W_{21}(1,0)\ -W_{21}(1,1)\ \cdots\ -W_{21}(1,T)\ \cdots\ -W_{21}(S,0)\ -W_{21}(S,1)\ \cdots\ -W_{21}(S,T) \\
-W_{31}(0,0)\ -W_{31}(0,1)\ \cdots\ -W_{31}(0,T)\ -W_{31}(1,0)\ -W_{31}(1,1)\ \cdots\ -W_{31}(1,T)\ \cdots\ -W_{31}(S,0)\ -W_{31}(S,1)\ \cdots\ -W_{31}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ U_{4H_{\max}}\ \ 0\ 0\ \cdots\ V_{4H_{\max}} \\
-W_{1H_{\max}}(0,0)\ -W_{1H_{\max}}(0,1)\cdots -W_{1H_{\max}}(0,T)\ -W_{1H_{\max}}(1,0)\ -W_{1H_{\max}}(1,1)\cdots -W_{1H_{\max}}(1,T)\cdots -W_{1H_{\max}}(S,0)\ -W_{1H_{\max}}(S,1)\cdots -W_{1H_{\max}}(S,T) \\
-W_{2H_{\max}}(0,0)\ -W_{2H_{\max}}(0,1)\cdots -W_{2H_{\max}}(0,T)\ -W_{2H_{\max}}(1,0)\ -W_{2H_{\max}}(1,1)\cdots -W_{2H_{\max}}(1,T)\cdots -W_{2H_{\max}}(S,0)\ -W_{2H_{\max}}(S,1)\cdots -W_{2H_{\max}}(S,T) \\
-W_{3H_{\max}}(0,0)\ -W_{3H_{\max}}(0,1)\cdots -W_{3H_{\max}}(0,T)\ -W_{3H_{\max}}(1,0)\ -W_{3H_{\max}}(1,1)\cdots -W_{3H_{\max}}(1,T)\cdots -W_{3H_{\max}}(S,0)\ -W_{3H_{\max}}(S,1)\cdots -W_{3H_{\max}}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ 0\ U_{51}\ \ 0\ \cdots\ 0\ V_{51}\ \ 0\ \cdots\ 0 \\
-J_{11}(0,0)\ -J_{11}(0,1)\ \cdots\ -J_{11}(0,T)\ -J_{11}(1,0)\ -J_{11}(1,1)\ \cdots\ -J_{11}(1,T)\ \cdots\ -J_{11}(S,0)\ -J_{11}(S,1)\ \cdots\ -J_{11}(S,T) \\
-J_{21}(0,0)\ -J_{21}(0,1)\ \cdots\ -J_{21}(0,T)\ -J_{21}(1,0)\ -J_{21}(1,1)\ \cdots\ -J_{21}(1,T)\ \cdots\ -J_{21}(S,0)\ -J_{21}(S,1)\ \cdots\ -J_{21}(S,T) \\
-J_{31}(0,0)\ -J_{31}(0,1)\ \cdots\ -J_{31}(0,T)\ -J_{31}(1,0)\ -J_{31}(1,1)\ \cdots\ -J_{31}(1,T)\ \cdots\ -J_{31}(S,0)\ -J_{31}(S,1)\ \cdots\ -J_{31}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\cdots 0\ 0\ 0\cdots U_{5H_{\max}}\ \ 0\ 0\cdots V_{5H_{\max}} \\
-J_{1H_{\max}}(0,0)\ -J_{1H_{\max}}(0,1)\cdots -J_{1H_{\max}}(0,T)\ -J_{1H_{\max}}(1,0)\ -J_{1H_{\max}}(1,1)\cdots -J_{1H_{\max}}(1,T)\cdots -J_{1H_{\max}}(S,0)\ -J_{1H_{\max}}(S,1)\cdots -J_{1H_{\max}}(S,T) \\
-J_{2H_{\max}}(0,0)\ -J_{2H_{\max}}(0,1)\cdots -J_{2H_{\max}}(0,T)\ -J_{2H_{\max}}(1,0)\ -J_{2H_{\max}}(1,1)\cdots -J_{2H_{\max}}(1,T)\cdots -J_{2H_{\max}}(S,0)\ -J_{2H_{\max}}(S,1)\cdots -J_{2H_{\max}}(S,T) \\
-J_{3H_{\max}}(0,0)\ -J_{3H_{\max}}(0,1)\cdots -J_{3H_{\max}}(0,T)\ -J_{3H_{\max}}(1,0)\ -J_{3H_{\max}}(1,1)\cdots -J_{3H_{\max}}(1,T)\cdots -J_{3H_{\max}}(S,0)\ -J_{3H_{\max}}(S,1)\cdots -J_{3H_{\max}}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
U_{61}\ \ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \\
K_{11}(0,0)\ K_{11}(0,1)\ \cdots\ K_{11}(0,T)\ K_{11}(1,0)\ K_{11}(1,1)\ \cdots\ K_{11}(1,T)\ \cdots\ K_{11}(S,0)\ K_{11}(S,1)\ \cdots\ K_{11}(S,T) \\
K_{21}(0,0)\ K_{21}(0,1)\ \cdots\ K_{21}(0,T)\ K_{21}(1,0)\ K_{21}(1,1)\ \cdots\ K_{21}(1,T)\ \cdots\ K_{21}(S,0)\ K_{21}(S,1)\ \cdots\ K_{21}(S,T) \\
K_{31}(0,0)\ K_{31}(0,1)\ \cdots\ K_{31}(0,T)\ K_{31}(1,0)\ K_{31}(1,1)\ \cdots\ K_{31}(1,T)\ \cdots\ K_{31}(S,0)\ K_{31}(S,1)\ \cdots\ K_{31}(S,T) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\vdots \\
0\ 0\ \cdots\ U_{6H_{\max}}\ \ 0\ 0\ \cdots\ 0\ 0\ 0\ \cdots\ 0 \\
K_{1H_{\max}}(0,0)\ K_{1H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ K_{1H_{\max}}(0,T)\ K_{1H_{\max}}(1,0)\ K_{1H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ K_{1H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ K_{1H_{\max}}(S,0)\ K_{1H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ K_{1H_{\max}}(S,T) \\
K_{2H_{\max}}(0,0)\ K_{2H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ K_{2H_{\max}}(0,T)\ K_{2H_{\max}}(1,0)\ K_{2H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ K_{2H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ K_{2H_{\max}}(S,0)\ K_{2H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ K_{2H_{\max}}(S,T) \\
K_{3H_{\max}}(0,0)\ K_{3H_{\max}}(0,1)\ \cdots\ K_{3H_{\max}}(0,T)\ K_{3H_{\max}}(1,0)\ K_{3H_{\max}}(1,1)\ \cdots\ K_{3H_{\max}}(1,T)\ \cdots\ K_{3H_{\max}}(S,0)\ K_{3H_{\max}}(S,1)\ \cdots\ K_{3H_{\max}}(S,T)
\end{array}\right]
$$

待求向量 $\boldsymbol{x}$ 可写成

$$
\begin{array}{c}
[A_1^s, A_2^s, \cdots, A_{H_{\max}}^s, B_1^s, B_2^s, \cdots, B_{H_{\max}}^s, C_1^s, C_2^s, \cdots, C_{H_{\max}}^s \\
c_{100}, c_{101}, \cdots, c_{10T}, c_{110}, c_{111}, \cdots, c_{11T}, \cdots, c_{1S0}, c_{1S2}, \cdots, c_{1ST} \\
c_{200}, c_{201}, \cdots, c_{20T}, c_{210}, c_{211}, \cdots, c_{21T}, \cdots, c_{2S0}, c_{2S2}, \cdots, c_{2ST} \\
c_{300}, c_{301}, \cdots, c_{30T}, c_{310}, c_{311}, \cdots, c_{31T}, \cdots, c_{3S0}, c_{3S1}, \cdots, c_{3ST}]
\end{array}
$$

而常数向量 $\boldsymbol{b}$ 可写成

$$
\begin{array}{c}
[-I_{11}, \cdots, -I_{1H_{\max}}, -I_{21}, \cdots, -I_{2H_{\max}}, -I_{31}, \cdots, -I_{3H_{\max}} \\
-I_{41}, \cdots, -I_{4H_{\max}}, -I_{51}, \cdots, -I_{5H_{\max}}, -I_{61}, \cdots, -I_{6H_{\max}}]
\end{array}
$$

采用上述的标记方法，对于讨论问题和编程实现都十分方便。将六个方程按 h 标记方式裂变展开，矩阵的行数按 h 计算，矩阵的列数按 h,s,t 计算。最后得到系数矩阵的维数为 $6H_{\max}$ 行、$3H_{\max}+3(S+1)(T+1)$ 列，其中 $H_{\max}=L_{\max}(L_{\max}+2)$。

9.4 数值结果[1]

9.4.1 散射截面

理论上,波在一个无限的均匀介质里,是以常速度沿着固定路线不受干扰地向前传播的。但若有障碍物嵌入介质,波的传播路线就会发生变化,即在其他的、未受干扰的入射波的作用之下,障碍物将起到一个次生波源的作用,该次生波源将产生径向的外行波。波同它原来的传播路径发生偏离的现象就是众所周知的衍射,而异质物(障碍物)上发射出次生波的现象被称作散射。

对于球形状来说,通过球体表面的时间平均能通量与入射波在单位面积上时间平均能通量的比值即为散射截面。依据波函数法的散射截面公式[30],S 波入射的散射截面公式为

$$
\begin{aligned}
Q_s &= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{|\boldsymbol{V}_s^S|^2}{|\boldsymbol{V}_i|^2} = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \, |\boldsymbol{V}_s^S|^2 \\
&= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm}^s \boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^s \boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})] \right|^2 \\
&= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \Big[A_{lm}^s \boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) \right. \\
&\quad \left. + B_{lm}^s \left\{ l(l+1) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{k_{1s}\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{k_{1s}\boldsymbol{r}} \frac{\mathrm{d}[r b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}r} \right\} \Big] \right|^2
\end{aligned}
\tag{9.120}
$$

因为,当 $r\to\infty$ 时

$$
\begin{cases}
b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) \approx \dfrac{\mathrm{j}^{l+1}}{k_{1s}\boldsymbol{r}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \\
\dfrac{\mathrm{d}[b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}k_{1s}\boldsymbol{r}} \approx \mathrm{j}^{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \cdot \dfrac{-\mathrm{j}}{k_{1s}\boldsymbol{r}} + \mathrm{j}^{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \cdot \dfrac{-1}{(k_{1s}\boldsymbol{r})^2} \\
\dfrac{1}{k_{1s}\boldsymbol{r}} \dfrac{\mathrm{d}[r b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}r} = \dfrac{b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{k_{1s}\boldsymbol{r}} + \dfrac{\mathrm{d}[b_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}k_{1s}\boldsymbol{r}}
\end{cases}
\tag{9.121}
$$

将式(9.121)代入式(9.120)得

$$
\begin{aligned}
Q_s &= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \Big[A_{lm}^s \boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{\mathrm{j}^{l+1}}{k_{1s}\boldsymbol{r}} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} + B_{lm}^s \Big[l(l+1) \boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{\mathrm{j}^{l+1}}{(k_{1s}\boldsymbol{r})^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \right. \\
&\quad \left. + \boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi) \left\{ \frac{\mathrm{j}^{l+1}}{(k_{1s}\boldsymbol{r})^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} + \mathrm{j}^{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \cdot \frac{-\mathrm{j}}{k_{1s}\boldsymbol{r}} + \mathrm{j}^{l+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \cdot \frac{-1}{(k_{1s}\boldsymbol{r})^2} \right\} \Big] \Big] \right|^2 \\
&= \frac{4\pi}{{k_{1s}}^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm}^s \boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{j}^{l+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} + B_{lm}^s \boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{j}^{l+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1s}r} \cdot (-\mathrm{j})] \right|^2 \\
&= \frac{4\pi}{{k_{1s}}^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} [A_{lm}^s \boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{j}^{l+1} + B_{lm}^s \boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{j}^{l}] \right|^2
\end{aligned}
\tag{9.122}
$$

令 $\varphi=0$,θ 在 $[0,\pi]$ 中变化,就能得到 xOz 平面内的散射截面;令 $\varphi=90°$,θ 在 $[0,\pi]$ 中变化,就能得到 yOz 平面内的散射截面。

同理,可得 P 波入射的散射截面为

$$
\begin{aligned}
Q_p &= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \frac{|\boldsymbol{V}_s^P|^2}{|\boldsymbol{V}_i|^2} = \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \, |\boldsymbol{V}_s^P|^2 \\
&= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} [C_{lm}^s \boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})] \right|^2 \\
&= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \left[C_{lm}^s \left\{ \boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{k_{1c}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}[b_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})] + \boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{1}{k_{1c}\boldsymbol{r}}[b_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})] \right\} \right] \right|^2 \\
&= \lim_{r\to\infty} 4\pi r^2 \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} \left[C_{lm}^s \left\{ \boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{j}^{l+1} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1c}\boldsymbol{r}} \frac{-\mathrm{j}}{k_{1c}\boldsymbol{r}} + \boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi) \frac{\mathrm{j}^{l+1}}{(k_{1c}\boldsymbol{r})^2} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k_{1c}\boldsymbol{r}} \right\} \right] \right|^2 \\
&= \frac{4\pi}{k_{1c}{}^2} \left| \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l} C_{lm}^s \boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi) \mathrm{j}^l \right|^2
\end{aligned} \tag{9.123}
$$

同理,令 $\varphi=0$,θ 在$[0,\pi]$中变化,就能得到 xOz 平面内的散射截面;令 $\varphi=90°$,θ 在$[0,\pi]$中变化,就能得到 yOz 平面内的散射截面。

9.4.2 各向异性单层球的散射截面

1. 波函数简化方法的退化

第 9.3 节的理论公式的推导已经提供了用于求解散射系数所必需的方程组。这一节里将要提供所求散射系数的数值结果。

各向同性弹性介质是各向异性弹性介质的特例,为了验证波函数简化方法求解各向异性弹性介质球的正确性,首先将其应用于各向同性球的分析,如图 9.5 所示。

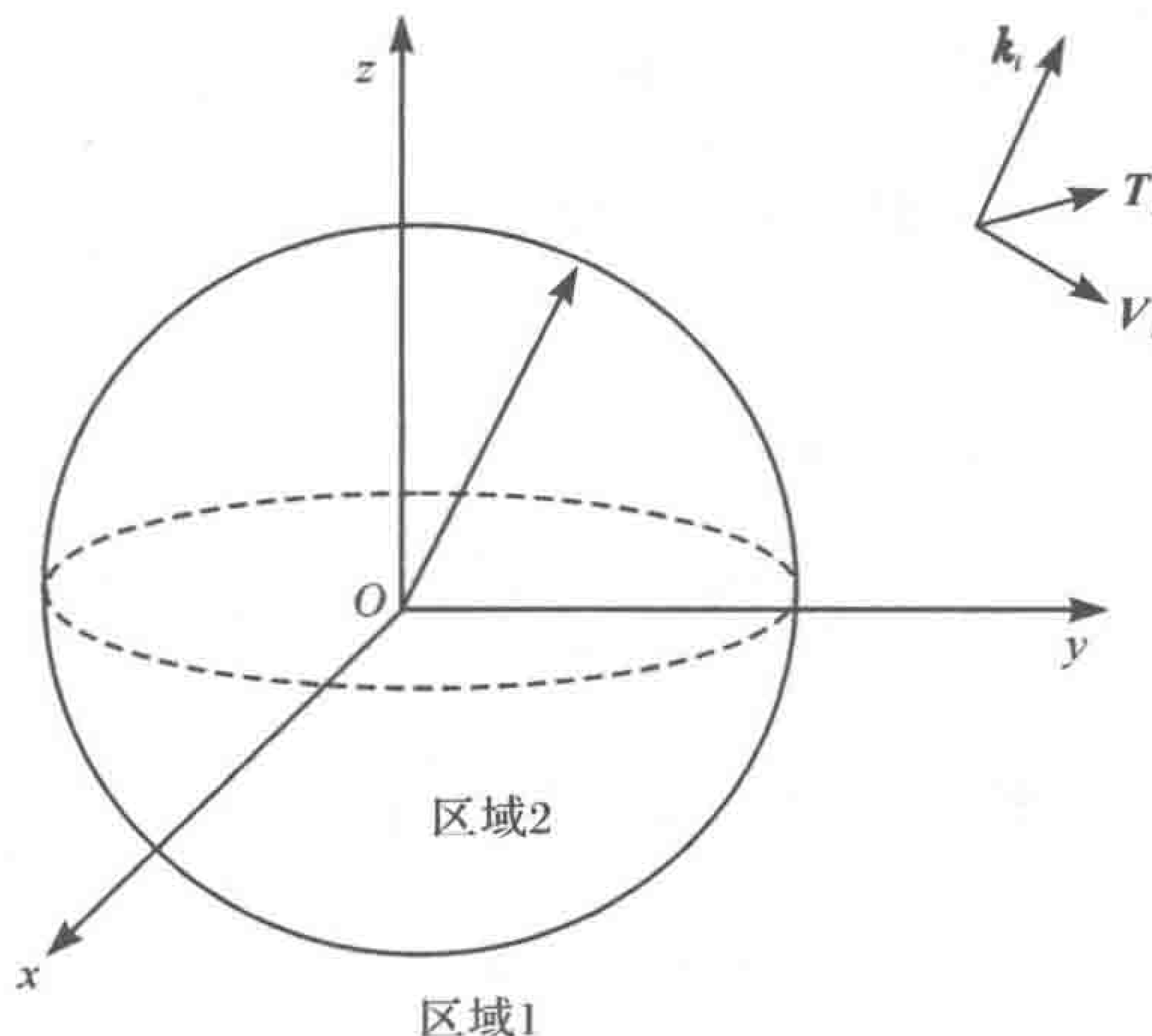


图 9.5　平面波入射到单层球

假设球内部(区域 2)的介质为各向同性,弹性波在该区域的波数为 k_{2s},k_{2c},单层球内部区域(区域 2)的速度场、应力场(法向)用球矢量波函数展开为

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{V}_2 = \sum\limits_{l,m} [A_{lm}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})] \\
\boldsymbol{T}_{2r} = -\dfrac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum\limits_{l,m} [A_{lm}\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})]
\end{cases} \tag{9.124}
$$

式中，A_{lm}，B_{lm}，C_{lm}是待定系数，$\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{2s}r)$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{2s}r)$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{2c}r)$已在 9.1 节给出定义。

区域 1 内的场表达式在 9.2 节或 9.3 节已给出，此处不再赘述。根据弹性波场的边界条件

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_2\\ \boldsymbol{T}_1\cdot\hat{\boldsymbol{r}}=\boldsymbol{T}_2\cdot\hat{\boldsymbol{r}}\end{cases}\tag{9.125}$$

将区域 1、2 的场量表达式代入边界条件，可得[1]

$$\begin{aligned}&\sum_{l,m}\left[aA_{lm}^{i}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB_{lm}^{i}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC_{lm}^{i}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\&+\sum_{l,m}\left[A_{lm}^{s}\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^{s}\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^{s}\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\&-\sum_{l,m}\left[A_{lm}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+B_{lm}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+C_{lm}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]=0\end{aligned}\tag{9.126}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l,m}\left[aA_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+aB_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+bC_{lm}^{i}\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\&-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l,m}\left[A_{lm}^{s}\boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^{s}\boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^{s}\boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\&+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l,m}\left[A_{lm}\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+B_{lm}\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+C_{lm}\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]=0)\end{aligned}\tag{9.127}$$

将$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rM}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rM}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rN}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$，$\boldsymbol{T}_{rL}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$等定义式代入式(9.126)、式(9.127)，整理化简得

$$\begin{aligned}&\sum_{l,m}\{aA_{lm}^{i}j_l(k_{1s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\&+aB_{lm}^{i}\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\right\}\\&+bC_{lm}^{i}\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{1c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\}+\sum_{l,m}\{A_{lm}^{s}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\&+B_{lm}^{s}\left\{\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\right\}\\&+C_{lm}^{s}\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\}-\sum_{l,m}\{A_{lm}j_l(k_{2s}r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\&+B_{lm}\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right]\right\}\\&+C_{lm}\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{2c}r_a)+\frac{\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a}\right]\}=0\end{aligned}\tag{9.128}$$

$$\begin{aligned}&-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l,m}\left\{aA_{lm}^{i}\mu_1\left[\frac{\partial j_l(k_{1s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.\\&+aB_{lm}^{i}\left\{\frac{2\mu_1 l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\right.\\&\left.+\frac{\mu_1}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)+\frac{\partial^2[j_l(k_{1s}r_a)]}{\partial r^2}\right\}\right\}\\&+bC_{lm}^{i}\left\{\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda_1k_{1c}^2j_l(k_{1c}r_a)+2\mu_1\frac{\partial^2 j_l(k_{1c}r_a)}{\partial r^2}\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{2\mu_1}{k_{1c}r_a}\left[\frac{\partial j_l(k_{1c}r_a)}{\partial r}-\frac{1}{r_a}j_l(k_{1c}r_a)\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Bigg\}\Bigg\}\\
&-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l,m}\Bigg\{A^s_{lm}\mu_1\left[\frac{\partial h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{\partial r}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+B^s_{lm}\Bigg\{\frac{2\mu_1 l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\\
&+\frac{\mu_1}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{\partial^2[h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)]}{\partial r^2}\right\}\Bigg\}\\
&+C^s_{lm}\Bigg\{\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda_1k_{1c}^2h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu_1\frac{\partial^2h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{\partial r^2}\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+\frac{2\mu_1}{k_{1c}r_a}\left[\frac{\partial h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{\partial r}-\frac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Bigg\}\Bigg\}\\
&+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l,m}\Bigg\{A_{lm}\mu_2\left[\frac{\partial j_l(k_{2s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{r_a}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+B_{lm}\Bigg\{\frac{2\mu_2 l(l+1)}{k_{2s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{r_a}\right]\\
&+\frac{\mu_2}{k_{2s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+\frac{\partial^2[j_l(k_{2s}r_a)]}{\partial r^2}\right\}\Bigg\}\\
&+C_{lm}\Bigg\{\frac{1}{k_{2c}}\left[-\lambda_2k_{2c}^2j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2\frac{\partial^2j_l(k_{2c}r_a)}{\partial r^2}\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+\frac{2\mu_2}{k_{2c}r_a}\left[\frac{\partial j_l(k_{2c}r_a)}{\partial r}-\frac{1}{r_a}j_l(k_{2c}r_a)\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Bigg\}\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{9.129}
$$

由于$\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$构成正交函数集,式中$\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$,$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$的每个系数都必须为零。由式(9.130)的$\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,可得

$$
\begin{aligned}
&aB^i_{lm}\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+bC^i_{lm}j_l'(k_{1c}r_a)+B^s_{lm}\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}+C^s_{lm}h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)\\
&+B_{lm}\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}+C_{lm}j_l'(k_{2c}r_a)=0
\end{aligned}
\tag{9.130}
$$

由式(9.128)中$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,可得

$$
\begin{aligned}
&aB^i_{lm}\left[j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]+bC^i_{lm}\frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}+B^s_{lm}\left[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\\
&+C^s_{lm}\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}+B_{lm}\left[j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right]+C_{lm}\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a}=0
\end{aligned}
\tag{9.131}
$$

由式(9.128)中$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,可得

$$
aA^i_{lm}j_l(k_{1s}r_a)+A^s_{lm}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+A_{lm}j_l(k_{2s}r_a)=0 \tag{9.132}
$$

由式(9.129)中$\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,得

$$
\begin{aligned}
&-\left\{B^i_{lm}\frac{2a\mu_1 l(l+1)}{k_{1s}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]+C^i_{lm}\frac{b}{k_{1c}}\left[-\lambda_1k_{1c}^2j_l(k_{1c}r_a)+2\mu_1\frac{\partial^2j_l(k_{1c}r_a)}{\partial r^2}\right]\right\}\\
&-\left\{B^s_{lm}\frac{2\mu_1 l(l+1)}{k_{1s}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]+C^s_{lm}\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda_1k_{1c}^2h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu_1\frac{\partial^2h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{\partial r^2}\right]\right\}
\end{aligned}
$$

$$+\left\{B_{lm}\frac{2\mu_2 l(l+1)}{k_{2s}}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{r_a}\right]+C_{lm}\frac{1}{k_{2c}}\left[-\lambda_2 k_{2c}^2 j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2\frac{\partial^2 j_l(k_{2c}r_a)}{\partial r^2}\right]\right\}=0 \tag{9.133}$$

由式(9.129)中 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,可得

$$\begin{aligned}
&-\left\{\frac{a\mu_1}{k_{1s}}B_{lm}^i\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)+\frac{\partial^2[j_l(k_{1s}r_a)]}{\partial r^2}\right\}+C_{lm}^i\frac{2b\mu_1}{k_{1c}r_a}\left[\frac{\partial j_l(k_{1c}r_a)}{\partial r}-\frac{1}{r_a}j_l(k_{1c}r_a)\right]\right\}\\
&-\left\{B_{lm}^s\frac{\mu_1}{k_{1s}}\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{\partial^2[h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)]}{\partial r^2}\right\}+C_{lm}\frac{2\mu_1}{k_{1c}r_a}\left[\frac{\partial h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{\partial r}-\frac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\right]\right\}\\
&+\left\{B_{lm}\frac{\mu_2}{k_{2s}}\left\{\frac{(l^2+l-2)}{r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+\frac{\partial^2[j_l(k_{2s}r_a)]}{\partial r^2}\right\}+C_{lm}\frac{2\mu_2}{k_{2c}r_a}\left[\frac{\partial j_l(k_{2c}r_a)}{\partial r}-\frac{1}{r}j_l(k_{2c}r_a)\right]\right\}=0
\end{aligned} \tag{9.134}$$

由式(9.129)中 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$的系数为零,可得

$$\begin{aligned}
&-aA_{lm}^i\mu_1\left[\frac{\partial j_l(k_{1s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]-A_{lm}^s\mu_1\left[\frac{\partial h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{\partial r}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]\\
&+A_{lm}\mu_2\left[\frac{\partial j_l(k_{2s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{r_a}\right]=0
\end{aligned} \tag{9.135}$$

求解由上述六个方程构成的线性方程组,就得到未知向量$\{A_{lm}^s,B_{lm}^s,C_{lm}^s,A_{lm},B_{lm},C_{lm}\}$。散射系数 $A_{lm}^s,B_{lm}^s,C_{lm}^s$ 如下:

$$A_{lm}^s=\frac{-aA_{lm}^i\left\{j_l(k_{2s}r_a)\mu_1\left[\frac{\partial j_l(k_{1s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]+j_l(k_{1s}r_a)\mu_2\left[\frac{\partial j_l(k_{2s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{r_a}\right]\right\}}{j_l(k_{2s}r_a)\mu_1\left[\frac{\partial h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{\partial r}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}\right]+h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)\mu_2\left[\frac{\partial j_l(k_{2s}r_a)}{\partial r}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{r_a}\right]} \tag{9.136}$$

$B_{lm}^s=\dfrac{B_{lm}^1}{B_{lm}^2}$,其中 B_{lm}^1,B_{lm}^2 的表达式为

$$\begin{aligned}
B_{lm}^1=&\left[\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2s}k_{2c}r_a^2}-j_l'(k_{2c}r_a)j_l'(k_{2s}r_a)-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right]\\
&\cdot\Big\{\mu_1k_{1c}(2\mu_1h_l''^{(2)}(k_{1c}r_a)-\lambda_1h_l^{(2)}(k_{1c}r_a))\\
&\cdot\left[2bC_{lm}^i\left(\frac{j_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\right)+aB_{lm}^i\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)+k_{1s}j_l''(k_{1s}r_a)\right)\right]\\
&+2\mu_1\left(\frac{h_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\right)\\
&\cdot\left[2\mu_1l(l+1)aB_{lm}^i\left(\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}-\frac{j_l'(k_{1s}r_a)}{r_a}\right)+k_{1c}bC_{lm}^i(\lambda_1j_l(k_{1c}r_a)-2\mu_1j_l''(k_{1c}r_a))\right]\Big\}\\
&+\left(\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a}-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right)\\
&\cdot\Big\{\mu_2\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\right)\\
&\cdot\left[2\mu_1l(l+1)aB_{lm}^i\left(\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}-\frac{j_l'(k_{1s}r_a)}{r_a}\right)+k_{1c}bC_{lm}^i(\lambda_1j_l(k_{1c}r_a)-2\mu_1j_l''(k_{1c}r_a))\right]\\
&+2\mu_1\mu_2l(l+1)\left(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left[2bC_{lm}^{i}\left(\frac{j_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\right)+aB_{lm}^{i}\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)+k_{1s}j_l''(k_{1s}r_a)\right)\right]\Big\}\\
&+\left[\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{2s}k_{1c}r_a^2}-h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l'(k_{2s}r_a)-\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right]\\
&\cdot\Big\{2\mu_2\left(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\right)\\
&\cdot\left[2\mu_1 l(l+1)aB_{lm}^{i}\left(\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}-\frac{j_l'(k_{1s}r_a)}{r_a}\right)+k_{1c}bC_{lm}^{i}(\lambda_1 j_l(k_{1c}r_a)-2\mu_1 j_l''(k_{1c}r_a))\right]\\
&+\mu_1 k_{2c}(-\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\\
&\cdot\left[2bC_{lm}^{i}\left(\frac{j_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\right)+aB_{lm}^{i}\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}j_l(k_{1s}r_a)+k_{1s}j_l''(k_{1s}r_a)\right)\right]\Big\}\\
&+\Big[4\mu_2^2 l(l+1)\left(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\right)\left(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\right)\\
&+k_{2c}\mu_2\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\right)(\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)-2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\Big]\\
&\cdot\Big\{aB_{lm}^{i}\left[h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}-\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1s}k_{1c}r_a^2}\right]\\
&+bC_{lm}^{i}\left[\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}-\frac{j_l'(k_{1c}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\Big\}\\
&+\Big[2\mu_2 k_{1c}(\lambda_1 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)-2\mu_1 h_l''^{(2)}(k_{1c}r_a))\left(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\right)\\
&+2\mu_1 k_{2c}(-\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\left(\frac{h_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\right)\Big]\times\Big\{aB_{lm}^{i}\\
&\left[\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\left(j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right)-\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\cdot\left(j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right)\right]\\
&+bC_{lm}^{i}\left[j_l'(k_{1c}r_a)j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l'(k_{1c}r_a)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}-\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{2s}k_{1c}r_a^2}\right]\Big\}\\
&+\Big[4\mu_1\mu_2 l(l+1)\left(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\right)\left(\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}-\frac{h_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}\right)\\
&+k_{1c}\mu_2\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\right)(-\lambda_1 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu_1 h_l''^{(2)}(k_{1c}r_a))\Big]\\
&\cdot\Big\{aB_{lm}^{i}\left[\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{1s}k_{2c}r_a^2}-j_l'(k_{2c}r_a)j_l'(k_{1s}r_a)-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\\
&+bC_{lm}^{i}\left[\frac{j_l'(k_{1c}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a}-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right]\Big\}
\end{aligned}
\tag{9.137}
$$

$$
\begin{aligned}
B_{lm}^{2}=&-\Big[4\mu_2^2 l(l+1)\left(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\right)\left(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\right)\\
&+k_{2c}\mu_2\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\right)(\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)-2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\Big]\\
&\cdot\left[h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}-\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1s}k_{1c}r_a^2}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Big[4\mu_1\mu_2 l(l+1)\Big(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\Big)\Big(\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}-\frac{h_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}\Big)\\
&+k_{1c}\mu_2\Big(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\Big)(-\lambda_1 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu_1 h_l''^{(2)}(k_{1c}r_a))\Big]\\
&\cdot\Big[j_l'(k_{2c}r_a)h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{j_l'(k_{2c}r_a)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}-\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{1s}k_{2c}r_a^2}\Big]\\
&+\Big[\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a}-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\Big]\\
&\cdot 2\mu_1\mu_2 l(l+1)\Big[\Big(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\Big)\Big(\frac{h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}\Big)\\
&-\Big(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+k_{1s}h_l''^{(2)}(k_{1s}r_a)\Big)\Big(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\Big)\Big]\\
&+\Big[h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{h_l'^{(2)}(k_{1c}r_a)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}-\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{2s}k_{1c}r_a^2}\Big]\\
&\cdot\Big[\mu_1 k_{2c}(-\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\Big(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+k_{1s}h_l''^{(2)}(k_{1s}r_a)\Big)\\
&-4\mu_1\mu_2 l(l+1)\Big(\frac{h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}\Big)\Big(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\Big)\Big]\\
&-\Big[k_{1c}\mu_1(-\lambda_1 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)+2\mu_1 h_l''^{(2)}(k_{1c}r_a))\Big(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+k_{1s}h_l''^{(2)}(k_{1s}r_a)\Big)\\
&-4\mu_1^2 l(l+1)\Big(\frac{h_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\Big)\Big(\frac{h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}\Big)\Big]\\
&\cdot\Big[\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2s}k_{2c}r_a^2}-j_l'(k_{2c}r_a)j_l'(k_{2s}r_a)-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\Big]\\
&+\Big\{\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\Big[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]\\
&-\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big[j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\Big]\\
&\cdot\Big[2\mu_2 k_{1c}(\lambda_1 h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)-2\mu_1 h_l''^{(2)}(k_{1c}r_a))\Big(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\Big)\\
&+2\mu_1 k_{2c}(-\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\Big(\frac{h_l'(k_{1c}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a^2}\Big)\Big]\Big\}
\end{aligned}\tag{9.138}
$$

$C_{lm}^s=\dfrac{C_{lm}^1}{C_{lm}^2}$,其中 C_{lm}^1,C_{lm}^2 的表达式为

$$
\begin{aligned}
C_{lm}^1=&-\Big\{\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\Big[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]\\
&-\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big[j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\Big]\\
&+bC_{lm}^i\Big[\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1s}k_{1c}r_a^2}-j_l'(k_{1c}r_a)h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)-\frac{j_l'(k_{1c}r_a)h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\Big]\Big\}\\
&-\Big[\mu_1 k_{2c}(-\lambda_2 j_l(k_{2c}r_a)+2\mu_2 j_l''(k_{2c}r_a))\Big(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+k_{1s}h_l''^{(2)}(k_{1s}r_a)\Big)
\end{aligned}
$$

$$
-4\mu_1\mu_2 l(l+1)\left(\frac{h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}\right)\left(\frac{j_l'(k_{2c}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a^2}\right)\Bigg]
$$

$$
\cdot\left\{aB_{lm}^i\left[\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\left(j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right)-\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}\right.\right.
$$

$$
\left.\cdot\left(j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right)\right]
$$

$$
\left.+bC_{lm}^i\left[j_l'(k_{1c}r_a)j_l'(k_{2s}r_a)+\frac{j_l'(k_{1c}r_a)j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a}-\frac{l(l+1)j_l(k_{2s}r_a)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{2s}k_{1c}r_a^2}\right]\right\}
$$

$$
-2\mu_1\mu_2 l(l+1)\left[\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{2s}r_a^2}j_l(k_{2s}r_a)+k_{2s}j_l''(k_{2s}r_a)\right)\left(\frac{h_l'^{(2)}(k_{1s}r_a)}{r_a}-\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a^2}\right)\right.
$$

$$
\left.-\left(\frac{(l^2+l-2)}{k_{1s}r_a^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_a)+k_{1s}h_l''^{(2)}(k_{1s}r_a)\right)\left(\frac{j_l'(k_{2s}r_a)}{r_a}-\frac{j_l(k_{2s}r_a)}{k_{2s}r_a^2}\right)\right]
$$

$$
\cdot\left\{aB_{lm}^i\left[\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{1s}k_{2c}r_a^2}-j_l'(k_{2c}r_a)j_l'(k_{1s}r_a)-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)j_l(k_{1s}r_a)}{k_{1s}r_a}\right]\right.
$$

$$
\left.+bC_{lm}^i\frac{j_l'(k_{1c}r_a)j_l(k_{2c}r_a)}{k_{2c}r_a}-\frac{j_l'(k_{2c}r_a)j_l(k_{1c}r_a)}{k_{1c}r_a}\right\} \tag{9.139}
$$

而其中的 $C_{lm}^2=B_{lm}^2$，具体表达式已在式(9.138)给出。

式(9.136)～(9.139)是各向同性单层球弹性波散射的解析解。各向异性介质波函数经退化处理，本征平面波解 $\boldsymbol{V}_n(k_{nst})$ 变成

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{V}_{1st}=\hat{\boldsymbol{x}}\sin\theta_{ks}\cos\varphi_{kt}+\hat{\boldsymbol{y}}\sin\theta_{ks}\sin\varphi_{kt}+\hat{\boldsymbol{z}}\cos\theta_{ks}\\
\boldsymbol{V}_{2st}=\hat{\boldsymbol{x}}\cos\theta_{ks}\cos\varphi_{kt}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\theta_{ks}\sin\varphi_{kt}-\hat{\boldsymbol{z}}\sin\theta_{ks}\\
\boldsymbol{V}_{3st}=-\hat{\boldsymbol{x}}\sin\varphi_{kt}+\hat{\boldsymbol{y}}\cos\varphi_{kt}
\end{cases} \tag{9.140}
$$

将退化后求得的数值结果，与根据以上各向同性球散射系数的解析解公式求得的数值结果进行比较，可验证波函数简化方法的正确性。

2. 各向同性单层球的散射截面

前面完成了各向同性单层球散射系数的解析解公式的推导过程。接下来将在式(9.136)的基础上，给出波函数简化方法退化到各向同性以后的数值结果，并且将这个结果与根据以上各向同性球散射系数的解析解公式求得的数值结果进行比较。

设各向同性单层球的尺寸参数为 $k_{1s}r_a=0.9$；区域1(介质为熔融石英)的劲度矩阵分量为 $c_{11}=7.85\times10^{10}\text{N/m}^2$，$c_{44}=3.12\times10^{10}\text{N/m}^2$，密度 $\rho=2200\text{kg/m}^3$；区域2(介质为聚乙烯)的劲度矩阵分量为 $c_{11}=0.34\times10^{10}\text{N/m}^2$，$c_{44}=0.026\times10^{10}\text{N/m}^2$，密度 $\rho=900\text{kg/m}^3$。

在此给出了两种方法得到的散射截面曲线比较[1]。在图9.6中包含了 xOz 和 yOz 平面的散射截面。在式(9.122)和式(9.123)中，令 $\varphi=0$，θ 在$[0,\pi]$中变化，就能得到 xOz 平面内的散射截面；令 $\varphi=90°$，θ 在$[0,\pi]$中变化，就能得到 yOz 平面内的散射截面。

各区域的参数保持不变，绘制中等尺寸的散射截面曲线比较图，见图9.7(P波 xOz 平面)、图9.8(P波 yOz 平面)、图9.9(S波 xOz 平面)、图9.10(S波 yOz 平面)。结合式(9.122)和式(9.123)，令 $\varphi=0$，θ 在$[0,\pi]$中变化，就能得到 xOz 平面(图9.7、图9.9)的散射截面图；令 $\varphi=90°$，θ 在$[0,\pi]$中变化，就能得到 yOz 平面(图9.8、图9.10)的散射截面图[1]。

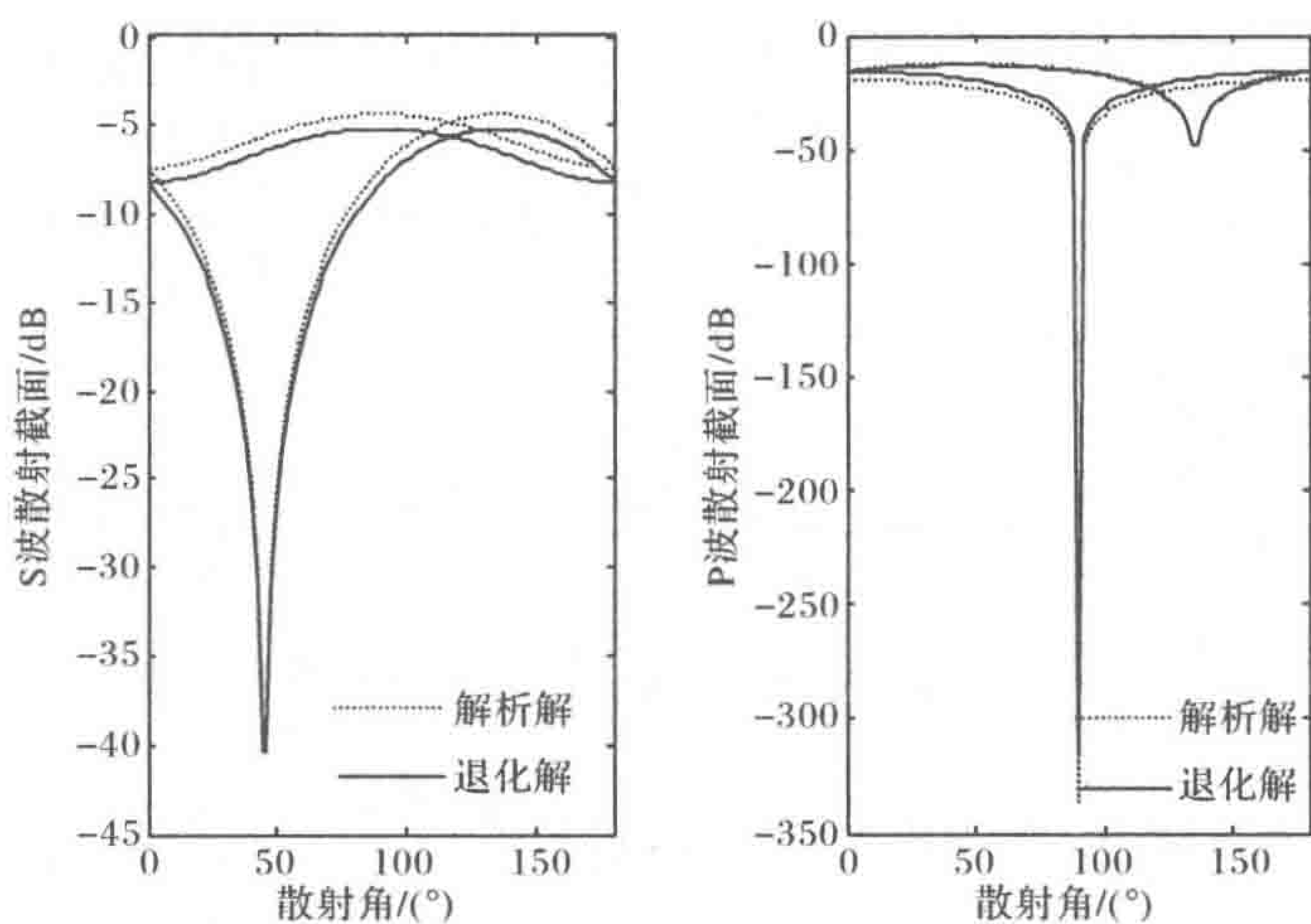


图 9.6 各向同性解析解与退化解比较(P 波入射)

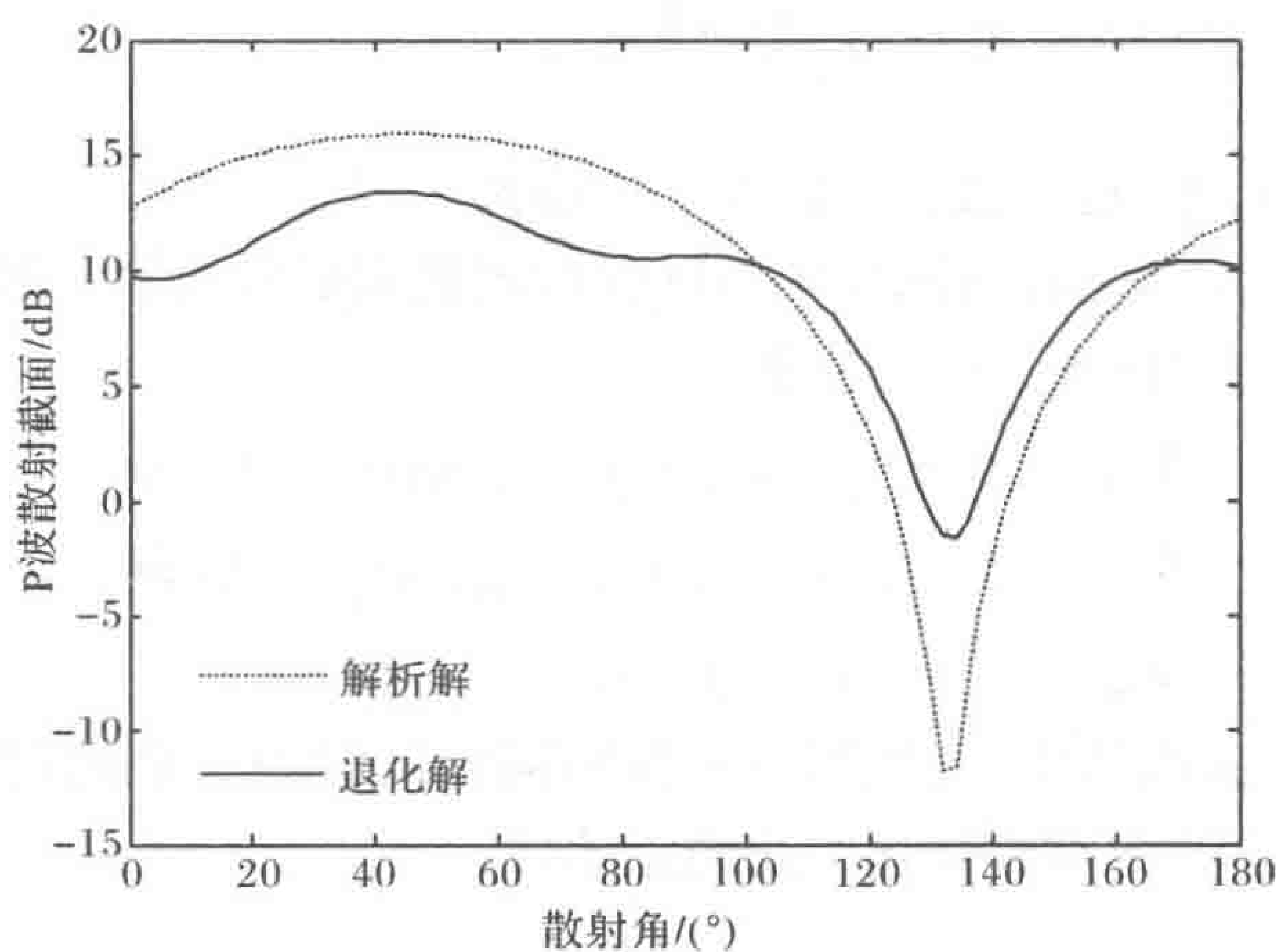


图 9.7 各向同性解析解和退化解比较(P 波 xOz 平面,$k_{1s}r_a=3.1$)

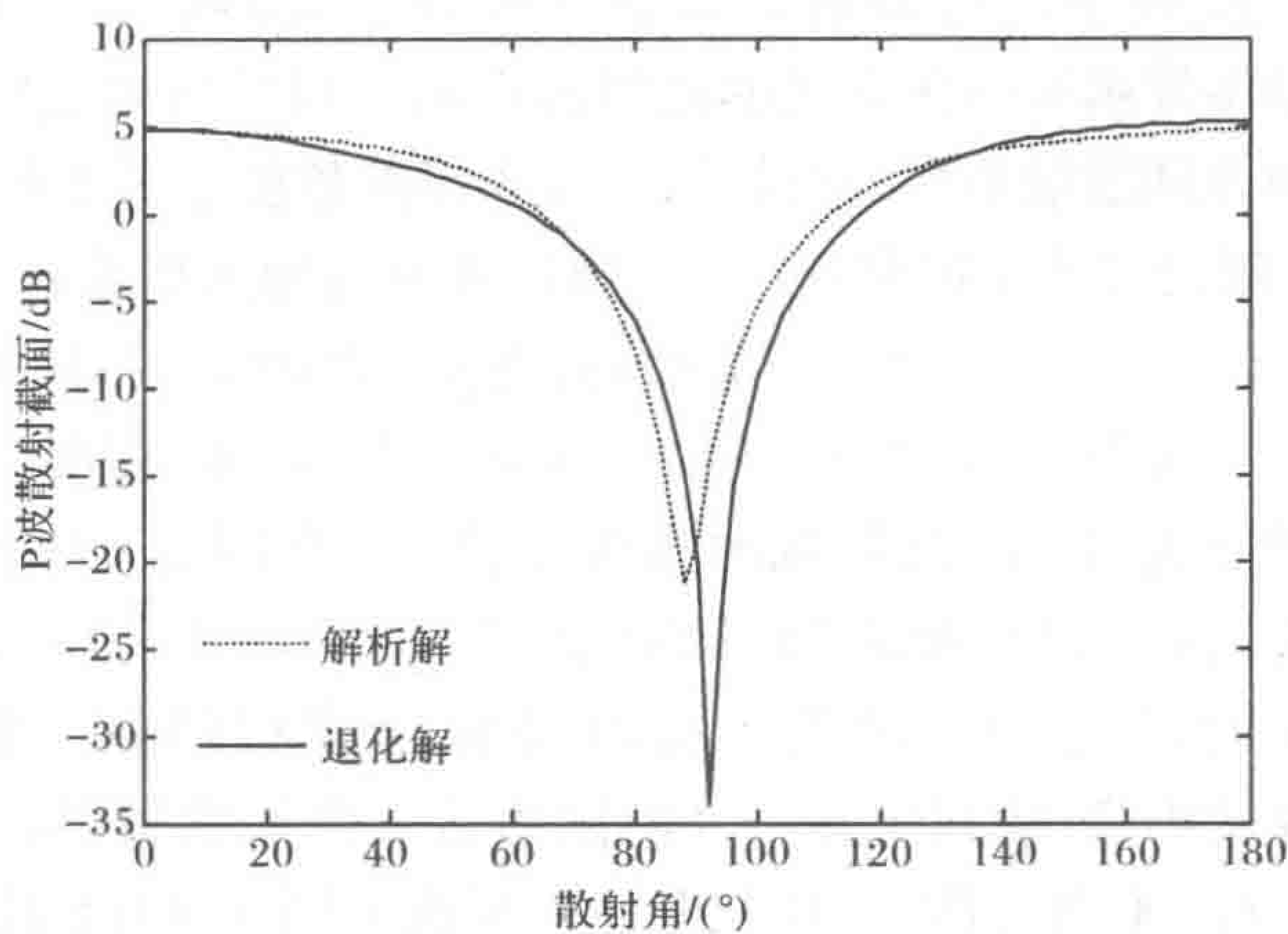


图 9.8 各向同性解析解和退化解比较(P 波 yOz 平面,$k_{1s}r_a=3.2$)

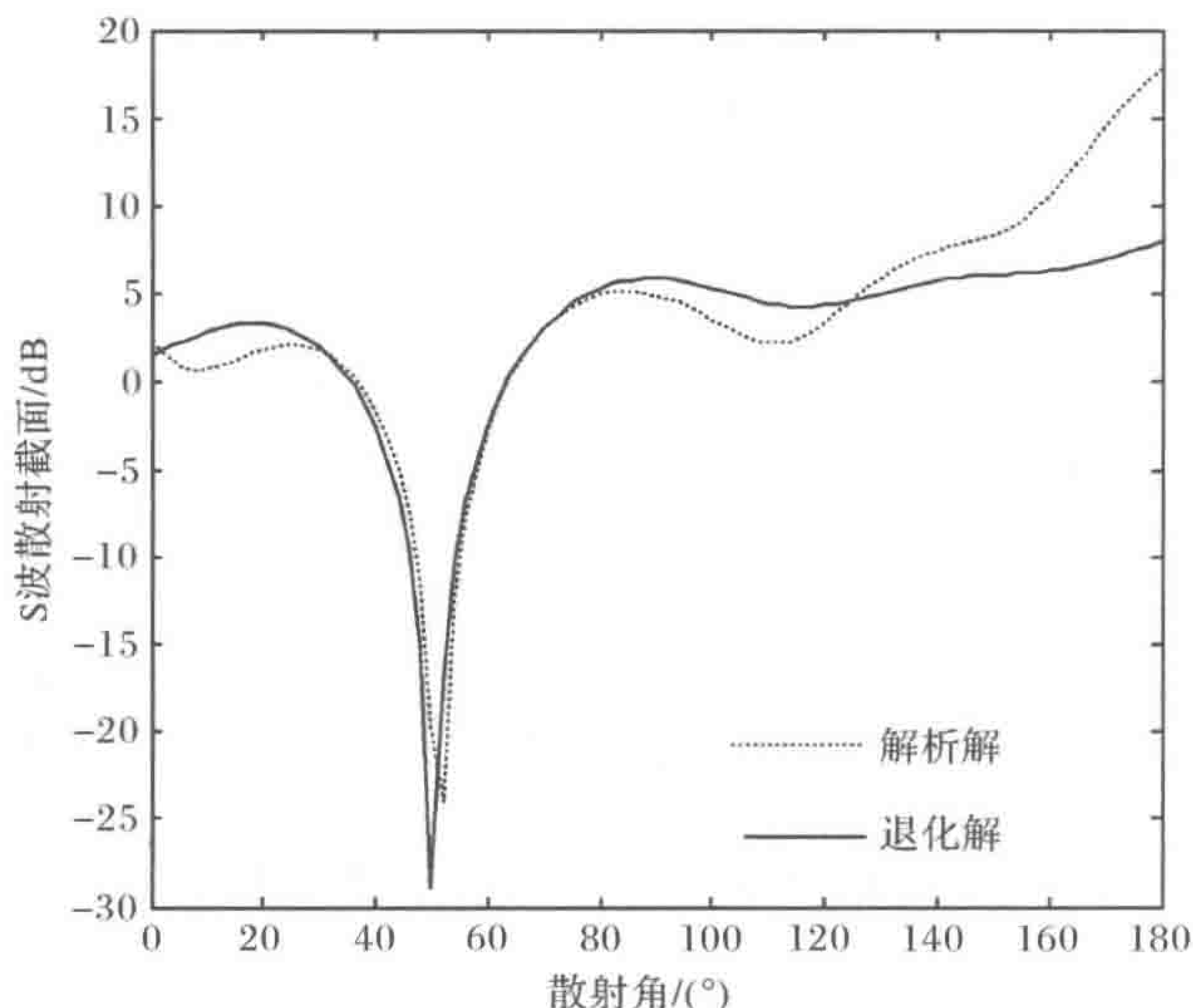


图 9.9　各向同性解析解和退化解比较(S 波 xOz 平面，$k_{1s}r_a=2.9$)

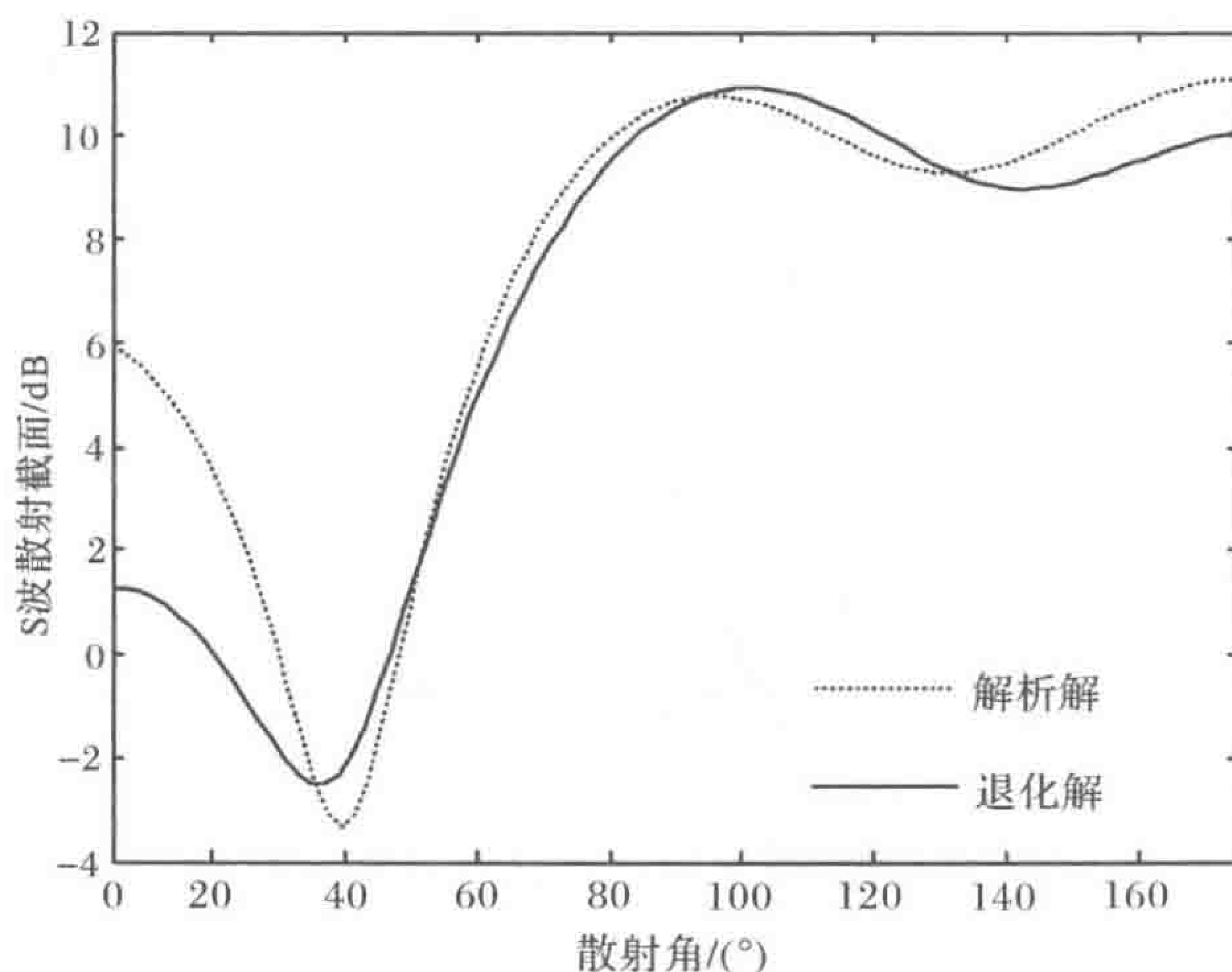


图 9.10　各向同性解析解和退化解比较(S 波 yOz 平面，$k_{1s}r_a=3.2$)

不难发现，两种方法得到的散射截面曲线结果是比较吻合的，不吻合地方的差值也是在误差允许范围之内。以上都是 P 波入射的散射截面比较图，入射 P 波 z 方向极化，入射角度 $\theta_i=\frac{\pi}{4}$，$\varphi_i=0$，由于篇幅有限，此处不再列出 S 波入射的散射截面比较图[1]。

在以上图形的基础上绘制了大尺寸：$k_{1s}r_a=6$(P 波入射、S 波入射各一例)，各个区域参数不变的散射截面曲线图，如图 9.11 和图 9.12 所示。

以上对几个具有代表性的散射截面曲线进行了比较，接下来作了关于退化解对于各向同性球计算的收敛性探讨。系数矩阵的运算是计算散射系数的一个重点，而 S 和 T 的取值是决定矩阵大小的因素。显然，S，T 太小了是不可行的，但 S，T 也不是越大越好。通过调试程序对散射截面的收敛区间做了研究，得到表 9.3。

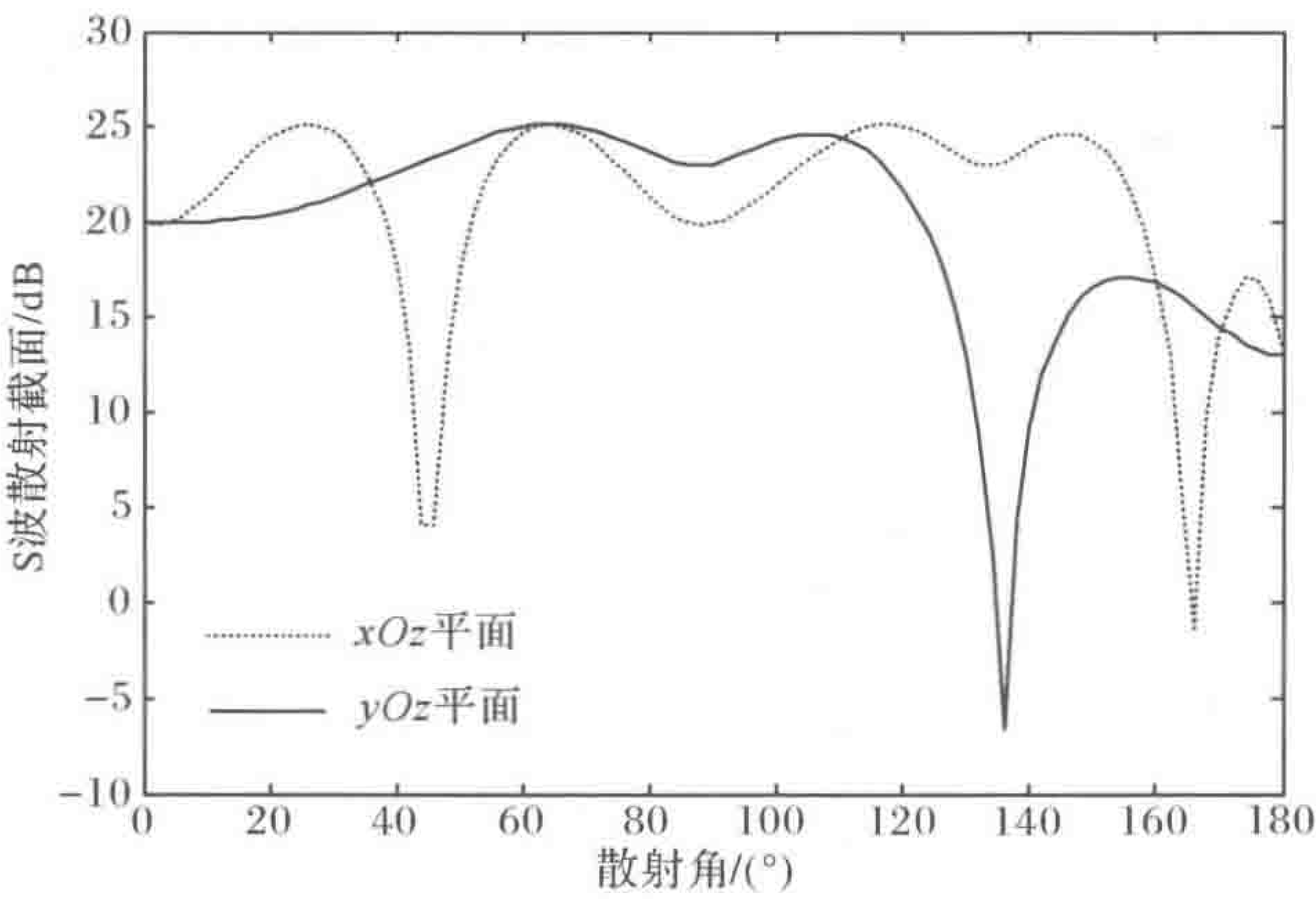


图 9.11　各向同性单层球的散射截面曲线(P 波入射)

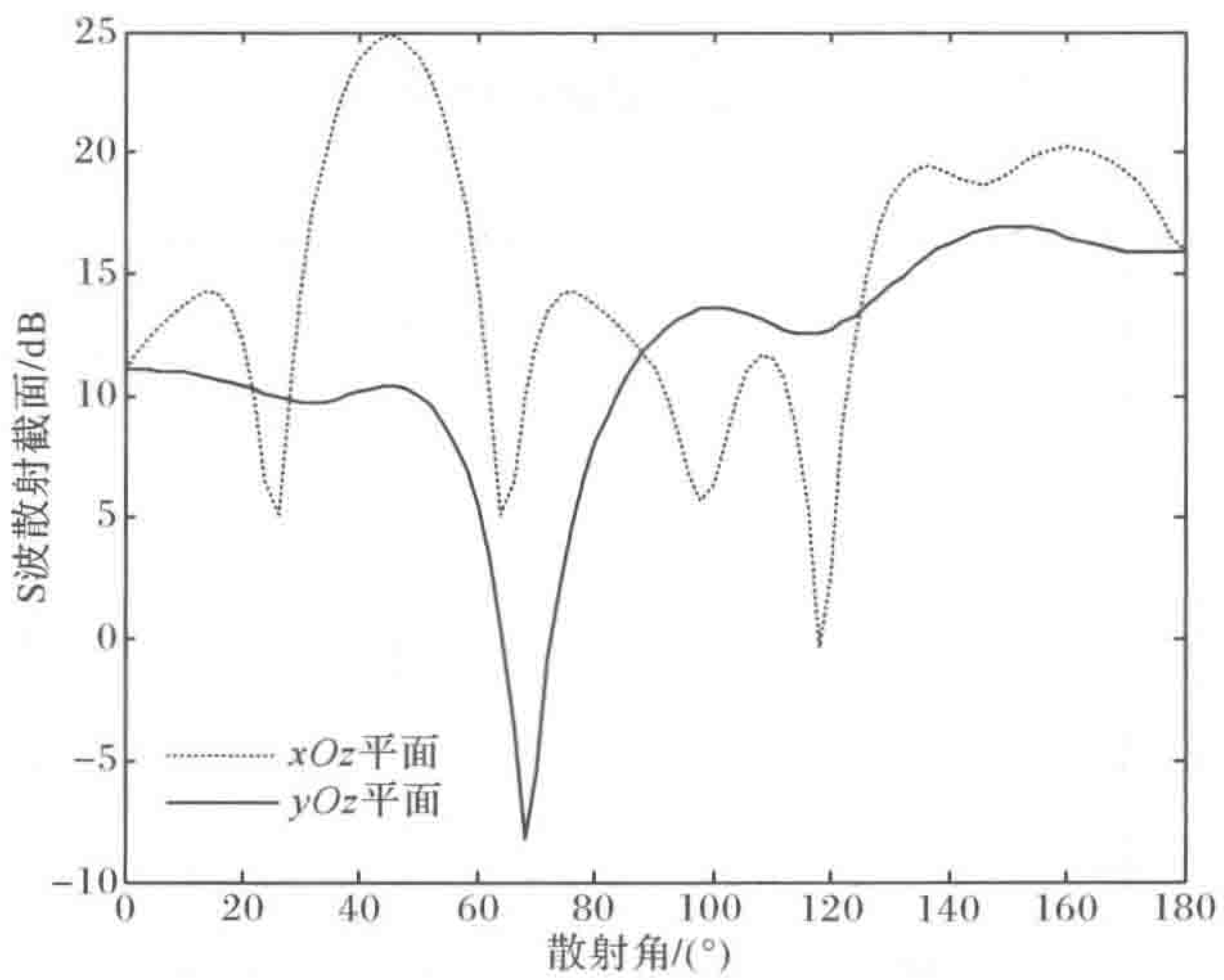


图 9.12　各向同性单层球的散射截面曲线(S 波入射)

表 9.3　退化解的收敛区间

$k_{1s}r_a$	$L_{\max}$	S	T
<1.0	1~2	3~5	6~10
1.0~1.6	3~4	5~7	10~14
1.6~2.1	4~6	6~8	12~16
2.1~4.4	6~8	8~10	16~20

在表 9.3 中,S,T 的取值是指能够收敛于各向同性解析解的较小值。例如 S 的取值 2~3 表示 S 在 2~3 这个范围内可以收敛到各向同性解析解,但如果比 2~3 大的值也同样可以收敛于各向同性解析解。

对于解来说,稳定性也是一个很重要的方面,它是衡量一个解正确性的重要因素。对解的稳定性进行了分析,如表 9.4 所示,对于两个不同尺寸的各向同性球,分别取不同的 $L_{\max}$,S,T 值,比较两个 $L_{\max}$,S,T 下的散射截面的数值结果。

表 9.4　退化解的稳定性检验(S 波 yOz 平面)

散射截面值 / 角度/(°)	$k_{1s}r_a=1.0$			
	$L=1$ $S=4$ $T=8$	$L=2$ $S=3$ $T=6$	$L=2$ $S=3$ $T=9$	$L=2$ $S=4$ $T=8$
0	−7.943	−7.483	−7.629	−7.629
20	−9.087	−8.535	−8.712	−8.730
40	−11.60	−11.25	−11.48	−11.53
60	−16.67	−17.27	−17.68	−17.82
80	−35.38	−37.71	−35.0	−33.87
100	−18.96	−16.44	−16.26	−16.12
120	−12.99	−11.84	−11.8	−11.72
140	−10.31	−9.97	−9.988	−9.938
160	−9.232	−9.547	−9.61	−9.584
180	−9.353	−10.2	−10.31	−10.31

从表 9.4 给出的数值结果可以很明显看出，在不同的 L,S,T 值下数值结果是稳定的。表 9.4 的结果值可以供其他数值方法的结果进行比较。

3. 各向异性单层球的散射截面

尽管能够退化用于各向同性球的分析，但是各向异性弹性介质波函数理论的优势在于处理各向异性球的弹性波散射。由于现有文献中，未有关于散射截面随入射角度 θ 变化的结果图，此处只给出角谱积分方法和波函数简化方法的比较图。

采用角谱积分方法和简化方法分别计算，两种方法的比较见图 9.13。两种方法的结果吻合较好，但角谱积分方法耗时甚长，效率低，波函数简化方法则快得多。

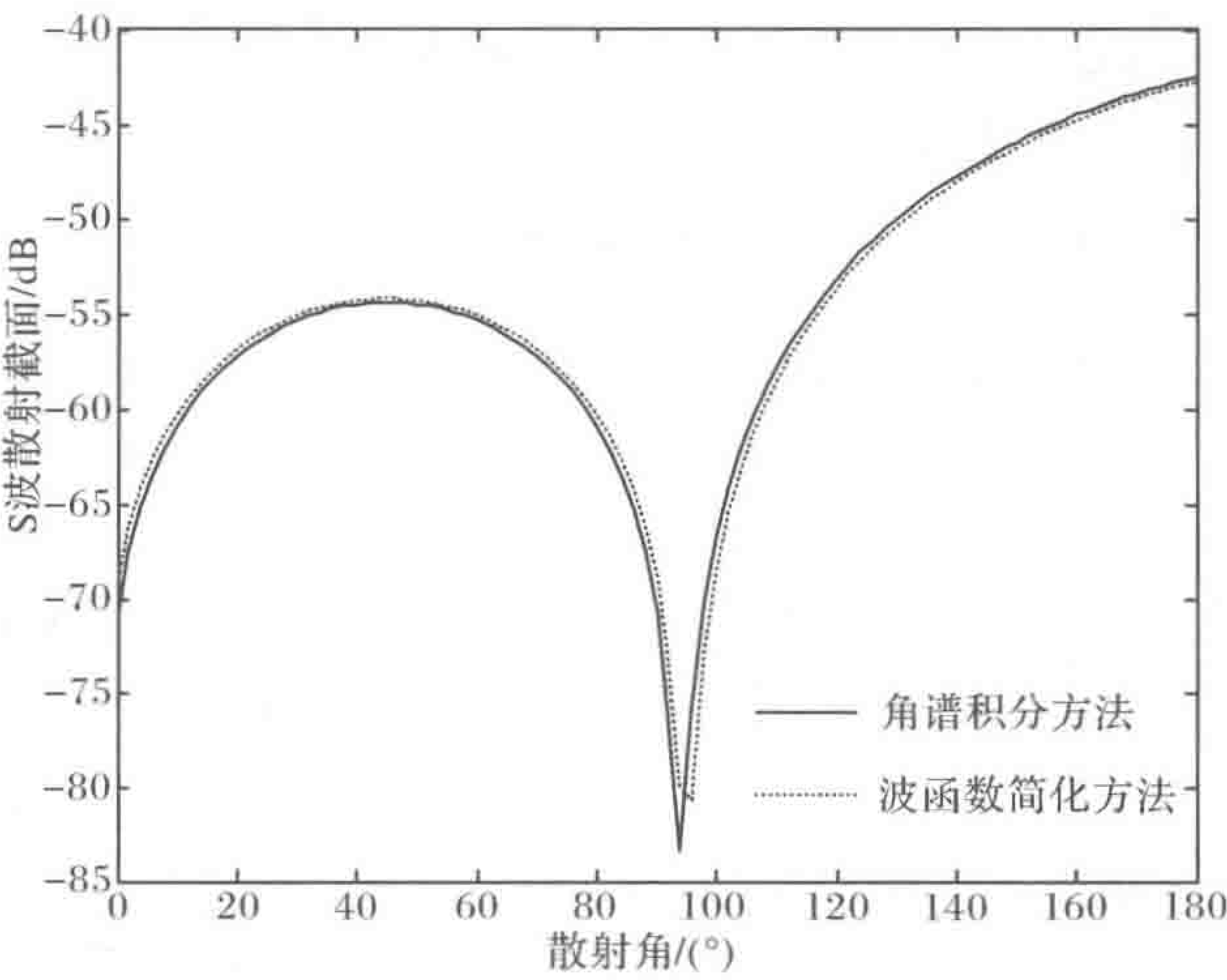


图 9.13　角谱积分方法和波函数简化方法的比较

为了考察入射方向(主要是 θ_i)对散射截面的影响，绘制了 P 波入射和 S 波入射两种

情况的散射截面图。各向异性弹性介质单层球的参数为:$k_{1s}r_a=0.9$;区域1(介质为聚乙烯)的劲度矩阵分量为 $c_{11}=0.34\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{44}=0.026\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,密度 $\rho=900\mathrm{kg/m^3}$;区域2(介质为铌酸钡钠)的劲度矩阵分量为 $c_{11}=23.9\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{22}=24.7\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{33}=13.5\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{44}=6.5\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{55}=6.6\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{66}=7.6\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{12}=10.4\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{13}=5.0\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,$c_{23}=5.2\times10^{10}\,\mathrm{N/m^2}$,密度 $\rho=5300\mathrm{kg/m^3}$。

图9.14是由P波入射得出的散射截面,可以看出,随着入射角度(θ_i)的增大,前端和后端散射截面越来越低,而散射截面中的峰值则越来越大。不管入射角度如何变化,前端和后端散射截面始终相等。

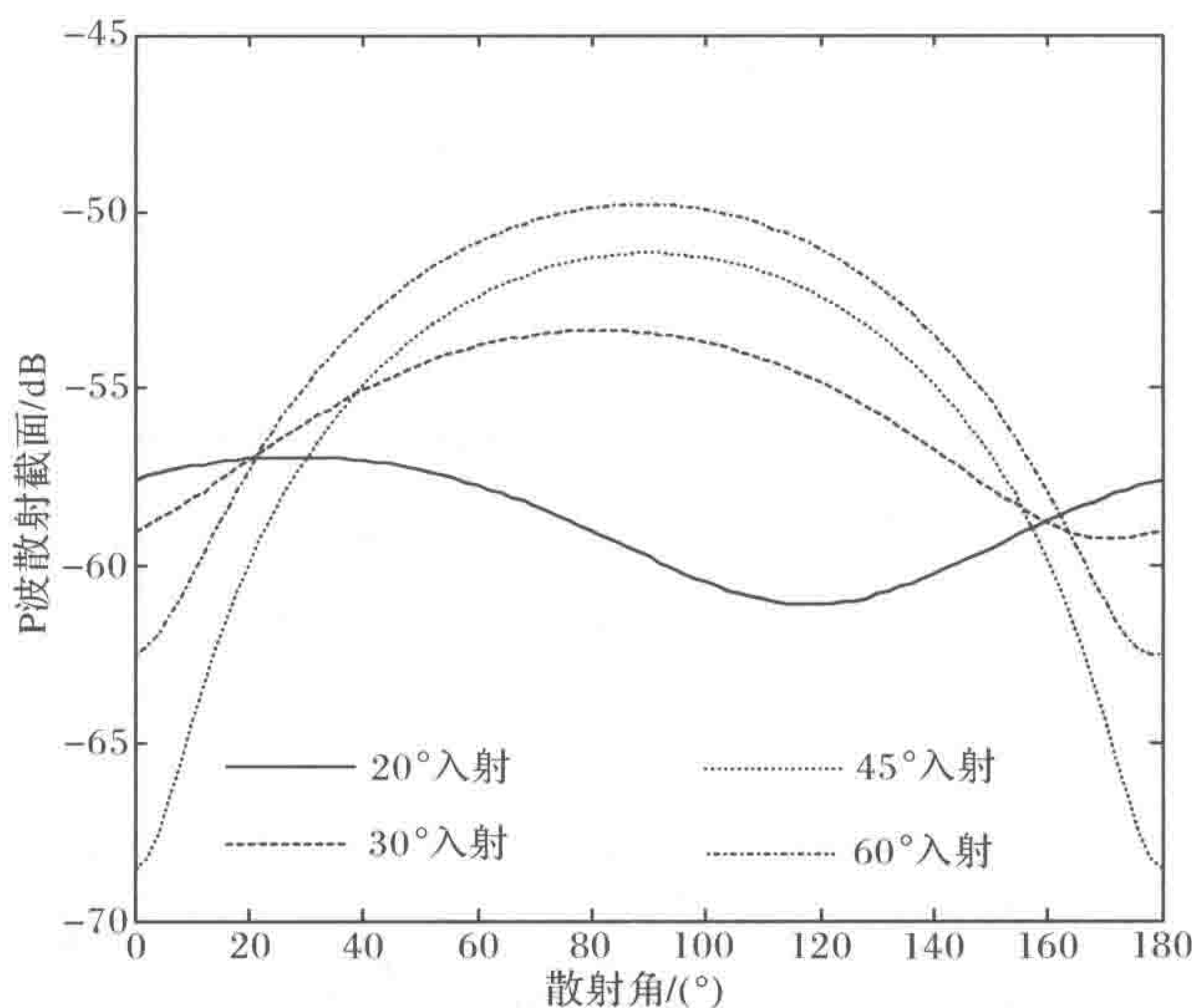


图9.14 入射方向对散射截面的影响(P波 xOz 平面)

图9.15也是由P波入射得出的散射截面,可以看出,随着入射角度(θ_i)的增大,前端和后端散射截面越来越低,而出现峰值部分的散射角则向前推移。不管入射角度如何变化,前端和后端散射截面始终相等。

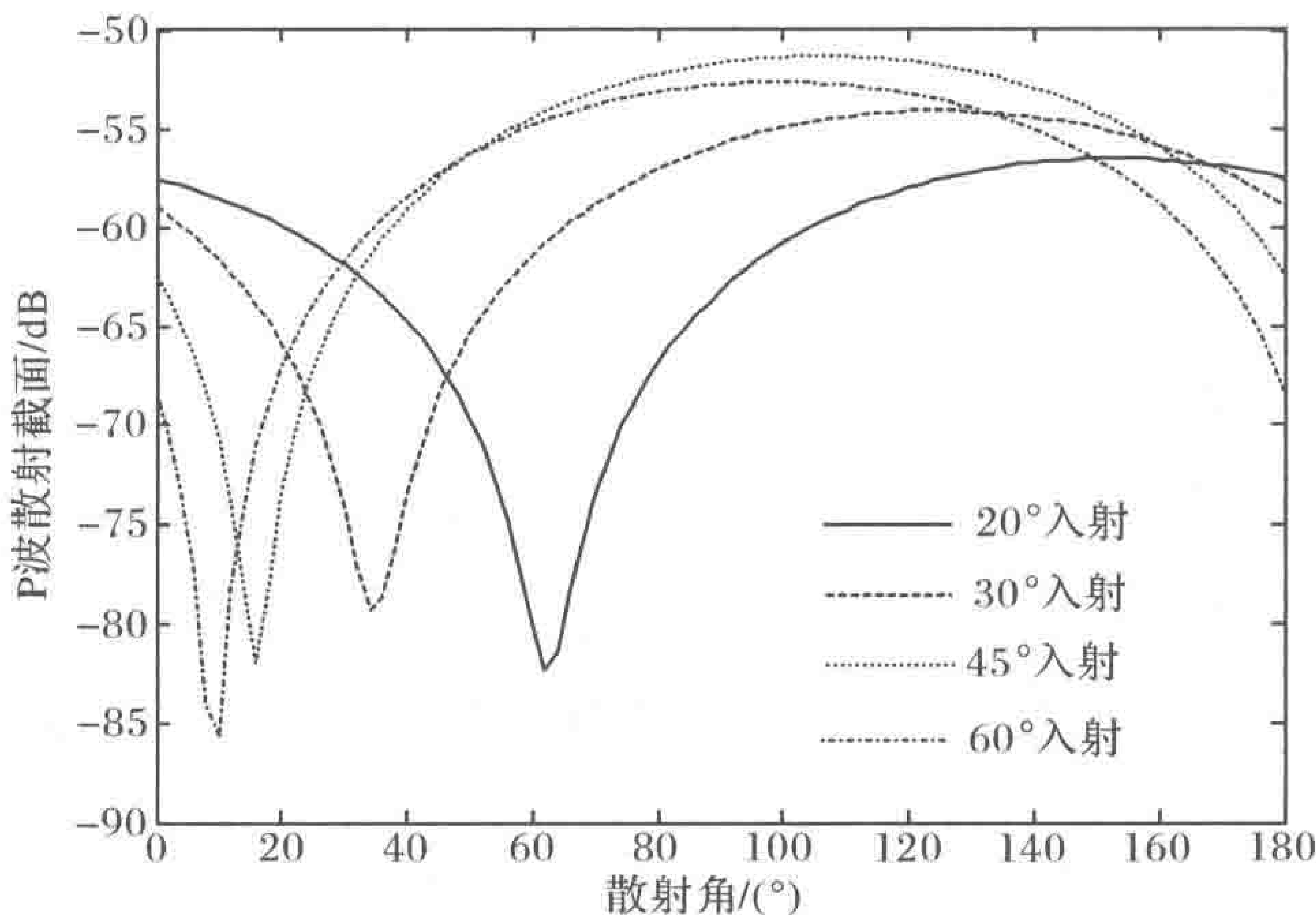


图9.15 入射方向对散射截面的影响(P波 yOz 平面)

图 9.16 是由 P 波入射得出的散射截面，可以看出，入射角度的变化不影响散射截面的曲线，只是不同的入射角度，散射截面曲线高低不同而已。观察图 9.16 和图 9.17，可以看出这两个图是一致的。

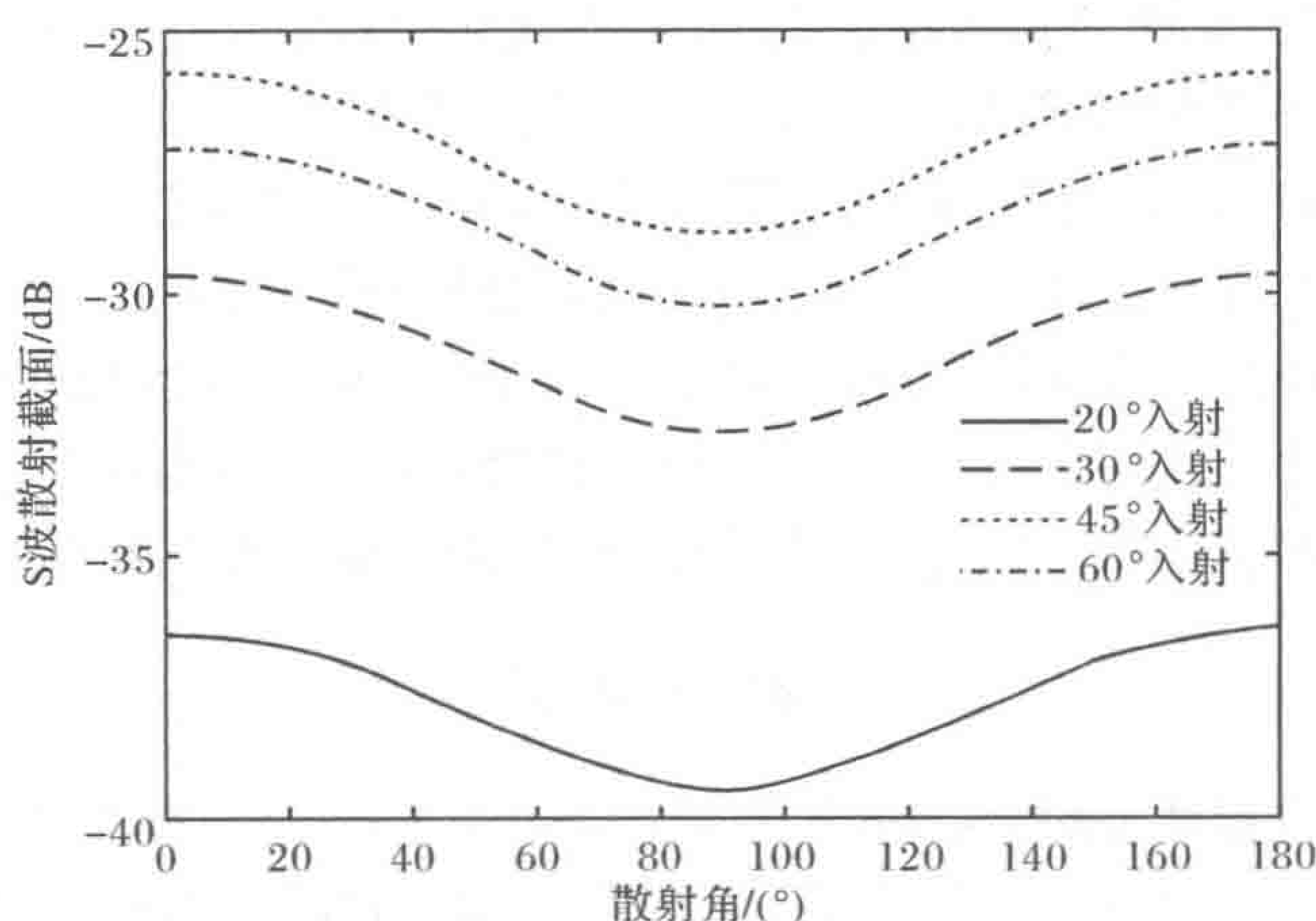


图 9.16　入射方向对散射截面的影响(S 波 xOz 平面)

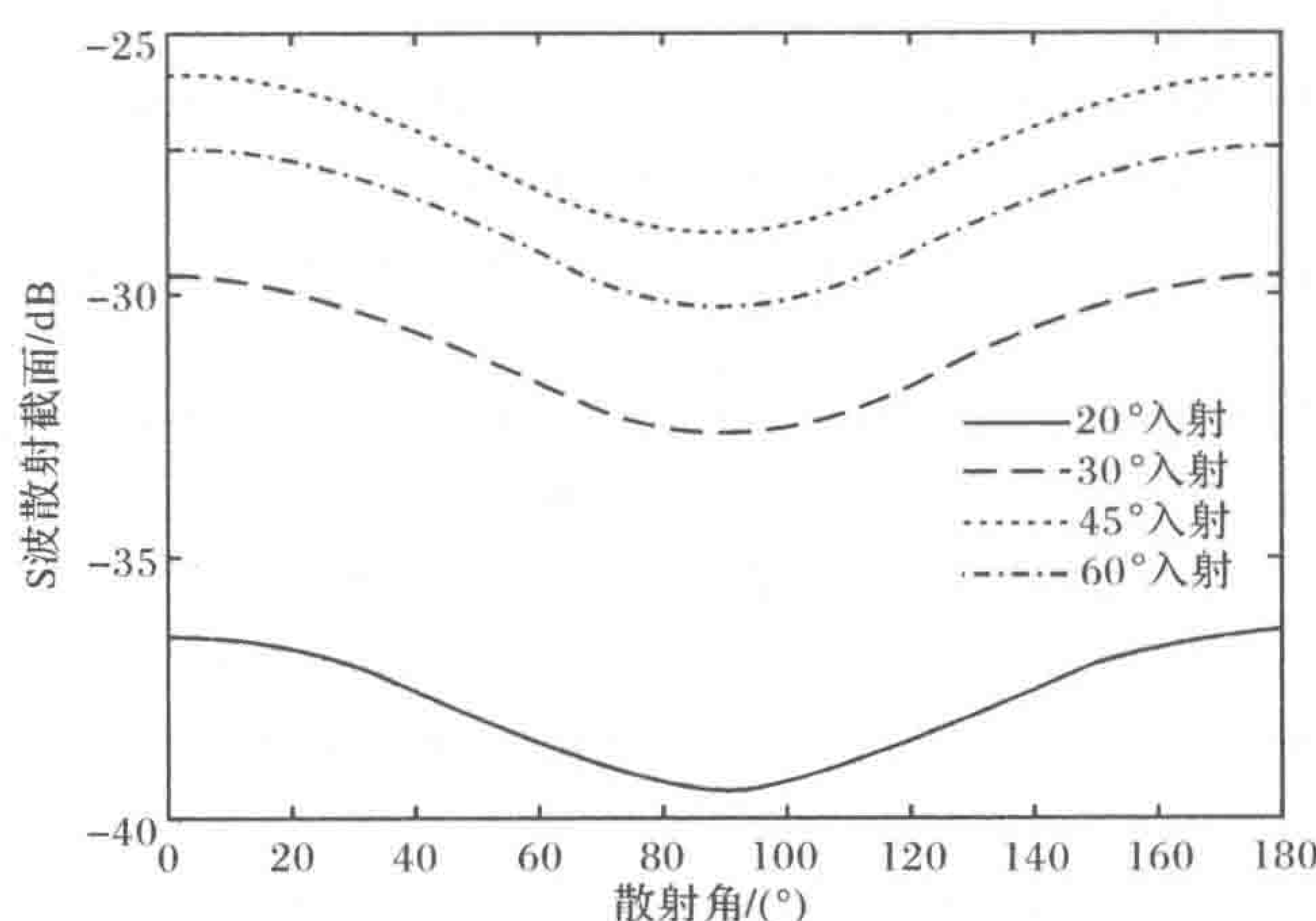


图 9.17　入射方向对散射截面的影响(S 波 yOz 平面)

图 9.14～9.17 都是在 P 波入射情况下得出的散射截面曲线图，也运行了在 S 波入射情况下的散射截面图。S 波入射情况下运行出来的散射截面图和 P 波入射情况下运行的截面图类似。在 P 波 xOz 平面，随着入射角度(θ_i)的增大，前端和后端散射截面越来越低，而散射截面中的峰值则越来越大；在 P 波 yOz 平面，随着入射角度(θ_i)的增大，前端和后端散射截面越来越低，而出现峰值部分的散射角则向前推移；而 S 波的 xOz 平面和 yOz 平面一致，入射角度的变化不影响散射截面的曲线，只是不同的入射角度，散射截面曲线高低不同而已。此外，不管入射角度如何变化，前端和后端散射截面始终相等[1]。

数值验证表明，应用波函数的简化理论计算均匀各向异性单层球的弹性波散射问题，结果准确、简捷高效。将角谱积分表达式中的(θ_k，φ_k)进行合理的离散化，编程计算的时间和空间复杂度大为减小。若使用弹性波场的角谱积分表达式进行计算，则系数矩阵的每个填充元素都要进行一个双重积分的计算，这对于普通计算机来说是一个很大的时间

和内存的耗费。而利用波函数的简化理论，在计算系数矩阵的每个元素时，既没有双重积分，也无循环的级数运算，只有矢量的点乘运算和特殊数学函数的计算，因而能够缩短运行时间，同时也能够节省有限的内存资源。

由于系数矩阵的规模和结构是由 $L_{\max}, S, T$ 决定，因而 $L_{\max}, S, T$ 的取值对于结果的影响是很显著的。在数值计算时要注意这个问题，适当地控制 $L_{\max}, S, T$ 的大小。正如本章在分析退化解的稳定性时，采用不同的 $L_{\max}, S, T$ 值，在收敛区间内，可以选择采用较小的 $L_{\max}, S, T$ 来进行计算，这样既节省时间，又能够得到准确的数值结果。

另外，基于本章的方法，可以继续求解 $n(n \geqslant 2)$ 层各向异性球的弹性波散射问题。当然，随着 n 值的增大，计算的复杂度以及计算量都会增加。波函数简化理论的优势就在于适合作 n 值较大的成层球的弹性波散射分析，相关的研究正在进行中。

参考文献

[1] 肖刘琴. 各向异性单层球的弹性波散射分析. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文，2007.

[2] 美国机械工程师协会. 应用力学最新进展. 郭中衡等译. 北京：科学出版社，1987.

[3] HaiJime Seki, Andrew Granato, Rohn Truell. Diffraction effects in the ultrasonic field of a piston source and their importance in the accurate measurement of attenuation. Journal of the Acoustical Society of America, 1965, 17: 230.

[4] Gubernatis J E, Domant E, Krumhabsl J A. Formal aspects of the theory of the scattering of ultrasound by flaws in elastic materials. Journal of Applied Physics, 1977, 48(7).

[5] Spence R D, Grangen, Sara. The scattering of sound from a prolate spheroid. Journal of the Acoustical Society of America, 1951, 23: 701.

[6] Ying C F, Truell R. Scattering of a plane longitudinal wave by spherical obstacle in an isotropically elastic solid. Journal of Applied Physics, 1956, 27: 1086.

[7] Pao Y H, Mow C C. Theory of normal modes and ultrasonic spectral analysis of the scattering of waves in solids. Journal of the Acoustical Society of America, 1976, 59: 1046.

[8] Waterman P. Matrix theory of elastic wave scattering. Journal of the Acoustical Society of America, 1976, 60: 567.

[9] Varadan V, Pao Y H. Scattering matrix for elastic waves, T theory. Journal of the Acoustical Society of America, 1976, 60: 556.

[10] Pao Y H. Betti's identity and transition matrix for elastic waves. Journal of the Acoustical Society of America, 1978, 64: 302.

[11] Ren W. Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media. Physics Reviews E, 1993, 47(1): 664～673.

[12] Ren W. Spherical wave functions and dyadic Green's functions for homogeneous elastic anitropic media. Physics Reviews E, 1993, 47(6): 4439～4446.

[13] Ren W. Exact solutions of coupled-wave equations in piezoelectric solids. Journal Mathematical Physics, 1993, 34(11): 5376～5390.

[14] 焦志伟. 均匀各向异性媒质的简化波函数理论. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文，2004.

[15] 董志龙. 各向异性媒质特征波数的计算. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文，2006.

[16] 潘伟良. 各向异性双层球的电磁散射分析. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文，2006.

[17] 任伟，赵家升. 电磁场与微波技术. 北京：电子工业出版社，2005.

[18] 张福学，王丽坤. 现代压电学(上册). 北京：科学出版社，2001.

[19] 里斯蒂克 V M. 声学器件原理. 莫怀德，陈昌龄译. 北京：电子工业出版社，1988.
[20] Auld B A. Acoustic Fields and Waves in Solids. New York: Wiley, 1973.
[21] Varadan V K, Varadan V V. Acoustic Electromagnetic and Elastic Wave Scattering: Focus on the T-Matrix Approach. New York: Pergamon Press, 1980.
[22] 黄志洵. 电磁理论研究的新方向. 北京广播学院学报（自然科学版），1998，(4).
[23] 王志良，任伟. 电磁散射理论. 成都：四川科学技术出版社，1993.
[24] Philip M Morse, Herman Feshbach. Methods of Theoretical Physics. New York: McGraw-Hill, 1953.
[25] Peter H Albach, Leonard J Bond. Scattering of elastic waves from surface indentations. Mathematical Modelling for NDT, IEE Colloquium, 1989: 1～4.
[26] Ren W, Wu X B. Applications of an eigenfunction representation to the scattering of a plane wave by an anisotropically coated circular cylinder. Journal of Physics D, 1995, 28: 1031～1039.
[27] Tsang L, Kong J A, Ding K H. Scattering of Electromagnetic Waves: Theories and Applications. New York: Wiely, 2000.
[28] Geng Y L, Wu X B, Li L W. Characterization of electromagnetic scattering by a plasma anisotropic spherical shell. IEEE Antennas and Wireless Propagation, 2004, 3: 102.
[29] 任伟. 均匀各向异性媒质的简化波函数理论. //第三届中国科协青年学术年会文集，1998.
[30] Varadan V V, Lakhtakia A, Varadan V K. Field Representations and Introduction to Scattering. Amsterdam: Elsevier, 1991.

第十章　基于简化波理论的均匀各向异性二层球的弹性波散射

本章取材于郑洲官的硕士学位论文[1]，没有郑洲官的协助，作者要完成本章是不可能的[1~77]。

第九章讨论了各向异性弹性波散射的角谱积分方法和简化波函数理论，但在异性多层球体，使用球简化波函数理论求解弹性波散射还是个创新。研究有解均匀各向异性介质内波场与材料的相互作用以及各向同性背景介质内的多粒子散射，是近年来的热点课题。各向异性介质波函数理论将为处理各向同性背景介质内的各向异性多粒子散射奠定基础。各向异性介质和弹性各向异性材料在毫米波器件、集成光电器件和声波器件中被广泛采用。我们要紧跟研究潮流，开发相应的软件，应用于对各类复杂介质的研究，指导对新材料的开发利用[53~73]。任何新型各向异性材料，只要确定了其无界空间的本征平面波解，都可以用这套软件分析其有界成层柱和成层球的散射特性，还可以进一步研究各向异性成层柱的导行与各向异性成层球的谐振。

10.1　均匀各向同性二层球的弹性波散射

各向同性是各向异性的特殊形式，将各向异性退化到各向同性并得到求解析解的方法是本章的主要内容。

10.1.1　球壳内外的场

图 10.1 是一个各向同性二层球壳的截面，球壳内外半径分别为 r_a 和 r_b。区域 1 为各向同性介质，区域 2 和区域 3 均为各向同性介质构成的环形球，其球心与坐标原点重合。整个球体受到一个任意方向的平面弹性波的照射。

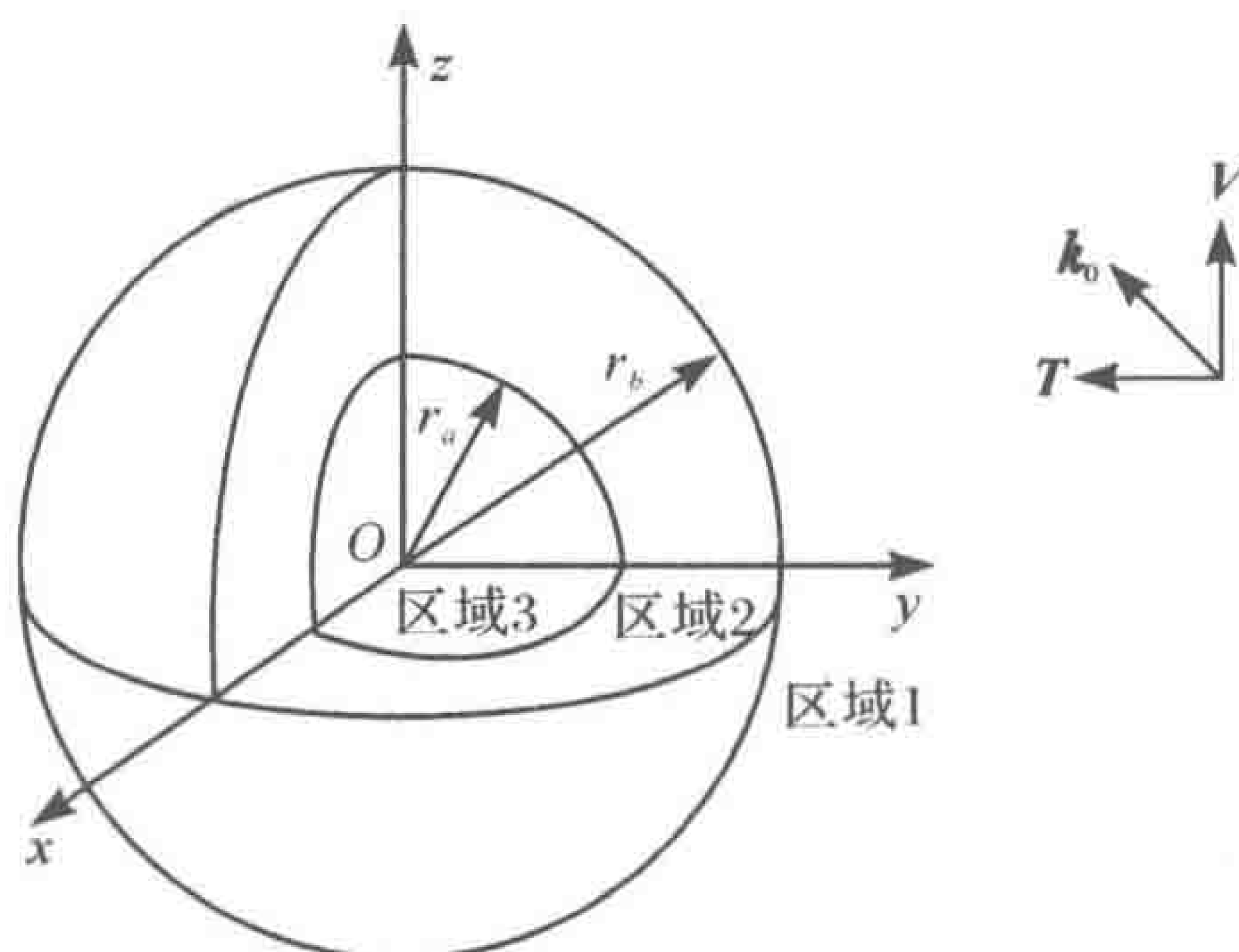


图 10.1　各向同性球壳的弹性波散射几何

1. 球外区域 1 的场量

利用球矢量波函数的级数展开得到各向同性介质(即区域 1)的入射速度场和应力场(球表面法向)的级数展开式为

$$\boldsymbol{V}_1^{\text{inc}}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^{i}\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^{i}\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}^{i}\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.1}$$

$$\boldsymbol{T}_{1r}^{\text{inc}} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^{i}\,\boldsymbol{T}_{rn}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^{i}\,\boldsymbol{T}_{m}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}^{i}\,\boldsymbol{T}_{rl}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.2}$$

同样,各向同性介质区域的散射场也可以表示为向外散射波的线性组合,则区域 1 的速度场和应力场(球表面法向)为

$$\boldsymbol{V}_1^{s}(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^{s}\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^{s}\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}^{s}\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.3}$$

$$\boldsymbol{T}_{1r}^{s} = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^{s}\,\boldsymbol{T}_{rn}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + B_{lm}^{s}\,\boldsymbol{T}_{m}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r}) + C_{lm}^{s}\,\boldsymbol{T}_{rl}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.4}$$

式(10.1)~(10.4)中,A_{lm}^{i},B_{lm}^{i},C_{lm}^{i} 是已知的入射系数;A_{lm}^{s},B_{lm}^{s},C_{lm}^{s} 是待求的散射系数;$k_{1s}=\omega(\rho_1/\mu)^{1/2}$,$k_{1c}=\omega[\rho_1/(\lambda+2\mu)]^{1/2}$,其中 k_{1s} 为入射切变波的波数,k_{1c} 为入射纵波的波数;$\boldsymbol{r}$ 为径向矢量;$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 为第一类球矢量波函数;$\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 为第四类球矢量波函数;$\boldsymbol{T}_{rn}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{m}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{rl}^{(i)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 在球表面的法向表示。

2. 球内区域 2 的场量

区域 2 是各向同性介质构成的球环。根据简化波函数理论,结合声场的第一类和第二类球矢量波函数导出各向同性球壳内的散射场有限和展开式为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{r}) = &\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{1}\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + E_{lm}^{1}\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + F_{lm}^{1}\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ &+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{2}\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + E_{lm}^{2}\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + F_{lm}^{2}\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\end{aligned} \tag{10.5}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{2r}(\boldsymbol{r}) = &-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{1}\,\boldsymbol{T}_{2M}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + E_{lm}^{1}\,\boldsymbol{T}_{2N}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + F_{lm}^{1}\,\boldsymbol{T}_{2L}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ &-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{2}\,\boldsymbol{T}_{2M}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + E_{lm}^{2}\,\boldsymbol{T}_{2N}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r}) + F_{lm}^{2}\,\boldsymbol{T}_{2L}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\end{aligned} \tag{10.6}$$

3. 球内区域 3 的场量

区域 3 是各向同性介质构成的球壳。

$$\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{r}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[X_{lm}\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r}) + Y_{lm}\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r}) + Z_{lm}\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.7}$$

$$\boldsymbol{T}_{3r}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[X_{lm}\,\boldsymbol{T}_{3M}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r}) + Y_{lm}\,\boldsymbol{T}_{3N}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r}) + Z_{lm}\,\boldsymbol{T}_{3L}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.8}$$

10.1.2 根据弹性波的边界条件建立方程组

根据速度场和应力场的边界条件,质点位移速度和应力的法向分量及切向分量在穿越不连续表面时必须连续,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{V}_j\\ \boldsymbol{T}_{ir}=\boldsymbol{T}_{jr}\end{cases} \tag{10.9}$$

分别在两个边界建立方程组。

从球外到球内的第一个边界下的方程组为

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\ =&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{1}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{1}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{1}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ &+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{2}\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{2}\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{2}\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\bigg|_{r=r_b}\end{aligned} \tag{10.10}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}\boldsymbol{T}_{1m}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}\boldsymbol{T}_{1n}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}\boldsymbol{T}_{1l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\ =&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{1}\boldsymbol{T}_{2m}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{1}\boldsymbol{T}_{2n}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{1}\boldsymbol{T}_{2l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ &+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{2}\boldsymbol{T}_{2m}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{2}\boldsymbol{T}_{2n}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{2}\boldsymbol{T}_{2l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\bigg|_{r=r_b}\end{aligned} \tag{10.11}$$

第二个边界下的方程组为

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{1}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{1}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{1}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ &+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{2}\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{2}\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{2}\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ =&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[X_{lm}\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+Y_{lm}\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+Z_{lm}\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\bigg|_{r=r_a}\end{aligned} \tag{10.12}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{1}\boldsymbol{T}_{2m}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{1}\boldsymbol{T}_{2n}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{1}\boldsymbol{T}_{2l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ &+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[D_{lm}^{2}\boldsymbol{T}_{2m}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+E_{lm}^{2}\boldsymbol{T}_{2n}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{2}\boldsymbol{T}_{2l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\ =&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[X_{lm}\boldsymbol{T}_{1m}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+Y_{lm}\boldsymbol{T}_{1n}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+Z_{lm}\boldsymbol{T}_{1l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\bigg|_{r=r_a}\end{aligned} \tag{10.13}$$

将矢量球波函数 $\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 和相应的 $\boldsymbol{T}_{rn}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{T}_{rn}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{T}_{rl}^{(i)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 代入式(10.10)~(10.13),有:

(1) 第一个边界下的方程组

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[B_{lm}^{i}\lambda_{lm}\left\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{k_{1s}\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial[rz_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})]}{\partial\boldsymbol{r}}\right\}\right.$$

$$
\begin{aligned}
&+A_{lm}^{i}\lambda_{lm}\,\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^{i}\lambda_{lm}'\left\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\right.\\
&\left.\left.+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\right\}\right]+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[B_{lm}^{s}\lambda_{lm}\left\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{k_{1s}\boldsymbol{r}}\right.\right.\\
&\left.+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial\left[rz_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial\boldsymbol{r}}\right\}+A_{lm}^{s}\lambda_{lm}\,\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})\\
&\left.+C_{lm}^{s}\lambda_{lm}'\left\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\right\}\right]\\
=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[E_{lm}^{1}\lambda_{lm}\left\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{k_{2s}\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial\left[\boldsymbol{r}z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial\boldsymbol{r}}\right\}\right.\\
&+D_{lm}^{1}\lambda_{lm}\,\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{1}\lambda_{lm}'\left\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\right.\\
&\left.\left.+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\right\}\right]+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[E_{lm}^{2}\lambda_{lm}\left\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_l^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\right.\right.\\
&\left.+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial\left[rz_l^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial r}\right\}+D_{lm}^{2}\lambda_{lm}\,\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)z_l^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})\\
&\left.\left.+F_{lm}^{2}\lambda_{lm}'\left\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\left[z_l^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\right\}\right]\right|_{r=r_b}
\end{aligned}
\tag{10.14}
$$

此式是第一个边界中关于速度场的条件。

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^{i}\lambda_{lm}\left\{\mu_1\left[\frac{\partial z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right.\\
&+B_{lm}^{i}\lambda_{lm}\left\{\mu_1 l(l+1)\frac{2}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[\frac{z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\mu_1}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2\left[z_l^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial\boldsymbol{r}^2}\right]\right\}\\
&+C_{lm}^{i}\lambda_{lm}'\left\{\left[\frac{2\mu_1}{k_{1c}}\frac{\partial^2 z_l^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}^2}-\lambda_1 k_{1c}z_l^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.\\
&\left.\left.+\frac{2\mu_1}{k_{1c}}\left[\frac{\partial z_l^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_l^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right]\\
&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^{s}\lambda_{lm}\left\{\mu_1\left[\frac{\partial z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right.\\
&+B_{lm}^{s}\lambda_{lm}\left\{\mu_1 l(l+1)\frac{2}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[\frac{z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\mu_1}{k_{1s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2\left[z_l^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial\boldsymbol{r}^2}\right]\right\}\\
&+C_{lm}^{s}\lambda_{lm}'\left\{\left[\frac{2\mu_1}{k_{1c}}\frac{\partial^2 z_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}^2}-\lambda_1 k_{1c}z_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.\\
&\left.\left.+\frac{2\mu_1}{k_{1c}}\left[\frac{\partial z_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_l^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Big[D_{lm}^{1}\lambda_{lm}\Big\{\mu_{2}\Big[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\Big]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\Big\}\\
&+E_{lm}^{1}\lambda_{lm}\Big\{\mu_{2}l(l+1)\frac{2}{k_{2s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Big[\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\Big]\\
&+\frac{\mu_{2}}{k_{2s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big[\frac{l^{2}+l-2}{\boldsymbol{r}^{2}}z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^{2}[z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}\Big]\Big\}\\
&+F_{lm}^{1}\lambda_{lm}'\Big\{\Big[\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}}\frac{\partial^{2}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}-\lambda_{2}k_{2c}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\Big]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}}\Big[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\Big]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big\}\Big]\\
&+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Big[D_{lm}^{2}\lambda_{lm}\Big\{\mu_{2}\Big[\frac{\partial z_{l}^{(2)}(k_{2s}r)}{\partial r}-\frac{z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{r}\Big]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\Big\}\\
&+E_{lm}^{2}\lambda_{lm}\Big\{\mu_{2}l(l+1)\frac{2}{k_{2s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\Big[\frac{z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\Big]\\
&+\frac{\mu_{2}}{k_{2s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big[\frac{l^{2}+l-2}{\boldsymbol{r}^{2}}z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^{2}[z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}\Big]\Big\}\\
&+F_{lm}^{2}\lambda_{lm}'\Big\{\Big[\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}}\frac{\partial^{2}z_{l}^{(2)}(k_{2c}r)}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}-\lambda_{2}k_{2c}z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\Big]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}}\Big[\frac{\partial z_{l}^{(2)}(k_{2c}r)}{\partial r}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\Big]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big\}\Big]\Big|_{r=r_{b}}
\end{aligned}
\tag{10.15}
$$

此式是第一个边界中关于应力场的条件。

（2）第二个边界下的方程组

$$
\begin{aligned}
&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Big[E_{lm}^{1}\lambda_{lm}\Big\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{k_{3s}\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{3s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial[\boldsymbol{r}z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})]}{\partial \boldsymbol{r}}\Big\}\\
&+D_{lm}^{1}\lambda_{lm}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\cdot z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})+F_{lm}^{1}\lambda_{lm}'\Big\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{3c}\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}[z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})]\\
&+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{3c}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})]\Big\}\Big]+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Big[E_{lm}^{2}\lambda_{lm}\Big\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_{l}^{(2)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{k_{3s}\boldsymbol{r}}\\
&+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{3s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial[\boldsymbol{r}z_{l}^{(2)}(k_{3s}\boldsymbol{r})]}{\partial r}\Big\}+D_{lm}^{2}\lambda_{lm}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\cdot z_{l}^{(2)}(k_{3s}\boldsymbol{r})\\
&+F_{lm}^{2}\lambda_{lm}'\Big\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{3c}\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(2)}(k_{3c}\boldsymbol{r})]+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{3c}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(2)}(k_{3c}\boldsymbol{r})]\Big\}\Big]\\
=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Big[Y_{lm}^{1}\lambda_{lm}\Big\{l(l+1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{k_{2c}\boldsymbol{r}}+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial[rz_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\partial \boldsymbol{r}}\Big\}\\
&+X_{lm}^{1}\lambda_{lm}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\cdot z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})+Z_{lm}^{1}\lambda_{lm}'\Big\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}[z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})]\\
&+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})]\Big\}\Big]\Big|_{r=r_{a}}
\end{aligned}
\tag{10.16}
$$

此式是第二个边界中关于速度场的条件。

$$
\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\Big[E_{lm}^{1}\lambda_{lm}\Big\{\mu_{3}\Big[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\Big]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\Big\}
$$

$$
\begin{aligned}
&+D_{lm}^{1}\lambda_{lm}\left\{\mu_3 l(l+1)\frac{2}{k_{3s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[\frac{z_l^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\mu_3}{k_{3s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_l^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2\left[z_l^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}^2}\right]\right\}\\
&+F_{lm}^{1}\lambda_{lm}'\left\{\left[\frac{2\mu_3}{k_{3c}}\frac{\partial^2 z_l^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^2}-\lambda_3 k_{3c}z_l^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.\\
&\left.\left.+\frac{2\mu_3}{k_{3c}}\left[\frac{\partial z_l^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{r}z_l^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right]\\
=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[X_{lm}^{1}\lambda_{lm}\left\{\mu_2\left[\frac{\partial z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right.\\
&+Y_{lm}^{1}\lambda_{lm}\left\{\mu_2 l(l+1)\frac{2}{k_{2s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[\frac{z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\right.\\
&\left.+\frac{\mu_2}{k_{2s}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2\left[z_l^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}^2}\right]\right\}\\
&+Z_{lm}^{1}\lambda_{lm}'\left\{\left[\frac{2\mu_2}{k_{2c}}\frac{\partial^2 z_l^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^2}-\lambda_2 k_{2c}z_l^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.\\
&\left.\left.\left.+\frac{2\mu_2}{k_{2c}}\left[\frac{\partial z_l^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_l^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right]\right|_{r=r_a}
\end{aligned}
\tag{10.17}
$$

式中，$\lambda_{lm}'=\sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!}}$；$\lambda_{lm}=\sqrt{\dfrac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi l(l+1)(l+m)!}}$。此式是第二个边界中关于应力场的条件。

我们已经将基本方程组简化成了关于矢量球谐 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的方程组，因为方程的右端为零，而 $\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$ 是正交函数集，所以 $P_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的每个系数都必须为零才能使方程成立。它们的每个系数又表现为对相关系数的求和，从而为建立线性方程组打下了基础。

在式(10.14)中，令矢量函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零，并经整理可以得到求和方程式

$$
\begin{aligned}
&B_{lm}^{i}\frac{l(l+1)z_l^1(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}+C_{lm}^{i}\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}z_l^1(k_{1c}r_b)+B_{lm}^{s}\frac{l(l+1)z_l^4(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\\
&+C_{lm}^{s}\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}z_l^4(k_{1c}r_b)-E_{lm}^{1}\sqrt{l(l+1)}\frac{z_l^1(k_{2s}r_b)}{k_{2s}r_b}-F_{lm}^{1}\frac{1}{k_{2c}r_b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[z_l^1(k_{2c}r_b)\right]\\
&-E_{lm}^{2}\sqrt{l(l+1)}\frac{z_l^2(k_{2s}r_b)}{k_{2s}r_b}-F_{lm}^{2}\frac{1}{k_{2c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left[z_l^2(k_{2c}r_b)\right]=0
\end{aligned}
\tag{10.18}
$$

同理在式(10.14)中，令矢量函数 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零得

$$
\begin{aligned}
&B_{lm}^{i}\frac{1}{k_{1s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial\left[\boldsymbol{r}z_l^1(k_{1s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}}+C_{lm}^{i}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\left[z_l^1(k_{1c}r_b)\right]+B_{lm}^{s}\frac{1}{k_{1s}r_b}\frac{\partial\left[\boldsymbol{r}z_l^4(k_{1s}r_b)\right]}{\partial \boldsymbol{r}}\\
&+C_{lm}^{s}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{1c}r_b}\left[z_l^2(k_{1c}r_b)\right]-E_{lm}^{1}\frac{1}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\frac{\partial\left[\boldsymbol{r}z_l^1(k_{2s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}}\\
&-F_{lm}^{1}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{2c}r_b}\left[z_l^1(k_{2c}r_b)\right]-E_{lm}^{2}\frac{1}{k_{2s}r_b}\frac{\partial\left[\boldsymbol{r}z_l^2(k_{2s}r_b)\right]}{\partial \boldsymbol{r}}\\
&-F_{lm}^{2}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{2c}r_b}\left[z_l^2(k_{2c}r_b)\right]=0
\end{aligned}
\tag{10.19}
$$

在式(10.14)中,令矢量函数 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零得

$$A_{lm}^{i} z_{l}^{1}(k_{1s}r_{b})+A_{lm}^{s} z_{l}^{4}(k_{1s}r_{b})-D_{lm}^{1} z_{l}^{1}(k_{1s}r_{b})-D_{lm}^{2} z_{l}^{2}(k_{1s}r_{b})=0 \tag{10.20}$$

在式(10.15)中,令矢量函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零得

$$\begin{aligned}
&B_{lm}^{i}\mu_{1}\sqrt{l(l+1)}\frac{2}{k_{1s}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]+C_{lm}^{i}\left[\frac{2\mu_{1}}{k_{1c}}\frac{\partial^{2} z_{l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}-\lambda_{1}k_{1c}z_{l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\
&+B_{lm}^{s}\mu_{1}\sqrt{l(l+1)}\frac{2}{k_{1s}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]+C_{lm}^{s}\left[\frac{2\mu_{1}}{k_{1c}}\frac{\partial^{2} z_{l}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}-\lambda_{1}k_{1c}z_{l}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\
&-E_{lm}^{1}\mu_{2}\sqrt{l(l+1)}\frac{2}{k_{2s}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]-F_{lm}^{1}\left[\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}}\frac{\partial^{2} z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}-\lambda_{2}k_{2c}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\
&-E_{lm}^{2}\mu_{2}\sqrt{l(l+1)}\frac{2}{k_{2s}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]-F_{lm}^{2}\left[\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}}\frac{\partial^{2} z_{l}^{(2)}(k_{4c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}-\lambda_{2}k_{2c}z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\
&=0\,|_{r=r_{b}}
\end{aligned} \tag{10.21}$$

在式(10.15)中,令矢量函数 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零得

$$\begin{aligned}
&B_{lm}^{i}\frac{\mu_{1}}{k_{1s}}\left[\frac{l^{2}+l-2}{\boldsymbol{r}^{2}}z_{l}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^{2}\left[z_{l}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}\right]\\
&+C_{lm}^{i}\sqrt{l(l+1)}\frac{2\mu_{1}}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\
&+B_{lm}^{s}\frac{\mu_{1}}{k_{1s}}\left[\frac{l^{2}+l-2}{\boldsymbol{r}^{2}}z_{l}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^{2}\left[z_{l}^{(4)}(k_{3s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}\right]\\
&+C_{lm}^{s}\sqrt{l(l+1)}\frac{2\mu_{1}}{k_{1c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]\\
&-E_{lm}^{1}\frac{\mu_{2}}{k_{2s}}\left[\frac{l^{2}+l-2}{\boldsymbol{r}^{2}}z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^{2}\left[z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}\right]\\
&-F_{lm}^{1}\sqrt{l(l+1)}\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]\\
&-E_{lm}^{2}\frac{\mu_{2}}{k_{2s}}\left[\frac{l^{2}+l-2}{\boldsymbol{r}^{2}}z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^{2}\left[z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})\right]}{\partial \boldsymbol{r}^{2}}\right]\\
&-F_{lm}^{2}\sqrt{l(l+1)}\frac{2\mu_{2}}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]=0\,|_{r=r_{b}}
\end{aligned} \tag{10.22}$$

在式(10.15)中,令矢量函数 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零得

$$\begin{aligned}
&A_{lm}^{i}\mu_{1}\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]+A_{lm}^{s}\mu_{1}\left[\frac{\partial z_{l}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]\\
&-D_{lm}^{1}\mu_{4}\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]-D_{lm}^{2}\mu_{2}\left[\frac{\partial z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\partial \boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]=0\,|_{r=r_{b}}
\end{aligned} \tag{10.23}$$

同样在式(10.16)中取 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$, $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$, $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为 0 得

$$\begin{aligned}
&E_{lm}^{1}\sqrt{l(l+1)}\frac{z_{l}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{k_{1s}\boldsymbol{r}}+F_{lm}^{1}\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[z_{l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]+E_{lm}^{2}\sqrt{l(l+1)}\frac{z_{l}^{(2)}(k_{1s}\boldsymbol{r})}{k_{1s}\boldsymbol{r}}\\
&+F_{lm}^{2}\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[z_{l}^{(2)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right]-X_{lm}^{1}\frac{1}{k_{2c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]-Y_{lm}^{2}\sqrt{l(l+1)}\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\\
&=0\,|_{r=r_{a}}
\end{aligned} \tag{10.24}$$

$$E_{lm}^{1}\ \frac{1}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{r}z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}+F_{lm}^{1}\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{1}{k_{2c}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})]$$
$$-E_{lm}^{2}\ \frac{1}{k_{2s}\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{r}z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}-F_{lm}^{2}\ \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{2c}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})]$$
$$-X_{lm}\ \frac{1}{k_{3s}\boldsymbol{r}}\frac{\mathrm{d}[\boldsymbol{r}z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})]}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}-Y_{lm}\ \frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{3c}\boldsymbol{r}}[z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})]=0\ |_{r=r_a}\quad(10.25)$$

$$A_{lm}^{1}z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+A_{lm}^{2}z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})-X_{lm}^{2}z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})=0\ |_{r=r_a}\quad(10.26)$$

式(10.24)～(10.26)为式(10.16)分别令 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为0的方程。

$$B_{lm}^{1}\mu_1\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{2}{k_{2s}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]+C_{lm}^{1}\left[\frac{2\mu_2}{k_{2c}}\ \frac{\partial^2 z_{l}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}^2}-\lambda_2 k_{2c}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]$$
$$+B_{lm}^{2}\mu_2\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{2}{k_{2s}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]+C_{lm}^{2}\left[\frac{2\mu_2}{k_{2c}}\ \frac{\partial^2 z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}^2}-\lambda_2 k_{2c}z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]$$
$$-Y_{lm}^{1}\mu_3\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{2}{k_{3s}}\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{r}}\left[\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]-Z_{lm}^{1}\left[\frac{2\mu_3}{k_{2c}}\ \frac{\partial^2 z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}^2}-\lambda_3 k_{3c}z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})\right]$$
$$=0\ |_{r=r_a}\quad(10.27)$$

$$B_{lm}^{1}\ \frac{\mu_2}{k_{2s}}\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2[z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\partial\boldsymbol{r}^2}\right]$$
$$+C_{lm}^{1}\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{2\mu_2}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(1)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]$$
$$+B_{lm}^{2}\ \frac{\mu_2}{k_{2s}}\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2[z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})]}{\partial\boldsymbol{r}^2}\right]$$
$$-C_{lm}^{2}\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{2\mu_2}{k_{2c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(2)}(k_{2c}\boldsymbol{r})\right]$$
$$-Y_{lm}\ \frac{\mu_3}{k_{3s}}\left[\frac{l^2+l-2}{\boldsymbol{r}^2}z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})+\frac{\partial^2[z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})]}{\partial\boldsymbol{r}^2}\right]$$
$$-Z_{lm}\ \sqrt{l(l+1)}\ \frac{2\mu_3}{k_{3c}\boldsymbol{r}}\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{1}{\boldsymbol{r}}z_{l}^{(1)}(k_{3c}\boldsymbol{r})\right]=0\ |_{r=r_a}\quad(10.28)$$

$$A_{lm}^{1}\mu_1\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(1)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]+A_{lm}^{2}\mu_1\left[\frac{\partial z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(2)}(k_{2s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]$$
$$-X_{lm}\mu_2\left[\frac{\partial z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{\partial\boldsymbol{r}}-\frac{z_{l}^{(1)}(k_{3s}\boldsymbol{r})}{\boldsymbol{r}}\right]=0\ |_{r=r_a}\quad(10.29)$$

式(10.27)～(10.29)为式(10.17)分别令 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$、$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为0的方程。

至此，我们根据正交矢量函数集 $\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$ 的特性，将边界条件简化成了简单方程组的形式。不需要作数值计算，就能得到各个散射系数，这就是求解析解的方法。

为验证简化波函数的正确性，将验证退化到同性介质。本节给出各向同性二层球的弹性波的解析解，将与退化解作比较。

10.2　均匀各向异性二层球壳内外的场

图 10.2 是一个各向异性二层球壳的截面,它的半径分别为 r_a 和 r_b。区域 1 为各向同性介质,区域 2 为各向异性介质构成的环形球壳,区域 3 为各向异性介质构成的球壳,其球心与坐标原点重合。整个球体受到一个任意方向的平面弹性波的照射。

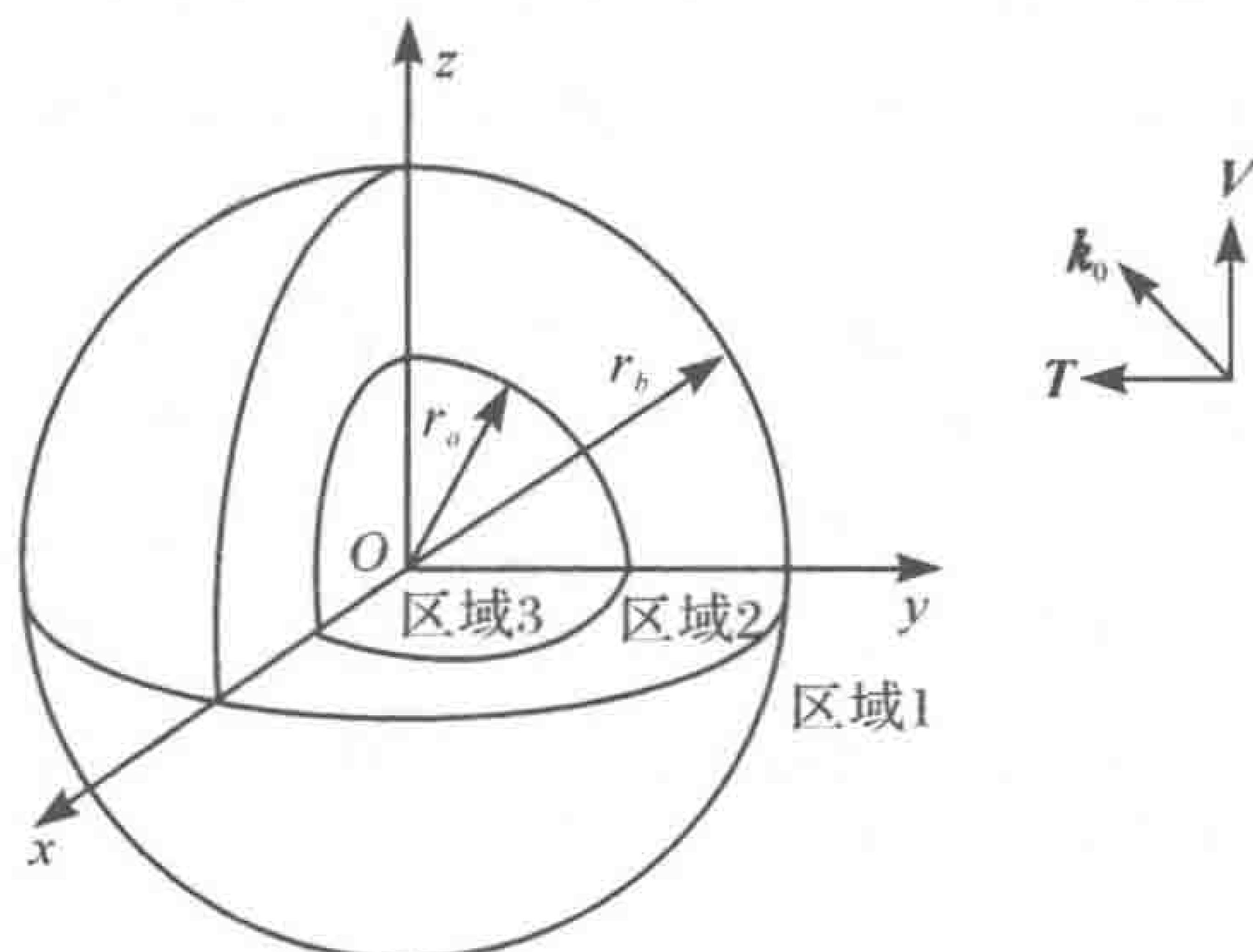


图 10.2　各向异性球壳的弹性波散射几何

各向异性球对弹性波的散射是一个比较复杂的过程,将通过弹性波在各向异性介质球内的本征波角谱展开,并求解各向异性介质球对弹性波的散射。设时谐因子为 $e^{j\omega t}$。

10.2.1　球壳外区域 1 的场

通过将声场角谱积分表达式中的矢量平面波用并矢平面波展开后,再将其中的 θ_{ks},φ_{kt} 进行离散化,得到简化的球矢量波函数。以下将基于简化波函数理论求解各向异性球壳的弹性波散射问题。首先利用球矢量波函数的级数展开得到各向同性介质(即区域 1)的入射速度场和应力场(球表面法向)的级数展开式

$$\boldsymbol{V}_1^{\text{inc}}(r)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^i\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^i\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^i\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.30}$$

$$\boldsymbol{T}_{1r}^{\text{inc}}=-\frac{1}{\text{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^i\,\boldsymbol{T}_{rm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^i\,\boldsymbol{T}_{m}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^i\,\boldsymbol{T}_{rl}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.31}$$

同样,各向同性介质区域的散射场也可以表示为向外散射波的线性组合,则区域 1 的速度场和应力场(球表面法向)为

$$\boldsymbol{V}_1^{s}(\boldsymbol{r})=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^s\,\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^s\,\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^s\,\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.32}$$

$$\boldsymbol{T}_{1r}^{s}=-\frac{1}{\text{j}\omega}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}\left[A_{lm}^s\,\boldsymbol{T}_{rm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+B_{lm}^s\,\boldsymbol{T}_{m}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})+C_{lm}^s\,\boldsymbol{T}_{rl}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})\right] \tag{10.33}$$

式(10.30)～(10.33)中,A_{lm}^i,B_{lm}^i,C_{lm}^i 是已知的入射系数;A_{lm}^s,B_{lm}^s,D_{lm}^s 是待求的散射系数;$k_{1s}=\omega(\rho_1/\mu)^{1/2}$,$k_{1c}=\omega[\rho_1/(\lambda+2\mu)]^{1/2}$,其中 k_{1s} 为入射切变波的波数,k_{1c} 为入射纵波的波数;$\boldsymbol{r}$ 为径向矢量;$\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 为第一类球矢量波函数;$\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 为第四类球矢量波函数;$\boldsymbol{T}_{rm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{m}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{rl}^{(i)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 是 $\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{1s}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{1c}\boldsymbol{r})$ 在球表面的法向表示。

10.2.2　球壳内区域 2 的场

区域 2 是各向异性介质构成的球壳，根据文献[35]提出的均匀各向异性介质简化波函数理论，结合声场的第一类和第二类球矢量波函数导出各向异性球壳内的散射场有限和展开式为

$$\boldsymbol{V}_2(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\boldsymbol{V}_{nst}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}\boldsymbol{V}_{nst}^{(2)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \tag{10.34}$$

$$\boldsymbol{T}_{2r}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\boldsymbol{T}_{nst}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}\boldsymbol{T}_{nst}^{(2)}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \tag{10.35}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V}_{nst}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}A_{lm}\{-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\\&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\\&-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})]\}\end{aligned} \tag{10.36}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{T}_{nst}^{(i)}(k_{nst}\boldsymbol{r})=&\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{+l}a_{lm}\left\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}\boldsymbol{r})\right.\\&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{nst},\boldsymbol{r})\right.\\&\left.\left.-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{nst},\boldsymbol{r})\right]\right\}\end{aligned} \tag{10.37}$$

c_{nst}^{i} 是未知量；$A_{lm}=\mathrm{j}^{l}(2l+1)(l-m)!/(l+m)!$；$k_{nst}$ 是各向异性介质内第 n 个本征波数；$\theta_{ks}=\pi s/S;\varphi_{kt}=2\pi t/T$。其中对 s 和 t 的离散取值的方法可以有多种，这里取 $s=0,1,2,\cdots,S$，$t=0,1,2,\cdots,T$。

$\boldsymbol{V}_n(k_{nst})$ 是速度场在各向异性介质内的归一化本征平面波解，即式(10.38)的解。$\boldsymbol{T}_n(k_{nst})$ 是归一化的应力场。

$$\nabla\cdot C:\nabla_s\boldsymbol{V}+\rho\omega^2\boldsymbol{V}=0 \tag{10.38}$$

在式(10.36)和式(10.37)中，存在矢量间的点乘运算。例如 $\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$，在具体的编程计算时，首先在直角坐标系下计算各个矢量的值，然后再将其转换到球坐标系下的矢量。转换过程如下：

设矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系下的表示为

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{e}}_xA_x+\hat{\boldsymbol{e}}_yA_y+\hat{\boldsymbol{e}}_zA_z \tag{10.39}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在球角坐标系下的表示为

$$\boldsymbol{A}=\hat{\boldsymbol{e}}_\theta A_\theta+\hat{\boldsymbol{e}}_\phi A_\phi+\hat{\boldsymbol{e}}_rA_r \tag{10.40}$$

于是通过关系式

$$\begin{cases}\hat{\boldsymbol{e}}_x=\hat{\boldsymbol{e}}_r\sin\theta_k\cos\phi_k+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cos\theta_k\cos\phi_k-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\sin\phi_k\\\hat{\boldsymbol{e}}_y=\hat{\boldsymbol{e}}_r\sin\theta_k\sin\phi_k+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cos\theta_k\sin\phi_k+\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\cos\phi_k\\\hat{\boldsymbol{e}}_z=\hat{\boldsymbol{e}}_r\cos\theta_k-\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\sin\theta_k\end{cases} \tag{10.41}$$

可以得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}= & A_x(\hat{\boldsymbol{e}}_r\sin\theta_k\cos\phi_k+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cos\theta_k\cos\phi_k-\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\sin\phi_k)\\ & +A_y(\hat{\boldsymbol{e}}_r\sin\theta_k\sin\phi_k+\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\cos\theta_k\sin\phi_k+\hat{\boldsymbol{e}}_\phi\cos\phi_k)+A_z(\hat{\boldsymbol{e}}_r\cos\theta_k-\hat{\boldsymbol{e}}_\theta\sin\theta_k)\\ = & \hat{\boldsymbol{e}}_\theta(A_x\cos\theta_k\cos\phi_k+A_y\cos\theta_k\sin\phi_k-A_z\sin\theta_k)+\hat{\boldsymbol{e}}_\phi(A_y\cos\phi_k-A_x\sin\phi_k)\\ & +\hat{\boldsymbol{e}}_r(A_x\sin\theta_k\cos\phi_k+A_y\sin\theta_k\sin\phi_k+A_z\cos\theta_k)\end{aligned} \tag{10.42}$$

这样就完成了矢量 **A** 从直角坐标系到球坐标系的变换,其中 $\{\hat{\boldsymbol{e}}_x,\hat{\boldsymbol{e}}_y,\hat{\boldsymbol{e}}_z\}$ 是直角坐标系中的单位矢量,$\{\hat{\boldsymbol{e}}_\theta,\hat{\boldsymbol{e}}_\phi,\hat{\boldsymbol{e}}_r\}$ 是球坐标系中的单位矢量。

以上对矢量点乘运算的说明同样适用于下文的矢量点乘规则,不再赘述。

10.2.3　球壳内区域 3 的场

区域 3 是各向异性介质构成的球壳,同样根据均匀各向异性介质简化波函数理论,结合声场的第一类球矢量波函数导出各向异性球壳内的散射场有限和展开式为

$$\boldsymbol{V}_3(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\boldsymbol{V}_{nst}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \tag{10.43}$$

$$\boldsymbol{T}_3(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}\boldsymbol{T}_{nst}(k_{nst}\boldsymbol{r}) \tag{10.44}$$

式中,$\boldsymbol{V}_{nst}(k_{nst}\boldsymbol{r})$,$\boldsymbol{T}_{nst}(k_{nst}\boldsymbol{r})$ 的定义分别与式(10.36)、式(10.37)相同。

10.2.4　根据弹性波的边界条件建立方程组

根据速度场和应力场的边界条件,质点位移速度和应力的法向分量及切向分量在穿越不连续表面时必须连续,即

$$\begin{cases}\boldsymbol{V}_i=\boldsymbol{V}_j\\ \boldsymbol{T}_{ir}=\boldsymbol{T}_{jr}\end{cases} \tag{10.45}$$

分别在两个边界的条件建立方程组。第一个边界中有 $i=1$, $j=2$, 又有

$$\boldsymbol{V}_1=\boldsymbol{V}_1^{\text{inc}}+\boldsymbol{V}_1^s,\quad \boldsymbol{T}_{1r}=\boldsymbol{T}_{1r}^{\text{inc}}+\boldsymbol{T}_{1r}^s \tag{10.46}$$

综合式(10.30)~(10.37)与式(10.46)、式(10.45),并将 $\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{+l}$ 简写为 $\sum\limits_{lm}$ 得

$$\begin{aligned}&\sum_{lm}[A_{lm}^i\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{1s}r_b)+B_{lm}^i\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{1s}r_b)+C_{lm}^i\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{1c}r_b)]\\&+\sum_{lm}[A_{lm}^s\boldsymbol{M}_{lm}^{(4)}(k_{1s}r_b)+B_{lm}^s\boldsymbol{N}_{lm}^{(4)}(k_{1s}r_b)+C_{lm}^s\boldsymbol{L}_{lm}^{(4)}(k_{1c}r_b)]\\&=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^1\sum_{lm}A_{lm}\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}r_b)\\&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}r_b)\\&-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}r_b)]+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^2\sum_{lm}A_{lm}\\&\cdot\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{nst}r_b)+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\end{aligned}$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{nst}\boldsymbol{r})-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{nst}r_b)\right]\Big\}\tag{10.47}$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left[A_{lm}^{i}\,\boldsymbol{T}_{m}^{(1)}(k_{1s}r_b)+B_{lm}^{i}\,\boldsymbol{T}_{m}^{(1)}(k_{1s}r_b)+C_{lm}^{i}\,\boldsymbol{T}_{rl}^{(1)}(k_{1c}r_b)\right]$$

$$-\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left[A_{lm}^{s}\,\boldsymbol{T}_{m}^{(4)}(k_{1s}r_b)+B_{lm}^{s}\,\boldsymbol{T}_{m}^{(4)}(k_{1s}r_b)+C_{lm}^{s}\,\boldsymbol{T}_{rl}^{(4)}(k_{1c}r_b)\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\sum_{lm}A_{lm}\Big\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}r_b)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}r_b)$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}r_b)\Big]\Big\}$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}\sum_{lm}A_{lm}\Big\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{nst}r_b)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{nst}r_b)$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{nst}r)\Big]\Big\}\tag{10.48}$$

第二个边界有 $i=2$, $j=3$，同样，综合式(10.34)～(10.37)与式(10.43)～(10.45)得

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\sum_{lm}A_{lm}\{-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{1}r_a)]\}$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}\sum_{lm}A_{lm}\{-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{nst}^{1}r_a)]\}$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{3}\sum_{lm}A_{lm}\{-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{2})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{2}r_a)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}[\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{2})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{2}r_a)$$

$$-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{2})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{2}r_a)]\}\tag{10.49}$$

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\sum_{lm}A_{lm}\Big\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^1 r_a)\Big]\Big\}\\
&+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^2\sum_{lm}A_{lm}\Big\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(2)}(k_{nst}^1 r_a)\\
&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(2)}(k_{nst}^1 r_a)\\
&-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(2)}(k_{nst}^1 r_a)\Big]\Big\}\\
=&\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^3\sum_{lm}A_{lm}\Big\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^2,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{L}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^2 r_a)\\
&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^2,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{M}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^2 r_a)\\
&-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^2,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{N}_{lm}^{(1)}(k_{nst}^2 r_a)\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{10.50}
$$

式(10.47)~(10.50)是根据声场的边界条件得到的总方程,其中还含 $\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{nst}r)$,$\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{nst}r)$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{nst}r)$,$\boldsymbol{L}_{lm}^{(i)}(k_{1c}r)$,$\boldsymbol{M}_{lm}^{(i)}(k_{1s}r)$,$\boldsymbol{N}_{lm}^{(i)}(k_{1s}r)$ 等球矢量波函数和相应的 $\boldsymbol{T}_{rm}^{(i)}(k_{1s}r)$,$\boldsymbol{T}_{m}^{(i)}(k_{1s}r)$,$\boldsymbol{T}_{rl}^{(i)}(k_{1c}r)$ 等。

下面将各类球矢量波函数和 $\boldsymbol{T}_{rm}^{(1)}(k_{1s}r)$,$\boldsymbol{T}_{m}^{(1)}(k_{1s}r)$,$\boldsymbol{T}_{rl}^{(1)}(k_{1c}r)$ 等的具体表达式代入以上四个方程,并将每个方程移项处理得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{lm}\Big\{A_{lm}^i\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{1s}r_b)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+B_{lm}^i\Big\{\frac{l(l+1)j_l(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big[j_l'(k_{1s}r_b)+\frac{j_l(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\Big]\Big\}\\
&+C_{lm}^i\Big[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{1c}r_b)+\frac{\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{1c}r_b)}{k_{1c}r_b}\Big]\Big\}\\
&+\sum_{lm}\Big\{A_{lm}^s\sqrt{l(l+1)}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)+B_{lm}^s\Big\{\frac{l(l+1)h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&+\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_b)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\Big]\Big\}+C_{lm}^s\Big[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)\\
&+\frac{\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)h_l^{(2)}(k_{1c}r_b)}{k_{1c}r_b}\Big]\Big\}-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^1\sum_{lm}a_{lm}\Big\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\Big[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{nst}^1r_b)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1r_b)}{k_{nst}r_b}\Big]\\
&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Big\{\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1r_b)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\Big\{\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}^1r_b)}{k_{nst}^1r_b}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)}\Big[j_l'(k_{nst}^1r_b)+\frac{j_l(k_{nst}^1r_b)}{k_{nst}^1r_b}\Big]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\Big\}\Big\}\Big\}\\
&-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^2\sum_{lm}a_{lm}\Big\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})
\end{aligned}
$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)y_l'(k_{nst}^1 r_b)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{nst}^1 r_b)}{k_{nst}^1 r_b}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left\{\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{nst}^1 r_b)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\times\left\{\frac{l(l+1)y_l(k_{nst}^1 r_b)}{k_{nst}^1 r_b}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{l(l+1)}\left[y_l'(k_{nst}^1 r_b)+\frac{y_l(k_{nst}^1 r_b)}{k_{nst}^1 r_b}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\right\}=0 \tag{10.51}$$

$$\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left\{A_{lm}^i\mu\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{1s}r_b)-\frac{1}{r_b}j_l(k_{1s}r_b)\right]\right.$$

$$+B_{lm}^i\left\{\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[\frac{j_l(k_{1s}r_b)}{r_b}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{k_{1s}}\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2}j_l(k_{1s}r_b)+\frac{l^2+l-2}{r_a^2}j_l(k_{1s}r_b)\right]\right\}$$

$$+C_{lm}^i\left\{\frac{1}{k_{1c}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\left[-\lambda k_{1c}^2 j_l(k_{1c}r_b)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2}j_l(k_{1c}r_b)\right]\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{1c}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{2\mu}{r_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{1c}r_b)-\frac{\mu}{r_a^2}j_l(k_{1c}r_b)\right]\right\}\right\}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{j}\omega}\sum_{lm}\left\{A_{lm}^s\mu\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)-\frac{1}{r_b}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)\right]\right.$$

$$+B_{lm}^s\left\{\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)}{r_b}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{\mu}{k_{1s}}\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)+\frac{l^2+l-2}{r_b^2}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)\right]\right\}$$

$$+C_{lm}^s\left\{\frac{1}{k_{1c}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\left[-\lambda k_{1c}^2 h_l^{(2)}(k_{1c}r_b)+2\mu\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_b)\right]\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{1c}}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[\frac{2\mu}{r_b}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}h_l^{(2)}(k_{1c}r_a)-\frac{\mu}{r_b^2}h_l^{(2)}(k_{1c}r_b)\right]\right\}\right\}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^1\sum_{lm}a_{lm}\left\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{nst}^1 r_b)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1 r_b)}{k_{nst}^1 r_b}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left\{-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1 r_b)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})$$

$$\left.\left.\cdot\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}^1 r_b)}{k_{nst}^1 r_b}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)}\left[j_l'(k_{nst}^1 r_b)+\frac{j_l(k_{nst}^1 r_b)}{k_{nst}^1 r_b}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\right\}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^2\sum_{lm}a_{lm}\left\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)y_l'(k_{nst}r_b)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{nst}r_b)}{k_{nst}r_b}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left\{-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{nst}r_b)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\times\left\{\frac{l(l+1)y_l(k_{nst}r_b)}{k_{nst}r_b}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{l(l+1)}\left[y_l'(k_{nst}r_b)+\frac{y_l(k_{nst}r_b)}{k_{nst}r_b}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\right\}\right\}=0 \tag{10.52}$$

第二个边界为

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\sum_{lm}A_{lm}\left\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{nst}^1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{nst}^1r_a)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\right]+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[j_l'(k_{nst}^1r_a)+\frac{j_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\right]\right\}\right]\right\}$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}\sum_{lm}A_{lm}\left\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{nst}^1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}y_l(k_{nst}^1r_a)\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)y_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\right]+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}y_l\right.$$

$$(k_{nst}^1r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left\{\frac{l(l+1)y_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[y_l'(k_{nst}^1r_a)+\frac{y_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\right]\right\}\right]\right\}-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{3}\sum_{lm}A_{lm}$$

$$\cdot\left\{-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^2)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{1}{k_{nst}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{nst}^2r_a)+\frac{\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)j_l(k_{nst}^2r_a)}{k_{nst}^2r_a}\right]\right.$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^2)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^2r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$-\mathrm{j}\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^2)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left\{\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}^2r_a)}{k_{nst}^2r_a}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)\right.$$

$$\left.\left.\left.+\sqrt{l(l+1)}\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\left[j_l'(k_{nst}^2r_a)+\frac{j_l(k_{nst}^2r_a)}{k_{nst}^2r_a}\right]\right]\right]\right\}=0 \tag{10.53}$$

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\right.\ .$$

$$\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_l'(k_{nst}^1r_a)+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}\right]$$

$$+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{nst}^1r_a)\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\left[\frac{l(l+1)j_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{k_{nst}^{1}r_{a}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)}\left[j_{l}'(k_{nst}^{1}r_{a})+\frac{j_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{k_{nst}^{1}r_{a}}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right]\Bigg\}\\
&+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\Bigg\{-\frac{1}{r}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\cdot\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)y_{l}'(k_{nst}^{1}r_{a})+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{y_{nst}^{1}r_{a}}\right]\\
&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\left[-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\right]\\
&-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\left[\frac{l(l+1)y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{k_{nst}^{1}r_{a}}\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)}\left[y_{l}'(k_{nst}^{1}r_{a})+\frac{y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{k_{nst}^{1}r_{a}}\right]\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\right]\Bigg\}\\
&-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{3}\sum_{lm}a_{lm}\Bigg\{-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\left[\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)j_{l}'(k_{nst}^{2}r_{a})+\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})}{k_{nst}^{2}r_{a}}\right]\\
&+\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\Bigg\{-\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\\
&-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\\
&\cdot\left\{\frac{l(l+1)j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})}{k_{nst}^{2}r_{a}}P_{lm}(\theta,\varphi)+\sqrt{l(l+1)}\left[j_{l}'(k_{nst}^{2}r_{a})+\frac{j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})}{k_{nst}^{2}r_{a}}\right]B_{lm}(\theta,\varphi)\right\}\Bigg\}\Bigg\}=0
\end{aligned}
\tag{10.54}
$$

从式(10.51)～(10.54)可以看出，基本方程组简化成了关于矢量球谐 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的方程组，因为方程的右端为零，而 $\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$ 是正交函数集，所以 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$，$\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的每个系数都必须为零才能使方程成立。它们的每个系数又表现为对相关系数的求和，从而为建立线性方程组打下了基础。

在式(10.51)中，令矢量函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零，并经整理可以得到求和方程式

$$
\begin{aligned}
&B_{lm}^{i}\frac{l(l+1)j_{l}(k_{1s}r_{b})}{k_{1s}r_{b}}+C_{lm}^{i}\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_{l}(k_{1c}r_{b})\\
&+B_{lm}^{s}\frac{l(l+1)h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{b})}{k_{1s}r_{b}}+C_{lm}^{s}\frac{1}{k_{1c}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{b})\\
&+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\Bigg[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{1}(k_{1st}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}'(k_{1st}^{1}r_{b})\\
&+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{1}(k_{1st}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\Bigg]\\
&+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\Bigg[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{2}(k_{2st}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}'(k_{2st}^{1}r_{b})
\end{aligned}
$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_{2st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{2st}^1r_b)}{k_{2st}^1r_b}\Bigg]$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^1\sum_{lm}a_{lm}\Bigg[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_{3st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l'(k_{3st}^1r_b)$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_{3st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}\Bigg]$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^2\sum_{lm}a_{lm}\Bigg[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_{1st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l'(k_{1st}^1r_b)$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_{1st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{1st}^1r_b)}{k_{1st}^1r_b}\Bigg]$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^2\sum_{lm}a_{lm}\Bigg[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_{2st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l'(k_{2st}^1r_b)$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_{2st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{2st}^1r_b)}{k_{2st}^1r_b}\Bigg]$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^2\sum_{lm}a_{lm}\Bigg[\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_{3st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l'(k_{3st}^1r_b)$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_{3st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}\Bigg]=0 \tag{10.55}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零，并经整理可得到求和方程式

$$B_{lm}^i\sqrt{l(l+1)}\left[j_l'(k_{1s}r_a)+\frac{j_l(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\right]+C_{lm}^i\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{1c}r_b)}{k_{1c}r_b}$$

$$+B_{lm}^s\sqrt{l(l+1)}\left[h_l'^{(2)}(k_{1s}r_b)+\frac{h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)}{k_{1s}r_b}\right]+C_{lm}^s\frac{\sqrt{l(l+1)}h_l^{(2)}(k_{1c}r_b)}{k_{1c}r_b}$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^1\sum_{lm}a_{lm}\Bigg\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_{1st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{1st}^1r_b)}{k_{1st}^1r_b}$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_{1st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_l'(k_{1st}^1r_b)+\frac{j_l(k_{1st}^1r_b)}{k_{1st}^1r_b}\right]\Bigg\}$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^1\sum_{lm}a_{lm}\Bigg\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_{2st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{2st}^1r_b)}{k_{2st}^1r_b}$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_2(k_{2st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_l'(k_{2st}^1r_a)+\frac{j_l(k_{2st}^1r_b)}{k_{2st}^1r_b}\right]\Bigg\}$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^1\sum_{lm}a_{lm}\Bigg\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_{3st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_3(k_{3st}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_l'(k_{3st}^1r_b)+\frac{j_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}\right]\Bigg\}$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^2\sum_{lm}a_{lm}\Bigg\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_{1st}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_l(k_{1st}^1r_b)}{k_{1st}^1r_b}$$

$$+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_1(k_{1st})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[y_l'(k_{1st}^1r_b)+\frac{j_l(k_{1st}^1r_b)}{k_{1st}^1r_b}\right]\Bigg\}$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{2}(k_{2st}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$\left.+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{2}(k_{2st}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[y_{l}'(k_{2st}^{1}r_{a})+\frac{y_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right]\right\}$$

$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{3}(k_{3st}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})}{k_{3st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$\left.+\mathrm{j}\boldsymbol{V}_{3}(k_{3st}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[y_{l}'(k_{3st}^{1}r_{b})+\frac{y_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})}{k_{3st}^{1}r_{b}}\right]\right\}=0 \tag{10.56}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,可得到求和方程式

$$A_{lm}^{i}\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{1s}r_{b})+A_{lm}^{s}\sqrt{l(l+1)}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{b})$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\boldsymbol{V}_{1}(k_{1st}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\boldsymbol{V}_{2}(k_{2st}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\boldsymbol{V}_{3}(k_{3st}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\boldsymbol{V}_{1}(k_{1st}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\boldsymbol{V}_{2}(k_{2st}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\boldsymbol{V}_{3}(k_{3st}^{1})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})=0 \tag{10.57}$$

同理,在式(10.52)中,令矢量函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,得求和方程式为

$$\frac{1}{\omega}B_{lm}^{i}\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[\frac{j_{l}(k_{1s}r_{b})}{r_{b}}\right]+\frac{1}{\omega}C_{lm}^{i}\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^{2}j_{l}(k_{1c}r_{b})+2\mu\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{2}}j_{l}(k_{1c}r_{b})\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}B_{lm}^{s}\frac{2\mu l(l+1)}{k_{1s}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}\left[\frac{h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{b})}{r_{b}}\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}C_{lm}^{s}\frac{1}{k_{1c}}\left[-\lambda k_{1c}^{2}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{b})+2\mu\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{b})\right]$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}'(k_{1st}^{1}r_{b})\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}'(k_{2st}^{1}r_{b})\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_{l}'(k_{3st}^{1}r_{b})\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})}{k_{3st}^{1}r_{b}}\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_{l}'(k_{1st}^{1}r_{b})\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_{l}'(k_{2st}^{1}r_{b})\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_{l}'(k_{3st}^{1}r_{b})\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})}{k_{3st}^{1}r_{b}}\right\}=0 \tag{10.58}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,得求和方程式为

$$\frac{1}{\omega}B_{lm}^{i}\frac{\mu}{k_{1s}}\sqrt{l(l+1)}\left[\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{2}}j_{l}(k_{1s}r_{b})+\frac{l^{2}+l-2}{r_{b}^{2}}j_{l}(k_{1s}r_{b})\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}C_{lm}^{i}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{1c}}\left[\frac{2\mu}{r_{a}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_{l}(k_{1c}r_{b})-\frac{\mu}{r_{a}^{2}}j_{l}(k_{1c}r_{b})\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}B_{lm}^{s}\frac{\mu}{k_{1s}}\sqrt{l(l+1)}\left[\frac{\mathrm{d}^{2}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{b})+\frac{l^{2}+l-2}{r_{a}^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1s}r_{b})\right]$$

$$+\frac{1}{\omega}C_{lm}^{s}\frac{\sqrt{l(l+1)}}{k_{1c}}\left[\frac{2\mu}{r_{a}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{b})-\frac{\mu}{r_{a}^{2}}h_{l}^{(2)}(k_{1c}r_{b})\right]$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_{l}'(k_{1st}^{1}r_{a})+\frac{j_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\right]\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_{l}'(k_{2st}^{1}r_{b})+\frac{j_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right]\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^{1}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})}{k_{3st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[j_{l}'(k_{3st}^{1}r_{b})+\frac{j_{l}(k_{3st}^{1}r_{b})}{k_{3st}^{1}r_{b}}\right]\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[y_{l}'(k_{1st}^{1}r_{a})+\frac{y_{l}(k_{1st}^{1}r_{b})}{k_{1st}^{1}r_{b}}\right]\right\}$$

$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^{2}\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{2st}^{1}r_{b})}{k_{2st}^{1}r_{b}}\right.$$

$$+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[y_l'(k_{3st}^1r_b)+\frac{y_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}\right]\Bigg\}$$
$$-\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^2\sum_{lm}a_{lm}\left\{\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}\,y_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}\right.$$
$$\left.+\frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[y_l'(k_{3st}^1r_b)+\frac{y_l(k_{3st}^1r_b)}{k_{3st}^1r_b}\right]\right\}=0 \tag{10.59}$$

令矢量函数

$$\frac{1}{\omega}A_{lm}^i\mu\sqrt{l(l+1)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{1s}r_b)-\frac{1}{r_a}j_l(k_{1s}r_b)\right]$$
$$+\frac{1}{\omega}A_{lm}^s\mu\sqrt{l(l+1)}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)-\frac{1}{r_a}h_l^{(2)}(k_{1s}r_b)\right]$$
$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^1\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{1st}^1r_b)$$
$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^1\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{2st}^1r_b)$$
$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^1\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{3st}^1r_b)$$
$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{1st}^2\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{1st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l(k_{1st}^1r_b)$$
$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{2st}^2\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{2st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l(k_{2st}^1r_b)$$
$$+\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{3st}^2\sum_{lm}a_{lm}\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{3st}^1,\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l(k_{3st}^1r_b)=0$$
$$\tag{10.60}$$

同样,在式(10.53)中,令矢量函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,并经整理可以得到求和方程式

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^1A_{lm}\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{1}{k_{nst}^1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{nst}^1r_a)\right]$$
$$+\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}$$
$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^2A_{lm}\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{1}{k_{nst}^1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}y_l(k_{nst}^1r_a)\right]$$
$$+\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^1)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{l(l+1)y_l(k_{nst}^1r_a)}{k_{nst}^1r_a}$$
$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^3A_{lm}\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^2)\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\left[\frac{1}{k_{nst}^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}j_l(k_{nst}^2r_a)\right]$$
$$-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^2)\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{l(l+1)j_l(k_{nst}^2r_a)}{k_{nst}^2r_a}=0 \tag{10.61}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,并经整理可得到求和方程式

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{1} A_{lm}\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}\,j_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}$$

$$+\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\left[j_l'(k_{nst}^{1}r_a)+\frac{j_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{2} A_{lm}\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}\,y_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}$$

$$+\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\left[y_l'(k_{nst}^{1}r_a)+\frac{y_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}\right]$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{3} A_{lm}\,\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{2})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}\,j_l(k_{nst}^{2}r_a)}{k_{nst}^{2}r_a}$$

$$-\mathrm{j}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{2})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\left[j_l'(k_{nst}^{2}r_a)+\frac{j_l(k_{nst}^{2}r_a)}{k_{nst}^{2}r_a}\right]=0 \tag{10.62}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,可得到求和方程式

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{1} A_{lm}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\,j_l(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{2} A_{lm}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{1})\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\,y_l(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{3} A_{lm}\,\boldsymbol{V}_n(k_{nst}^{2})\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\,j_l(k_{nst}^{2}r_a)=0$$

$$\tag{10.63}$$

同样,在式(10.54)中,令矢量函数 $\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,并经整理可以得到求和方程式

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{1} A_{lm}\,\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l'(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{l(l+1)\,j_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{2} A_{lm}\,\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})y_l'(k_{nst}^{1}r_a)$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{l(l+1)\,y_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{3} A_{lm}\,\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})j_l(k_{nst}^{2}r_a)$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{l(l+1)\,j_l(k_{nst}^{2}r_a)}{k_{nst}^{2}r_a}=0 \tag{10.64}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,并经整理可得到求和方程式

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T} c_{nst}^{1} A_{lm}\,\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}\,j_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\left[j_l'(k_{nst}^{1}r_a)+\frac{j_l(k_{nst}^{1}r_a)}{k_{nst}^{1}r_a}\right]$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}A_{lm}\ \frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{k_{nst}^{1}r_{a}}$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\left[y_{l}'(k_{nst}^{1}r_{a})+\frac{y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})}{k_{nst}^{1}r_{a}}\right]$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{3}A_{lm}\ \frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{P}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})}{k_{nst}^{2}r_{a}}$$

$$-\frac{1}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\boldsymbol{B}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}\left[j_{l}'(k_{nst}^{2}r_{a})+\frac{j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})}{k_{nst}^{2}r_{a}}\right]=0 \tag{10.65}$$

令矢量函数 $\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)$ 的系数为零,可得到求和方程式

$$\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{1}A_{lm}\ \frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})$$

$$+\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{2}A_{lm}\ \frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{1},\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}y_{l}(k_{nst}^{1}r_{a})$$

$$-\sum_{n=1}^{3}\sum_{s=0}^{S}\sum_{t=0}^{T}c_{nst}^{3}A_{lm}\ \frac{\mathrm{j}}{\boldsymbol{r}}\boldsymbol{G}(k_{nst}^{2},\theta_{ks},\varphi_{kt})\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\boldsymbol{C}_{lm}(\theta_{ks},\varphi_{kt})\sqrt{l(l+1)}j_{l}(k_{nst}^{2}r_{a})=0 \tag{10.66}$$

至此,我们根据正交矢量函数集 $\{\boldsymbol{P}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{B}_{lm}(\theta,\varphi),\boldsymbol{C}_{lm}(\theta,\varphi)\}$ 的特性,将边界条件简化成了有限级数方程组的形式。在简化后的方程组中除了矢量间的点乘运算,已无其他的复杂运算。

参 考 文 献

[1] 郑洲官. 各向异性二层球的弹性波散射分析. 杭州:杭州电子科技大学硕士学位论文,2007.

[2] PaoY H,Mow C C. Theory of normal modes and ultrasonic spectral analysis of the scattering of waves in solids. Journal of the Acoustical Society of America,1976,59:1046.

[3] Pao Y H,Varathatajulu V. Principle condition and integral formulas for the scattering of elastic waves. Journal of the Acoustical Society of America,1976,59 :1361～1371.

[4] Veksler N,Izbicki J L,Conoir J M. Elastic wave scatttering by cylindrical shell. Wave Motion,1999,9(3):195～209.

[5] 李献忠,姜稚清,冯文杰. 弹性波散射的逐次超松驰法. 石家庄铁道学院学报,2004,(3).

[6] Jain D L,Kanwal R P. The born approximation for the scattering theory of elastic waves by two-dimensional flaws. Journal of Applied Physics,1982,53 :4208～4217.

[7] Kleinman R E,Roach G F,van den Berg P M. A convergent born series for large refractive indices. Journal of the Optical Society of America,1990,7:890～897.

[8] 冯仰德,汪越胜,章梓茂. 单侧摩擦约束夹杂物的瞬态弹性波散射的时域边界元分析——反平面情况. 固体力学学报,2002,(3).

[9] 汪越胜,于桂兰,章梓茂,等. 复杂界面(界面层)条件下的弹性波传播问题研究综述力学进展,2000,(3).

[10] Bescos D E. Boundary element methods in dynamic analysis, part II (1986 ～ 1996). Applied

Mechanics Reviews,1997,50:149～197.

[11] Bescos D E. Boundary element methods in dynamic analysis. Applied Mechanics Reviews,1987, 40:1～23.

[12] Higdon R L. Absorbing boundary conditions for elastic wave. Geophysics,1991,56(2):231～241.

[13] Schroder C T. A Finite-difference model for elastic waves in the ground. Diploma Thesis,University of Braunschweig,Germany,1999.

[14] Yu Z. A bandpass source technique for the FDTD analysis of waveguide discontinuity. Microwave and Optical Technology Letters,1998,17(2):132～135.

[15] Yee K S. Numerical solution of initial boundary value problem involving Maxwell equation in isotropic media. IEEE Transactions on Antenna Propagatation,1996,14(3):302～307.

[16] 杜修力,熊建国,关慧敏. 平面 SH 波散射问题的边界积分方程分析法. 地震学报,1993,(3).

[17] 王长清,祝西里. 电磁场计算中的时域有限差分法. 北京:北京大学出版社,1993.

[18] 葛德彪,闫玉波. 电磁波时域有限差分方法. 西安: 西安电子科技大学出版社,2002.

[19] Berenger J P. Perfectly matched layer for the FDTD solution of wave-structure interaction problem. Journal of Computational Physics,1996,44(2):110～117.

[20] Gedney S D. An anisotropic perfectly matched layer absorbing media for the truncation of FDTD lattices. IEEE Transactions on Antenna Propagatation,1996,44(12):1630～1639.

[21] Clayton R,Egquist. Absorbing boudary conditions for acoustic and elastic wave equations. Bulletin of the Seismological Society of America,1977,67:1529～1540.

[22] Higdon R L. Absorbing boundary conditions for elastic wave. Geophysics,1991,56(2):231～241.

[23] Yu Z. A bandpass source technique for the FDTD analysis of waveguide discontinuity. Microwave and Optical Technology Letters,1998,17(2):132～135.

[24] Alterman Z S,Karal F C. Propagation of elastic waves in layered media by finite-difference methods. Bulletin of the Seismological Society of America,1968,58:367～398.

[25] Schroder C T,Scott W R. On the stability of the FDTD algorothm for elastic media at a material interface. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing,2002,40(2):474～481.

[26] 郑宏兴,黄文武,谢洪波,等. 弹性波时域仿真的两个问题. 天津大学学报,2005,38(4):338～342.

[27] Finlayson B A,Scriven L E. The method of weighted residuals-areview. Applied Mechanics Reviews, 1966,19:738～748.

[28] 王瑁成. 有限单元法. 北京:清华大学出版社,2003.

[29] 李景湧. 有限元法. 北京:北京邮电大学出版社,1999.

[30] 熊建国,关慧敏,杜修力. 级数解边界积分法及其在地震波散射问题中的应用. 地震工程与工程振动,1991,(2).

[31] 刘晶波,廖振鹏. 地震波散射问题的数值解. 地震工程与工程振动,1987,(2).

[32] 王志良,任伟. 电磁散射理论. 成都:四川科学技术出版社,1992

[33] 任伟,赵家升. 电磁场与微波技术. 北京:电子工业出版社,2005.

[34] Rew W. Contributions to the electromagnetic wave theory of bounded homogeneous anisotropic media. Physics Reviews E,1993,47(1):664～673.

[35] Rew W. Spherical wave functions and dyadic Green's functions for homogeneous elastic anitropic media. Physics Reviews E,1993,47(6):4439～4446.

[36] Rew W. Exact solutions of coupled-wave equations in piezoelectric solids. Journal of Mathematical Physics,1993,34(11):5376～5390.

[37] Zimmerman C. Scattering of plane compressional waves by spherical inclusions in a poroelastic

medium. Journal of the Acoustical Society of America,1993,94(1):527～536.

[38] 王航,魏培君.基于积分方程方法的弹性波数值计算.山西师范大学学报(自然科学版),2007,(1).

[39] 郑贤斌,陈国明,袁超红.基于弹性波监测的油气管道管跨定位研究.石油工程建设,2007,(1).

[40] 李洪升,任权,郭杏林.基于弹性波反演的压力管道损伤识别.计算力学学报,2004,(1).

[41] Liu P L,Tsai C D,Wu T T. Inversion of the elastic parameters of layered medium. Journal of the Acoustical Society of America,1995,97(3):1687～1693.

[42] 王从约,夏源明.圆杆中弹性应力波的傅里叶弥散分析.爆炸与冲击,1998,(1).

[43] 孙海信.小波分析在弹性波顶煤厚度探测信号处理中的应用.青岛:山东科技大学硕士学位论文,2003.

[44] Unser M. Texture classification and segmentation using wavelet frames. IEEE Transactions on Image Processing,1995,4(11):1549～1560.

[45] Youla D C. Image restoration by the method of convex projections. IEEE Transactions on Medical Imaging,1982,10(1):81～101.

[46] Qing S R. The research of wavelet transform analysis system for engineering signals. Chinese Journal of Mechanical Engineering,2000,13(2):419～423.

[47] Qing S R. Sampling principle and technology in wavelet analysis for signals. Chinese Journal of Mechanical Engineering,1998,11(4):259～263.

[48] Ragheb H A,Hamid M. Simulation of cylindrical scatlering surface by conducting strips. International Journal of Electronics,1988,64(4):521～535.

[49] Antonini M,et al. Image coding using wavelet transforms. IEEE Transactions on Image Processing,1992,1(2):205～220.

[50] Daubechies I. Orthomonal bases of compactly supported wavelets. Common Pure Applied Mathematics,1988,(41):909～996.

[51] Mallat S G. A Theory for multiresolution signal decomposition. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence,1989,11(7):674～693.

[52] Mallat S. Zero-crossings of a wavelet transform. IEEE Transactions on Information Theory,199,37(4):1019～1033.

[53] Lang M,Guo H,Odegard J E,et al. Noise reduction using an undecimated discrete wavelet transform. IEEE Signal Processing Ietters,1996,3(1):10～12.

[54] 苏巍,陈树民,刘财,等.各向异性介质弹性波场成像的 Thomsen 参数影响研究与分析.大庆石油地质与开发,2007,(2).

[55] 熊煜,李录明,罗省贤.各向异性介质弹性波场正演及偏移.成都理工大学学报(自然科学版),2006,(3).

[56] 李信富,李小凡,李米田.地震波散射研究回顾与展望.物探化探计算技术,2007,(4).

[57] 李小凡.大延伸非均匀介质中地震波全弹性散射理论Ⅰ——弹性波单次散射理论.力学学报,2002,(4).

[58] 李小凡.大延伸非均匀介质中地震波全弹性散射理论Ⅱ——弹性波多次散射理论.力学学报,2002,(5).

[59] 符力耘,杨慧珠,牟永光.非均匀介质散射问题的体积分方程数值解法.力学学报,1998,(4).

[60] Chernov Lev A. Wave Propagation in a Random Medium. New York:McGraw-Hill,1960.

[61] AKIK. Analysis of the seismic coda of local earth-quakes as scattered waves. Journal of Geophysical Research,1969,74:615.

[62] AKIK. Origin of coda waves: source, at tenuation and scattering effects. Journal of Geophysical

Research,1975,80:3322.

[63] Sato H. Energy propagation including scattering effects: single isotropic scattering approximation. Physics Earth,1977,(25):27.

[64] Haddonr A W. Corrugations on the CMB or transition layers between inner and outer cores. Transactions on American Geophysics Union,1972,53:600.

[65] L S Gao, L C Lee, N N Biswas, et al. Comparison of the effects between single and multiple scattering on coda waves for local earthquakes. Bulletin of the Seismological Society of America, 1983,73:377～390.

[66] AKIK. Scattering and attenuation of shear waves in the lithosphere. Journal of Geophysical Research,1980,85:6496.

[67] Wu R S. Attenuation of short period seismic waves due to scattering. Geophysical Research Letters, 1982,9:9～12.

[68] Korvin G. General theorem on mean wave attenuation. Geophysics Transactions,1983,29:191.

[69] Capon J. Characterization of crust and upper mantle structure under LASA as a random media. Bulletin of the Seismological Society of America,1974,64:235.

[70] Berteussen K A. Wave scattering theory in analysis of P wave anomalies at NORSAR and LASA. Geophysical Journal Royal Astronomical Society,1975,42:403.

[71] Flatte S M,Wu R S. Small scale structure in the lithosphere and asthenosphere deduced from arrival time and amplitude fluctuations. Journal of Geophysical Research,1988,93:6601.

[72] Aki K I, Richards P G. Quantitative Seismology. New York: University Science Books, 2002: 144～154.

[73] Li X F. Elastic scattering of P and S wave from a continuous and heterogeneous layer. Geophysical Journal International,1993,8:1～61.

[74] Fornberg B. The pseudospectral method:acurate representation of interfaces in elastic wave calculations. Geophysics,1988,53(5):625～637.

[75] Solomon S G,Uberall,Yoo H,et al. Conversion and resonance scatering of elastic waves from acylindrical fluid-filled cavity. Acutica,1984,55:147～159.

[76] Auld B A. Acoustic Fields and Waves Insolids. New York:Wiley,1990:299～300.

[77] 阮颖铮. 雷达截面与隐身技术. 北京:国防工业出版社,1998.

第十一章　均匀各向同性/异性介质圆柱的高频波函数理论

本章取材于刘宁硕士学位论文第三章[1]，如果没有刘宁的协助，要完成本章是不可能的。

基于第七章的内容，均匀各向异性介质的平面波函数理论已经给出，通过进一步研究发现：均匀各向异性介质圆柱的平面波函数理论在求解电小尺寸目标物体的电磁散射特性时非常准确和高效；但对于分析求解电大尺寸目标物体的电磁散射特性有较大的误差，为了弥补平面波函数解的不足，本章给出了适合于求解电大尺寸目标物体电磁散射特性的高频波函数解，并建立了相应的公式体系。

不同于以往利用高斯簇分析物体电磁散射的方法[2]，在求解均匀各向同性和异性介质圆柱的高频波函数解时，只是采用了复源点的场结构，而没有利用其产生的电磁场去分析均匀各向同性/异性介质圆柱的电磁散射问题。结合波函数理论，从复源点的场结构，即第四类 Bessel 函数去求解单层和多层均匀各向同性/异性介质圆柱各区域的电磁场表达式。

各向异性电介质和弹性各向异性材料在毫米波器件、集成光电器件和声波器件中被广泛采用。介电率 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和磁导率 $\boldsymbol{\mu}$ 是描述均匀介质中电磁场性质的最基本的两个物理量。在已知的物质世界中，$\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 都为正值，电场、磁场和波矢三者构成右手关系，这样的物质被称为右手材料。1967 年，苏联物理学家 Veselago 发表论文，报道了他在理论研究中对物质电磁学性质的新发现，即当 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 都为负值时，电场、磁场和波矢之间构成左手关系，磁波在其中的能量传播方向与波矢方向相反，他称这种假想的物质为左手材料。同时指出，电磁波在左手材料中的行为与在右手材料中相反，比如光的负折射、负的切连科夫效应、反多普勒效应等。2001 年美国加州大学制成了左手材料并观察到其反常折射现象，引起学界关注；2003 年美国麻省理工和东北大学实验证明了左手材料的可制造，引起学界、业界和军方的高度重视；2003 年美国《Science》将左手材料的研制纳入年度十大科学进展。近年来，左手材料成为固体物理、材料科学、应用电磁学领域内的研究热点，对左手材料的研究呈现迅速发展之势。左手材料具有很多奇特的性质，用左手材料制作的元器件可以很方便地对微波进行滤波、调控与聚焦。我国要紧跟国际研究潮流，开发相应的软件，应用于对各类复杂介质的研究，指导对新材料的开发利用。任何新型各向异性材料，只要确定了其无界空间的本征平面波解，都可以用这套软件分析其有界成层柱和成层球的散射特性，还可以进一步研究各向异性成层柱的导行与各向异性成层球的谐振。

本章提出的高频波函数解主要分析了均匀各向异性介质的电磁散射特性。但是，该方法对上文中所提及的左手材料和右手材料的电磁特性分析也具有普遍的适用性，这将为进一步研究左手材料和右手材料的电磁散射特性奠定良好的理论基础。本章理论可以重写，用矩量法和复源点重写。这是作者在 1995 年博士后工作期间工作的延伸，在哲学上很有味道，完成了波函数理论的完全打通。工作才开了一个头，还有大量实践的工作有待完成。

11.1　复射线理论基础

复射线理论是根据几何曲线和几何运算的数学方法来研究高频场与波的传播和散射规律的。它既可以应用于高频电磁波,如可见光、激光、红外和微波,也可以应用与弹性波,如地震波、水声和声表面波。

全面描述在一个相对任意的环境中传播的电磁场是一个极端复杂的问题,它要求按照给定的边界条件求解 Maxwell 方程或波动方程。只有当散射体的几何形状与某一个可分离的坐标系相吻合,因而有严格地级数解可以利用时,波动方程才能按照传统的分析方法求得解析解。对于高频场,众所周知,波的传播和散射具有"局部"特性,即:在一个给定观察点的领域内的场不是决定于整个初始表面上的场分布,而只取决于该表面的某一有限部分,因此,利用复射线几何光学理论的分析方法处理高频波的传播和散射问题可以大大简化。

11.1.1　复源点及其场量的表达式

实空间中高频波源的位置由源点坐标 $S(x_S, y_S, z_S)$ 给定。如果将 S 的三个坐标值分别赋予适当的虚部,则源点的坐标将由三维实空间解析延拓到六维复空间,在复空间内的复源点坐标由 $\boldsymbol{S}(\boldsymbol{x}_S, \boldsymbol{y}_S, \boldsymbol{z}_S)$ 给定,其中

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_S = x_S + \mathrm{j}x'_S \\ \boldsymbol{y}_S = y_S + \mathrm{j}y'_S \\ \boldsymbol{z}_S = z_S + \mathrm{j}z'_S \end{cases} \tag{11.1}$$

式中,x'_S、y'_S、z'_S 表示复源点坐标的虚部。在复射线理论中定义一个波束矢量 $\boldsymbol{b}$,称矢量 $\boldsymbol{b}$ 的模 b 为波数宽度参量,称矢量 $\boldsymbol{b}$ 的指向为波束轴向或最大辐射方向,它与三个坐标轴的夹角分别为矢量 $\boldsymbol{b}$ 的三个方向角 α,β,γ,并令矢量 $\boldsymbol{b}$ 在三个坐标轴上的投影为复源点坐标的虚部。根据这些假设,如图 11.1 所示,式(11.1)可以写为[3]

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}_S = x_S + \mathrm{j}b\cos\alpha \\ \boldsymbol{y}_S = y_S + \mathrm{j}b\cos\beta \\ \boldsymbol{z}_S = z_S + \mathrm{j}b\cos\gamma \end{cases} \tag{11.2}$$

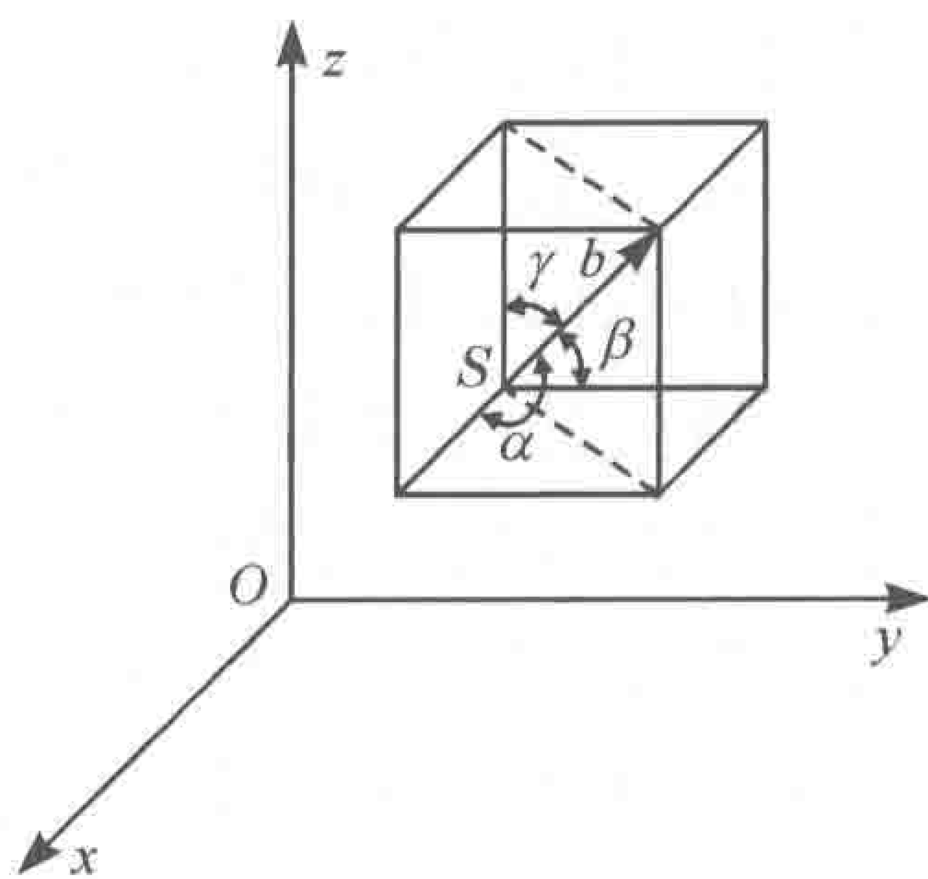


图 11.1　三维源点的复数延拓

这样就得到了具有确定复数坐标的复源点。但是，对于讨论的场点或者观察点，由于它必须位于可见的实空间内才具有物理意义，因此它必须保持为实坐标。

为了便于理解复源点和复射线的属性，首先讨论一下简单的二维线源在无界均匀介质中的场。假定无限长的单位强度线电流源平行于 x 轴（ $\partial/\partial x=0$ ），线源在实空间的坐标为 $S(y_S, z_S)$，任意观察点的坐标为 $P(y, z)$ 。根据几何光学原理，P 点的场可由线电流源的柱面波格林函数表达为

$$E_x=-\frac{\omega\mu}{4}H_0^{(1)}(kR) \tag{11.3}$$

式中，k 为介质的波数，R 为源点到场点的距离，即

$$R=\sqrt{(y-y_S)^2+(z-z_S)^2} \tag{11.4}$$

现在对线源坐标赋予复数值。为了简单起见，假定实线源位于坐标原点，且波束矢量 $\boldsymbol{b}$ 沿 $+z$ 轴方向（通过坐标平移和旋转，在新坐标系内这个假定总是能实现的），于是 $y_S=z_S=y_S'=0$，如图 11.2 所示，因此二维复源点坐标可简化为

$$\boldsymbol{y}_S=0+\mathrm{j}0,\quad \boldsymbol{z}_S=0+\mathrm{j}b \tag{11.5}$$

式中，b 为任意给定的正实数。这时，从复源点 $\boldsymbol{S}(0,\mathrm{j}b)$ 到实观察点 $P(y,z)$ 的距离就变成了复射线距离 $\boldsymbol{R}$

$$\boldsymbol{R}=\sqrt{(y-\boldsymbol{y}_S)^2+(z-\boldsymbol{z}_S)^2}=\sqrt{y^2+(z-\mathrm{j}b)^2},\ \mathrm{Re}(\boldsymbol{R})\geqslant 0 \tag{11.6}$$

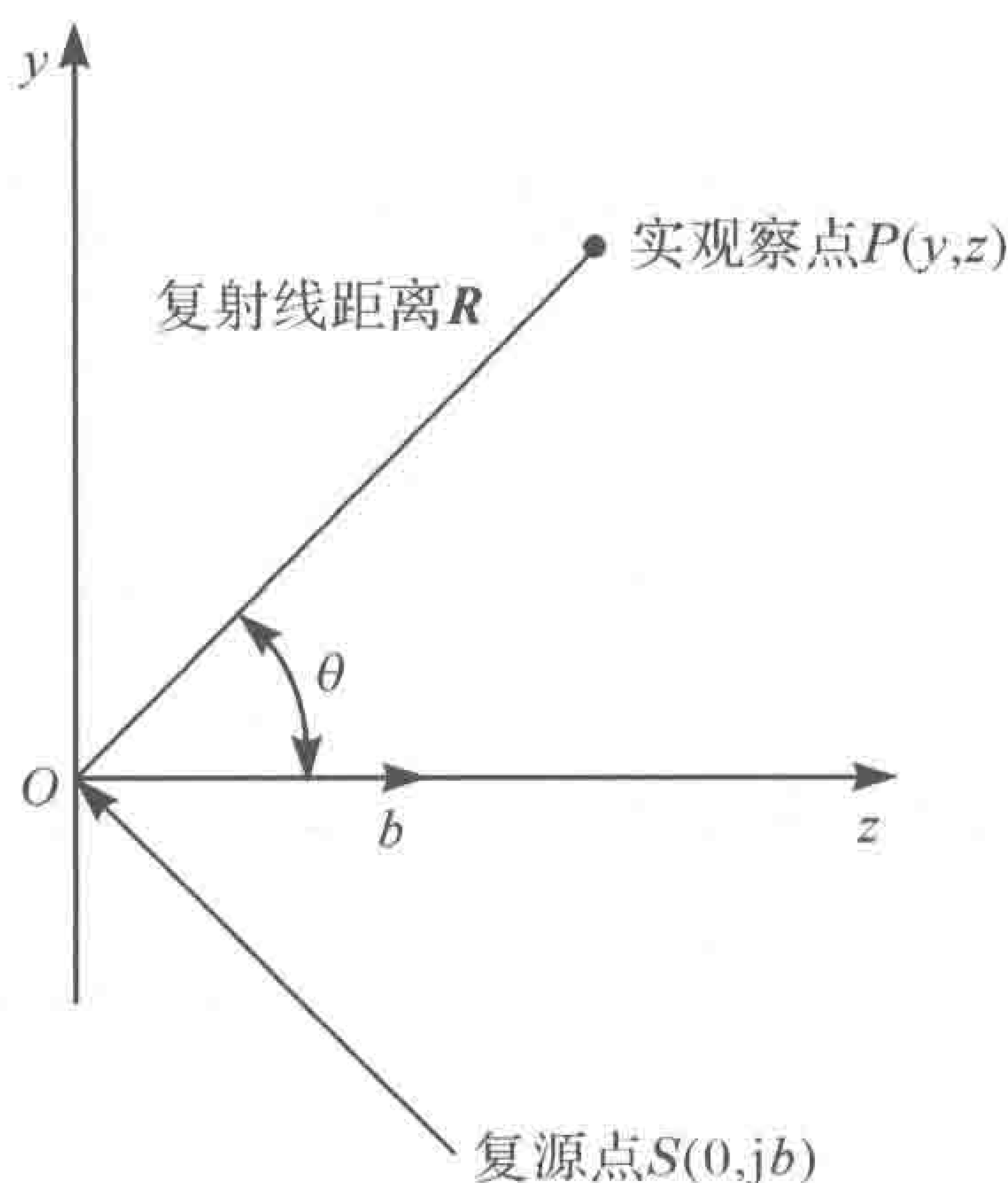


图 11.2　复源点和复射线

根据复变函数解析延拓的原理，只要用复距离 $\boldsymbol{R}$ 代替式(11.3)中的实距离 R，就可以直接求解复源点的场为

$$E_x=-\frac{\omega\mu}{4}H_0^{(1)}(k\boldsymbol{R}) \tag{11.7}$$

需要说明的是：式(11.7)为无界均匀无耗介质中二维复源点场的简洁表达式。复源点与高斯束分别代表波动方程的严格解和近轴近似解，而在近轴情况下两者一样。

11.1.2　利用复源点分析均匀各向异性介质柱的高频波函数模型

在图 11.3 中，波束矢量 $\boldsymbol{b}$ 与 x 轴的夹角为 β，故复源点的坐标可以写成

$$\boldsymbol{\rho}_s = \boldsymbol{r}_0 + \mathrm{j}\boldsymbol{b} = \frac{a}{2}\boldsymbol{a}_x + \mathrm{j}b(\cos\beta\boldsymbol{a}_x + \sin\beta\boldsymbol{a}_y) \tag{11.8}$$

式中,$\boldsymbol{\rho}_s$ 模等于

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\rho}_s| &= |\boldsymbol{r}_0 + \mathrm{j}\boldsymbol{b}| \\ &= \sqrt{r_0^2 + 2\mathrm{j}r_0 b\cos\beta - b^2} \end{aligned} \tag{11.9}$$

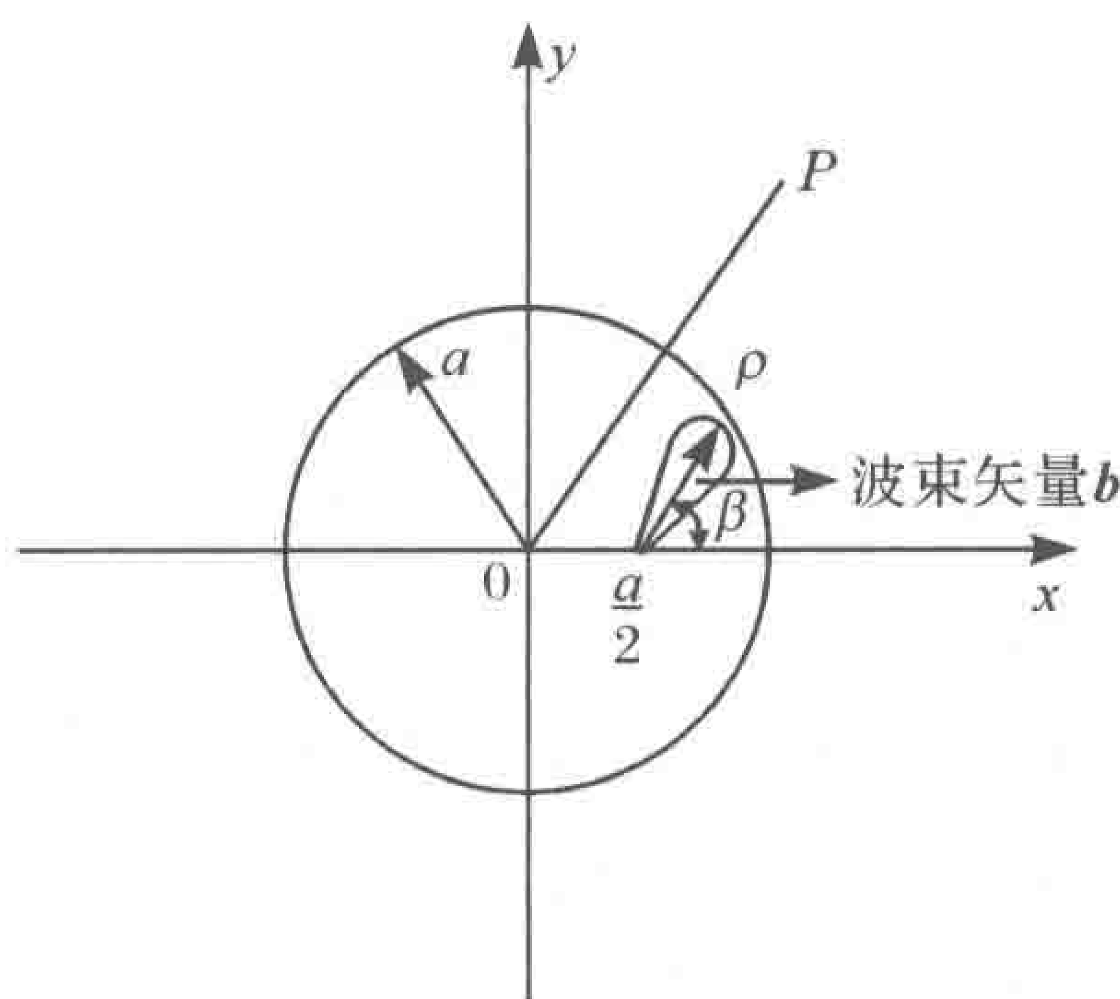


图 11.3　均匀各向异性介质柱的高频波函数模型

由均匀各向异性介质圆柱的波函数理论知:均匀各向异性圆柱的波数 k 不再是常数,而是关于 φ_k 的函数,如

$$k = \left(\frac{n_H^2}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- \cos2\varphi_k + \sigma_+ \sin2\varphi_k}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{11.10}$$

式中

$$n_H = \omega\sqrt{\mu_{zz}\gamma} \tag{11.11}$$

$$\varepsilon_\pm = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xx} \pm \varepsilon_{yy}),\quad \sigma_\pm = \frac{1}{2}(\varepsilon_{xy} \pm \varepsilon_{yx}) \tag{11.12}$$

φ_k 是 $[0,2\pi]$ 上的连续变量,为了计算方便,把 φ_k 离散化,即

$$\varphi_{kn} = \frac{2\pi}{2N+1}s,\quad s = -N,\cdots,N \tag{11.13}$$

所以式(11.10)可以写成

$$k(\varphi_{kn}) = \left(\frac{n_H^2}{\varepsilon_+ + \varepsilon_- \cos2\varphi_{kn} + \sigma_+ \sin2\varphi_{kn}}\right)^{\frac{1}{2}},\quad n = -N,\cdots,N \tag{11.14}$$

在图 11.3 中,圆柱内部放置的复源点(高斯簇)具有局部特性,对于每一个 φ_{kn} 都对应一个 ρ_{sn},因此可以把其产生的场写成

$$H = cH_0^{(2)}(|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{sn}|) \tag{11.15}$$

式中,c 为一待定常数。利用第七章中介绍的波函数的坐标变换,可以把此式化为

$$H(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) = c\begin{cases} \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n H_n^{(2)}(\rho_{sn}) J_n(\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}, & \rho < \rho_{sn} \\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} b_n J_n(\rho_{sn}) H_n^{(2)}(\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}, & \rho > \rho_{sn} \end{cases}$$

$$=c\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty} H_n^{(2)}(\rho_{sn})J_n(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\rho_{sn})H_n^{(2)}(\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases} \tag{11.16}$$

式中，矢径

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\rho}_{sn} &= \boldsymbol{r}_0+\mathrm{j}\boldsymbol{b}\\ &=\frac{a}{2}\boldsymbol{a}_x+\mathrm{j}\boldsymbol{b}(\cos\varphi_{kn}\boldsymbol{a}_x+\sin\varphi_{kn}\boldsymbol{a}_y)\end{aligned} \tag{11.17}$$

故其模为

$$\begin{aligned}\rho_{sn} &= |\boldsymbol{r}_0+\mathrm{j}\boldsymbol{b}|\\ &=\sqrt{r_0^2+2\mathrm{j}r_0b\cos\varphi_{kn}-b^2}\end{aligned} \tag{11.18}$$

11.2　均匀各向同性单层介质圆柱的高频波函数解

本小节根据复射线理论和高频波函数解模型推导出了均匀各向同性单层和两层介质圆柱的高频波函数解，给出了详尽的高频波函数场解表达式。

11.2.1　均匀各向同性单层介质圆柱的 *H* 极化高频波函数解

根据上一节的内容，先对均匀各向同性介质圆柱的高频波函数解作进一步研究。对于前向波研究，通常取 $\beta=0$ 。由于均匀各向同性介质圆柱中，波数 $k(\varphi_k)$ 不再是关于 φ_k 的函数，而是一个常数，即 $k=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$ 。在图 11.3 中，均匀各向同性介质圆柱内部放置的复源点（高斯簇）具有局部特性，其内部的电磁场可由高斯簇的某些局部区域决定。因此，在均匀各向同性介质内部，对于每一个 φ_k，复源点的坐标表达式都不同。

对于前向波研究，$\beta=0$ 。再考虑到所求解的场在圆柱内部 $\rho=0$ 处是有限的，并且由 Bessel 函数的性质，经过坐标变换可以得到适合于求解圆柱外部入射场的表达式

$$\begin{aligned}H^{\mathrm{in}}(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) &= \begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}\\ &= \begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}\\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n^i \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\end{aligned} \tag{11.19}$$

式中，$a_n^i=J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}}$，$a_n^i$ 为入射系数。

在自由空间中，利用 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$ 可以求得入射电场的表达式为

$$E^{\mathrm{in}}(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=-\mathrm{j}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n J_n(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n J_n(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\mathrm{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=-\mathrm{j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n b_n^i\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{11.20}$$

式中，$b_n^i=J_n(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\mathrm{inc}}}$。

在圆柱外部(自由空间)，由于只有第二类 Hankel 函数是在 $\rho\to\infty$ 消失的唯一解，所以可以写出适合于求解圆柱外部散射场的场表达式

$$H^s(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n G_n J_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n G_n J_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n^s\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n^{s'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases} \tag{11.21}$$

式中，$a_n^s=G_nH_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)$；$a_n^{s'}=G_nJ_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)}(k_0\rho)$。这里的 a_n^s 和 $a_n^{s'}$ 称为散射系数。

同样利用 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon_0\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}$，可以求得散射电场的表达式

$$E^s(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\varepsilon_0}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n G_n J_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)'}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=-\mathrm{j}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J'_n(k_0\rho)\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_n G_n J_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)'}(k_0\rho)\left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=-\mathrm{j}\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n^s b_n^s \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn} \\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n^{s'} b_n^{s'} \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases} \tag{11.22}$$

式中，$b_n^s=\dfrac{J'_n(k_0\rho)}{J_n(k_0\rho)}$；$b_n^s=\dfrac{H_n^{(2)'}(k_0\rho)}{H_n^{(2)}(k_0\rho)}$。

根据文献[4]，在均匀各向异性圆柱内部的场可以写成

$$H_z^{(i)}(\rho,\varphi,\varphi_k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{11.23}$$

式中，$Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]$ 为第 i 类 n 阶 Bessel 函数。但是在各向同性介质圆柱中，波数 $k(\varphi_{kn})$ 为一常数，即 $k(\varphi_{kn})=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}=k$。同样由于考虑的场在 $\rho=0$ 处是有限的，且在 $\rho=0$ 处只有第一类 Bessel 函数是非奇异的，可以得到适合于求解圆柱内部的场的表达式为

$$H(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\sum_{n=-N}^{N} a_n J_n(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|) \tag{11.24}$$

在此根据式(11.24)可以将式(11.23)写成

$$\begin{aligned}H(\rho,\varphi,\varphi_{kn})&=\sum_{m=-N}^{N} a_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{mn}(k\rho_{sn})J_{mn}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})} \\ &=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\sum_{n=-N}^{N} J_{mn}(k\rho_{sn})J_{mn}(k\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{kn}}\end{aligned} \tag{11.25}$$

在均匀各向同性介质圆柱内部，电场和磁场满足 Maxwell 方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\varepsilon\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{11.26}$$

式中，ε 为均匀各向同性介质圆柱中介质的介电常数。

进一步化简式(11.26)，可得

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_\rho & \rho\,\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\varphi & H_z\end{vmatrix} \\ &=\left(\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\varphi+\left(\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{a}_z\end{aligned} \tag{11.27}$$

在只考虑 $\boldsymbol{H}$ 极化（$\boldsymbol{H}=H\boldsymbol{a}_z$）的情况下，式(11.27)又可以写成

$$\begin{aligned}\nabla\times\boldsymbol{H}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_\rho & \rho\,\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_\rho & \rho H_\varphi & H_z\end{vmatrix} \\ &=\left(\frac{\partial H_z}{\partial\theta}-\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial H_\rho}{\partial z}-\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\varphi+\left(\frac{\partial(\rho H_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi}\right)\boldsymbol{a}_z \\ &=\frac{\partial H_z}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_\rho-\rho\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\boldsymbol{a}_\varphi\end{aligned} \tag{11.28}$$

式(11.26)的右面可以写成

$$\varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \begin{bmatrix} E_\rho \\ \rho E_\varphi \\ E_z \end{bmatrix} \tag{11.29}$$

利用式(11.28)和式(11.29)得到

$$\mathrm{j}\omega\varepsilon\rho E_\varphi = -\rho \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \tag{11.30}$$

即

$$\begin{aligned} E_\varphi(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) &= -\frac{1}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial \rho} \\ &= -\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \sum_{n=-N}^{N} J_{mn}(k\rho_{sn}) J'_{mn}(k\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_{kn}} \end{aligned} \tag{11.31}$$

利用电场和磁场在边界上的连续性,并由均匀各向同性介质圆柱内部和外部的电磁场表达式,可以列写出矩阵方程

$$\begin{cases} Ha = a_n^{i'} + a_n^{s'} \\ Ea = b_n^{i'} + b_n^{s} a_n^{s'} \end{cases} \tag{11.32}$$

式中

$$H = J_{nm}[k(\varphi_{km})\rho_{sm}] J_{nm}(k\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_{km}} \Bigg|_{\rho = a}^{\rho_0 = a/2} \tag{11.33}$$

$$E = -\mathrm{j}\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{k}{\omega\gamma} J_{nm}(k\rho_{sm}) J'_{nm}(k\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_{km}} \Bigg|_{\rho = a}^{\rho_0 = a/2} \tag{11.34}$$

通过求解式(11.32),可得

$$a_n^{s'} = (b_n^{s'} - EH^{-1})^{-1}(EH^{-1} a_n^{i} - b_n^{i'}) \tag{11.35}$$

根据求得的散射参量,可以对均匀各向同性介质圆柱的其他电磁散射特性进行分析和求解。

11.2.2 均匀各向同性单层介质圆柱的 *E* 极化高频波函数解

前文给出了 ***H*** 极化的高频波函数解。均匀各向异性异性介质的介电常数和磁导率可以表示成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & 0 \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{bmatrix} \tag{11.36}$$

由于这两个张量在形式上的相似性和电磁学上的二重性原理,前文中只分析了 ***H*** 极化的情形,***E*** 极化的情形可作代换得到

$$\begin{cases} \varepsilon \to \mu, & k \to k, & \boldsymbol{H} \to -\boldsymbol{E} \\ \mu \to \varepsilon, & \eta \to 1/\eta, & \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{H} \end{cases} \tag{11.37}$$

式中,k 和 η 分别为自由空间的波阻抗和波数。因此可以得到适合于求解均匀各向同性介质圆柱外部入射场的表达式

$$E^{\text{in}}(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n^i\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{11.38}$$

式中，$a_n^i=J_n(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\text{inc}}}$，$a_n^i$ 为入射系数。

在自由空间中，利用 Maxwell 方程 $\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}$ 可以求得入射电场的表达式

$$H^{\text{in}}(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=-\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n'(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n'(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\mathrm{j}\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n'(k_0\rho)\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n J_n(k_0\rho_{sn})J_n'(k_0\rho)\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi^{\text{inc}})}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\mathrm{j}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n b_n^i\left(\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi} \tag{11.39}$$

式中，$b_n^i=J_n(k_0\rho_{sn})J_n'(k_0\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi^{\text{inc}}}$。

同样的原理，在圆柱外部（自由空间），由于只有第二类 Hankel 函数是在 $\rho\to\infty$ 消失的唯一解，所以可以写出适合于求解圆柱外部散射场的场表达式

$$E^{s}(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n G_n J_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn})J_n(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n G_n J_n(k_0\rho_{sn})H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n^{s}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n a_n^{s'}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases} \tag{11.40}$$

式中,$a_n^s = G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn}) J_n(k_0\rho)$;$a_n^{s'} = G_n J_n(k_0\rho_{sn}) H_n^{(2)}(k_0\rho)$ 。这里的 a_n^s 和 $a_n^{s'}$ 称为散射系数。

同样利用 Maxwell 方程 $\nabla\times \boldsymbol{E} = -\mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$,可以求得散射电场的表达式

$$
\begin{aligned}
H^s(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) &= -\frac{k_0}{\mathrm{j}\omega\mu_0}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn}) J_n'(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n G_n J_n(k_0\rho_{sn}) H_n^{(2)}(k_0\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}\\
&= \mathrm{j}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n G_n H_n^{(2)}(k_0\rho_{sn}) J_n'(k_0\rho)\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n G_n J_n(k_0\rho_{sn}) H_n^{(2)}(k_0\rho)\left(\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}\\
&= \mathrm{j}\begin{cases}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n^s b_n^s \left(\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho<\rho_{sn}\\ \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n a_n^{s'} b_n^{s'} \left(\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}\right)^{\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}, & \rho>\rho_{sn}\end{cases}
\end{aligned}
\tag{11.41}
$$

式中,$b_n^s = \dfrac{J_n'(k_0\rho)}{J_n(k_0\rho)}$;$b_n^{s'} = \dfrac{H_n^{(2)'}(k_0\rho)}{H_n^{(2)}(k_0\rho)}$ 。

均匀各向异性圆柱内部的场可以写成

$$
H_z^{(i)}(\rho,\varphi,\varphi_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{11.42}
$$

式中,$Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]$ 为第 i 类 n 阶 Bessel 函数。但是在各向同性介质圆柱中,波数 $k(\varphi_{kn})$ 为一常数,即 $k(\varphi_{kn}) = \omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k$ 。同样由于考虑的场在 $\rho=0$ 处是有限的,且在 $\rho=0$ 处只有第一类 Bessel 函数是非奇异的,可以得到适合于求解圆柱内部的场的表达式

$$
E(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n J_n(k|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|) \tag{11.43}
$$

在此根据式(11.42)可以将式(11.43)写成

$$
\begin{aligned}
E(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) &= \sum_{m=-N}^{N} a_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{mn}(k\rho_{sn}) J_{mn}(k\rho)\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}\\
&= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \sum_{n=-N}^{N} J_{mn}(k\rho_{sn}) J_{mn}(k\rho)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{kn}}
\end{aligned}
\tag{11.44}
$$

在均匀各向同性介质圆柱内部,电场和磁场满足 Maxwell 方程

$$
\nabla\times \boldsymbol{E} = -\mu\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{11.45}
$$

进一步化简式(11.45),可得

$$
\begin{aligned}
\nabla\times \boldsymbol{E} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_\rho & \rho\,\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z \end{vmatrix}\\
&= \left(\frac{\partial E_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_x + \left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_y + \left(\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial\rho} - \frac{\partial E_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{a}_z
\end{aligned}
\tag{11.46}
$$

在只考虑 E 极化($\boldsymbol{E}=E\boldsymbol{a}_z$)的情况下，式(11.46)又可以写成

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\boldsymbol{E}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_\rho & \rho\,\boldsymbol{a}_\varphi & \boldsymbol{a}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ E_\rho & \rho E_\varphi & E_z\end{vmatrix}\\
&=\left(\frac{\partial E_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial z}\right)\boldsymbol{a}_\rho+\left(\frac{\partial E_\rho}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\right)\boldsymbol{a}_\varphi+\left(\frac{\partial(\rho E_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial E_\rho}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{a}_z\\
&=\frac{\partial E_z}{\partial\theta}\boldsymbol{a}_\rho-\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\boldsymbol{a}_\varphi
\end{aligned}\tag{11.47}
$$

式(11.45)的右面可以写成

$$
-\mu\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\mathrm{j}\omega\mu\boldsymbol{H}=-j\omega\mu\begin{bmatrix}\mathrm{H}_\rho\\ \rho\mathrm{H}_\varphi\\ \mathrm{H}_z\end{bmatrix}\tag{11.48}
$$

利用式(11.47)和式(11.48)得

$$
\mathrm{j}\omega\mu\rho H_\varphi=\frac{\partial E_z}{\partial\rho}\tag{11.49}
$$

即

$$
H_\varphi=\frac{k}{\mathrm{j}\omega\mu\rho}\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\varphi}\sum_{m=-N}^{N}J_{mn}(k\rho_{sn})\,mn\,(k\rho)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{km}}\tag{11.50}
$$

由前所述，以及在介质边界条件上电场和磁场的连续性，可以按照前几节所论述的方法列写矩阵方程，进而可以利用求得的散射参量求解均匀各向同性介质圆柱 **E** 极化波雷达散射截面高频波函数解。

11.3　均匀各向同性两层介质圆柱的高频波函数解

同样，均匀各向同性介质圆柱的高频波函数理论也适用于求解均匀各向同性成层柱的电磁散射问题。本节的主要内容是构造匀各向同性两层介质圆柱各区域的高频波函数解，其求解模型如图 11.4 所示。

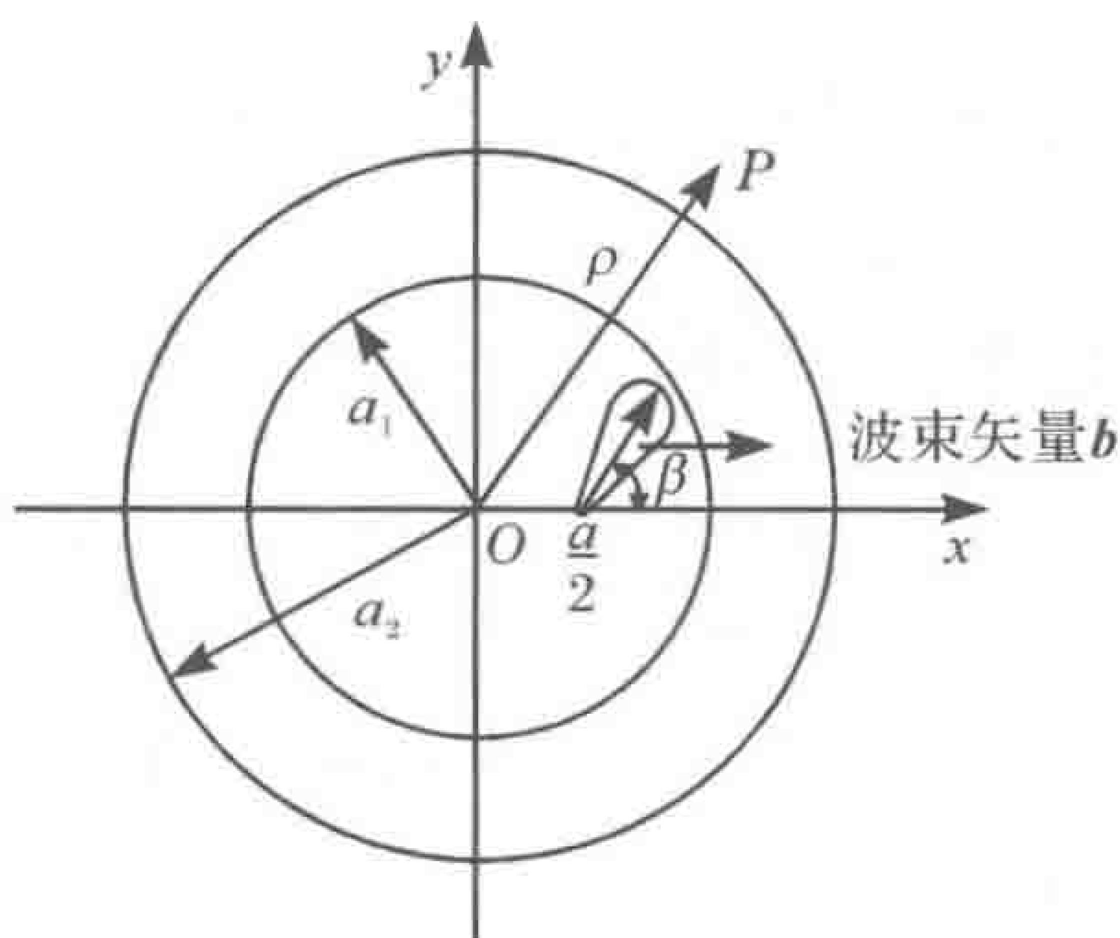


图 11.4　均匀各向同性两层介质柱的高频波函数模型

在图 11.4 中，均匀各向同性介质圆柱内部放置的复源点(高斯簇)具有局部特性，其内部的电磁场可由高斯簇的某些局部区域所决定。简单起见，假设 $\rho<a_1$ 区域介质的为

理想导体,$a_1<\rho<a_2$ 区域介质的介电常数和磁导率分别为 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 和 $\boldsymbol{\mu}$ 。因此,在均匀各向同性介质内部,对于每一个 φ_k,复源点的坐标表达式都不同。

由波函数理论知,均匀各向同性介质圆柱 $a_1<\rho<a_2$ 区域,磁场的表达式可以写成

$$\begin{aligned}H(\rho,\varphi,\varphi_{kn})&=\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a_nJ_{mn}(k\rho_{sn})J_{mn}(k\rho)+b_nJ_{mn}(k\rho_{sn})Y_{mn}(k\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\sum_{n=-N}^{N}[a_nJ_{mn}(k\rho_{sn})J_{mn}(k\rho)+b_nJ_{mn}(k\rho_{sn})Y_{mn}(k\rho)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{kn}}\end{aligned}\tag{11.51}$$

由于介质为各向同性的,所以根据 Maxwell 方程得到该区域的电场表达式

$$\begin{aligned}E(\rho,\varphi,\varphi_{kn})&=-\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\sum_{m=-N}^{N}\sum_{n=-\infty}^{\infty}[a_nJ_{mn}(k\rho_{sn})J_{mn}(k\rho)+b_nJ_{mn}(k\rho_{sn})Y_{mn}(k\rho)]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}\\&=-\frac{k}{\mathrm{j}\omega\varepsilon}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\sum_{n=-N}^{N}[a_nJ_{mn}(k\rho_{sn})J'_{mn}(k\rho)+b_nJ_{mn}(k\rho_{sn})Y'_{mn}(k\rho)]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{kn}}\end{aligned}\tag{11.52}$$

式中,波数 k 为一常数。

由于篇幅所限,对于 $\boldsymbol{E}$ 极化波的情况,其均匀各向同性两层介质圆柱对应的高频波函数解可参考 11.2.2 节中所给出的电磁场表达式。

11.4　均匀各向异性单层介质圆柱的高频波函数解

均匀各向同性单层和两层介质圆柱高频波函数解的正确性和准确性将在数值结果部分给予证明。该方法从理论上也可以推广应用到处理均匀各向异性单层介质圆柱的电磁散射问题。

11.4.1　均匀各向异性单层介质圆柱的 *H* 极化高频波函数解

为了构造所需的高频波函数解,只是应用复源点的场结构来构造高频波函数的表达式,在均匀各向异性介质圆柱的外部仍有入射波存在。在均匀各向异性介质圆柱内部 $\rho=0$ 处的场是有限的,因此场的结构必须是第一类 Bessel 函数的形式,所以由前文可以得到适合于求解圆柱外部场的表达式。

均匀各向异性圆柱内部的场可以写成

$$H_z^{(i)}(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\sum_{n=-N}^{N}a_nZ_n^{(i)}[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|]\tag{11.53}$$

式中,$Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|]$ 为第 i 类 n 阶 Bessel 函数,即

$$Z_n^{(i)}[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|]=\begin{cases}J_m[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|], & i=1\\Y_m[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|], & i=2\\J_m[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|]+\mathrm{j}Y_m[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|], & i=3\\J_m[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|]-\mathrm{j}Y_m[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|], & i=4\end{cases}\tag{11.54}$$

由于考虑的场在 $\rho=0$ 处是有限的，且在 $\rho=0$ 处只有第一类 Bessel 函数是非奇异的，可以得到适合于求解圆柱内部的场的表达式

$$H(\rho,\varphi,\varphi_{kn})=\sum_{n=-N}^{N}a_{n}J_{n}[k(\varphi_{kn})|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}_{sn}|] \tag{11.55}$$

在此根据式(11.50)可以将式(11.55)写成

$$\begin{aligned}H(\rho,\varphi,\varphi_{kn})&=\sum_{m=-N}^{N}a_{m}\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}]J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})}\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\sum_{n=-N}^{N}J_{mn}[k(\varphi_{kn}]\rho_{sn})J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho]\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_{kn}}\end{aligned} \tag{11.56}$$

在均匀各向异性介质圆柱内部，电场和磁场同样满足 Maxwell 方程

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\mathrm{j}\omega\varepsilon\boldsymbol{E} \tag{11.57}$$

求解式(11.57)可得

$$\begin{aligned}\mathrm{j}\omega\gamma E_{\varphi}&=\left(\varepsilon_{yy}\frac{\partial H_z}{\partial y}+\varepsilon_{xy}\frac{\partial H_z}{\partial x}\right)\cos\varphi+\left(-\varepsilon_{xx}\frac{\partial H_z}{\partial x}-\varepsilon_{yx}\frac{\partial H_z}{\partial y}\right)\sin\varphi\\&=\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{yy}\sin2\varphi+\frac{1}{2}\varepsilon_{xy}(1+\cos2\varphi)-\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}\sin2\varphi-\frac{1}{2}\varepsilon_{yx}(1-\cos2\varphi)\right]\frac{\partial H_z}{\partial\rho}\\&\quad+\frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\varepsilon_{yy}(1+\cos2\varphi)-\frac{1}{2}\varepsilon_{xy}\sin2\varphi+\frac{1}{2}\varepsilon_{xx}(1-\cos2\varphi)-\frac{1}{2}\varepsilon_{yx}\sin2\varphi\right]\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\\&=[\sigma_{-}-\varepsilon_{-}\sin2\varphi+\sigma_{+}\cos2\varphi]\frac{\partial H_z}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}[\varepsilon_{+}-\sigma_{+}\sin2\varphi-\varepsilon_{-}\cos2\varphi]\frac{\partial H_z}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{11.58}$$

将式(11.56)代入式(11.58)可得

$$\begin{aligned}&\mathrm{j}\omega\gamma E(\rho,\varphi,\varphi_{kn})\\&=\sum_{m=-\infty}^{\infty}a_{m}\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi}\sum_{n=-N}^{N}\{(\sigma_{-}-\varepsilon_{-}\sin2\varphi_{kn}+\sigma_{+}\cos2\varphi_{kn})k(\varphi_{kn})J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}]J'_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho]\\&\quad+\frac{m(\varepsilon_{+}-\sigma_{+}\sin2\varphi_{kn}-\varepsilon_{-}\cos2\varphi_{kn})}{\rho}J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}]J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho]\}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}m\varphi_{kn}}\end{aligned} \tag{11.59}$$

由以上各区域的电磁场表达式，可以很方便地求解均匀各向同性介质两层圆柱的电磁散射特性。

11.4.2 均匀各向异性单层介质圆柱的 *E* 极化高频波函数解

由于这两个张量在形式上的相似性和电磁学上的二重性原理，由 11.2.2 节可以很容易地得到适合于求解均匀各向异性介质圆柱外部入射场的表达式。

均匀各向异性圆柱内部的场可以写成

$$E_z^{(i)}(\rho,\varphi,\varphi_k)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_{n}Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]\mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \tag{11.60}$$

式中，$Z_n^{(i)}[k(\varphi_k)\rho]$ 为第 i 类 n 阶 Bessel 函数。

同样由于考虑的场在 $\rho=0$ 处是有限的，且在 $\rho=0$ 处只有第一类 Bessel 函数是非奇异的，可以得到适合于求解圆柱内部的场的表达式

$$E(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) = \sum_{n=-N}^{N} a_n J_n(k|\boldsymbol{\rho} - \boldsymbol{\rho}_{sn}|) \tag{11.61}$$

在此根据式(11.60)可以将式(11.61)写成

$$\begin{aligned} E(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) &= \sum_{m=-N}^{N} a_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{mn}(k\rho_{sn}) J_{mn}(k\rho) \mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \sum_{n=-N}^{N} J_{mn}(k\rho_{sn}) J_{mn}(k\rho) \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{kn}} \end{aligned} \tag{11.62}$$

在均匀各向同性介质圆柱内部,电场和磁场满足 Maxwell 方程

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\mu \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{11.63}$$

进一步化简可得

$$\begin{aligned} -\mathrm{j}\omega\gamma H_\varphi &= \left(\mu_{yy} \frac{\partial E_z}{\partial y} + \mu_{xy} \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\cos\varphi + \left(-\mu_{xx} \frac{\partial E_z}{\partial x} - \mu_{yx} \frac{\partial E_z}{\partial y}\right)\sin\varphi \\ &= \left[\frac{1}{2}\mu_{yy}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\mu_{xy}(1+\cos 2\varphi) - \frac{1}{2}\mu_{xx}\sin 2\varphi - \frac{1}{2}\mu_{yx}(1-\cos 2\varphi)\right] \frac{\partial E_z}{\partial \rho} \\ &\quad + \frac{1}{\rho}\left[\frac{1}{2}\mu_{yy}(1+\cos 2\varphi) - \frac{1}{2}\mu_{xy}\sin 2\varphi + \frac{1}{2}\mu_{xx}(1-\cos 2\varphi) - \frac{1}{2}\mu_{yx}\sin 2\varphi\right] \frac{\partial E_z}{\partial \varphi} \end{aligned} \tag{11.64}$$

将式(11.62)代入即可求得 H_φ 的表达式。

11.5 均匀各向异性两层介质圆柱的高频波函数解

前文给出了均匀各向异性单层介质高频波函数解。这一思路可以推广用于处理多层各向异性柱的对应问题。其求解模型如图 11.4 所示。

对于成层介质柱的电磁散射特性研究,利用单层介质柱的高频波函数理论进行扩展。由波函数的性质知:均匀各向异性两层介质圆柱入射场的形式和均匀各向异性介质单层圆柱入射场的形式完全相同。

由简化波函数理论知:在区域 $a_1 < \rho < a_2$ 内,场的表达式是第一类 Bessel 函数和第二类 Bessel 函数的叠加,因此,可以得到适合于求解的电磁场表达式

$$\begin{aligned} H(\rho,\varphi,\varphi_{kn}) &= \sum_{m=-N}^{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{a_n J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}] J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho] \\ &\quad + b_n J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}] Y_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho]\} \mathrm{e}^{\mathrm{j}n(\varphi-\varphi_{kn})} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{j}m\varphi} \sum_{n=-N}^{N} \{a_n J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}] J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho] \\ &\quad + b_n J_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho_{sn}] Y_{mn}[k(\varphi_{kn})\rho]\} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\varphi_{kn}} \end{aligned} \tag{11.65}$$

在均匀各向异性介质圆柱内部同样满足 Maxwell 方程

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \mathrm{j}\omega\varepsilon \boldsymbol{E} \tag{11.66}$$

根据式(11.66)即可得区域 $a_1 < \rho < a_2$ 内的电场表达式。在已知各区域的电磁场表达式后,可以根据边界方程求得均匀各向异性两层介质圆柱电磁散射特性。

以上介绍的是均匀各向异性介质圆柱 **H** 极化波的高频波函数解，对于 **E** 极化波高频波函数解的电磁场表达式可由前文中单层介质圆柱 **E** 极化波的高频波函数解给出。高频波函数的思想是深刻的，已由作者基于复源点的高频函数理论用矩量法重新给出。

参考文献

[1] 刘宁. 均匀各向异性介质圆柱的平面波函数理论. 杭州：杭州电子科技大学硕士学位论文，2008.

[2] Taner Oguzer, Ayhan Altintas. Accurate simulation of reflector antennas by the complex source-dual series approach. IEEE Transactions on Antenna and Propagation, 1995, 43(8): 793～799.

[3] 阮颖铮. 复射线理论及其应用. 北京：电子工业出版社，1991: 88～89.

[4] Eaves R E. Electromagnetic scattering from a conducting circular cylinder covered with a circumferentially magnetized ferrite. IEEE Transactions on Antenna and Propagation, 1976, 24(2): 190～197.

第一版后记

经过众多人员三年多的辛勤工作，本书终于出版了。作者在感到由衷喜悦的同时，谨向所有帮助过作者的人们表示最真挚的感谢！特别感谢任维君同志，他为本书的出版做了大量工作。

鉴于许多情况有所变化，特此撰写这一后记，其目的是想就如下问题作说明。

一，书中大部分内容是根据作者的研究札记和讲课提纲整理而成的，限于作者的水平，现在看来尚有一些不足之处。但考虑到不足在探索和前进过程中是在所难免的，而且它们也比较真实地反映了作者在前一阶段的工作，因此没有再作大的修改。希望读者能够全面地看待这些不足，并热忱希望多提改进意见，以便作者在本书可能再版时加以考虑，作者期盼着学界更多的呵护和鼓励。

二，希望借此机会向那些被本书直接或间接引用了其文献的作者表示衷心感谢。如果由于作者的疏漏而没有提及某些作者，或者你们进行了比本书有关论述更深刻更广泛的工作，或者对你们的工作作了不恰当的评论，也恳切希望得到你们的谅解。对杨本洛教授的先驱性工作，作者的评论有的地方在基本情调上有失敬意和仰慕，在此公开道歉并请求杨老师的谅解。这不是可用"吾爱吾师吾更爱真理"可以开脱的。杨老师的工作切中了问题并值得作者学习。

三，历史和现在，根据诠释学，自我和他者构成了一个无限发展的统一整体。每位读者都带有读者的诠释学"境域"和理解"视域"，视域融合不仅是历史的，而且是历史性的。理解属于被理解东西的存在，本书的写作时间断断续续近 30 年，现在本书已进入科学和哲学著作的世界，它的命运将由逻各斯去决定了。在对他人成就的常见的回应中，一种是羡慕、嫉妒、恨的流俗方式；但在本书中转述的黑格尔提倡的方式是：我们应当提到歌德的一句美好的箴言，那就是对别人的巨大优点除了表示爱慕之外就再没有任何其他的补救方法，这是评判别人做出的真正的和扎实的成就的办法。当然黑格尔也提到读者也完全可以把空洞的和毫无根据的东西加以拒绝。所以作者认为对本书有不同的看法是不奇怪的，人上一百，形形色色。走自己的路让别人去说吧！从最近研究《普通语言学教程》来看，唯有思想才能积淀下来。爱因斯坦有言：政治是为当前，唯有方程永恒。人类几千年来第一次写下的等式：

绝对静止＝绝对运动

是永恒中的永恒！

本书中作者与杨本洛教授的"皮毛之争"值得在后记中特别提及。作者注意到飞机先加速才能起飞，后速度，再曲线路径，所以共有加速度向径、速度向径和路径向径三个方面。牛顿力学是以现成路径依次求导创建的，爱因斯坦力学是以速度为"皮"建构的，借助于黎曼几何。任伟力学是以加速度为"皮"统一建构的，借助于黎曼几何和爱因斯坦的天才工作，而与牛顿的物理概念和结论相一致。这是作者的思想原创。一切成就都源于大自然并归于大自然。人只是绝对精神的工具。若以能量 E 来考虑，则五个量是重要的，

作用量、能量作为时间的函数及其第一、第二、第三、第四阶对时间的导数都是重要的。以牛顿万有引力定律和库仑定律为例，如以路径向径为“皮”均为常加速度运动，如以速度为“皮”则为无加速运动，若以加速度为“皮”则为静止或匀(加)速运动。它们的共同逻辑主体都是质点，或有质量的或没质量的特定对象。飞机的轨道是生成着的，开车有道路现成的痕迹，但也有先加速后速度再路径的思想萌芽。任伟几何的加速度是“皮”，加速度是“皮”，则速度是“毛”，路径是“毛上之毛”。或者速度是“皮”，路径是“毛”(黎曼几何)。可见作者的几何学和物理学是对黎曼几何和爱因斯坦相对论的发展，广义相对论可以用加速度为“皮”重写，重写后新的物理将自动呈现，这是现象学方法的真正应用。库仑定律和万有引力定律何以可能？因为它们代表以加速度为“皮”的静止或匀速运动，这才是广义相对论的物理本质，时空弯曲其实是走了弯路(至少在人们生活的太阳系是这样)。这段话是成果的提前报到！物理学就是几句话。自笛卡儿以来，特别是伽利略、牛顿使自然科学数学化以来，科学的哲学基础都是以笛卡儿开创的主客二分模式来构造的。作者自称以海德格尔哲学起家，没有真道是没资格这么说的。其实，作者的哲学是将科学研究的对象，如飞机，看成与观察者一样的存在论上的主体，这就是海德格尔哲学思想的光辉。而且飞机首先是主体，然后才是主客二分的客体，科学研究应与哲学一致，也就是说飞机是世界之中的主体，然后才是世界之中前提下超越(人为强制的超越)到世界之外的主客二分。作者不仅超越而且飞越，考虑加速度。如果以飞机为主体，以生成性建构飞机的生存，作者的研究路径则是十分自然的。同样，人作为人，有时是好人，有时是坏人，如果把量子看成主体，有时是波，有时是粒子，有什么奇怪呢？好人坏人是因人因事而异，量子为什么不可以因人因事而有不同的表现呢？时过境迁，一切都在变。逻辑实证主义是不可能的，主客二分已不可实证，包含了无限，人为强制就是不管无限，其实是无限中的有限。实证的有限其实是做不到的。相对论以现成性为基础，没有现成周期运动的周期，就没有自旋和一切量子化。什么是不同时强制同时，隐含的前提是对一个时间区间的不同时强制同时，这是一个涉及无限的问题。什么是无限，无限就是将时间奔腾向前与永恒轮回画上等号。在无穷小和无穷大的层面都已由作者完成证明，根还在自然数 1,2,3,…的第三种特性，$2^{\infty}=\infty$，数量特性和序特性是两种已知特性，第三种特性本书称为速度特性，$\frac{2^{\infty}}{\infty}=1$，也就是光速不变原理。有没有第四种特性，数的加速度为多少？一个依赖于数量大小的量。

什么是时间的永恒，永恒就是时间的不可区分。四维空间中三维球面上的每一点都是不可区分的。二维空间的一维球面(圆周)上的每一点都是不可区分的，三维空间上的二维球面上的每一点也是不可区分的。所以球面世界的哲学，如果从时间上把握则是永恒的哲学。一个数学的单位圆周，将其数学地剪断成为线段，两种长度当然是一样(光速不变，本书第十六章中精细积分法的秘密就在这里)，圆周上的点不可区分，区间上的点则有序。这就是时间奔腾向前与永恒轮回的关系，这就是为什么 1933 年狄拉克和薛定谔都能获得诺贝尔奖的原因。为什么必须以加速度为“皮”，因为$(\mathrm{j}\omega)^4=\omega^4$，$\omega\neq0$ 直接以路径为“皮”，与空间相对的不是时间而是能量作用量，时空何以可能？当且仅当$\frac{\partial}{\partial t}$这一算符与其本身有一比例系数时$\frac{\partial}{\partial t}$才与 t 可以在某种意义上划得了等号，也就是时间的均匀流逝

和时间奔腾向前与永恒轮回才能打通。所以时间的本质是数量，有正负，牛顿力学直接是不行的，因为改变符号$(j\omega)^2=-\omega^2$，速度为“皮”也不行，$(j\omega)^3=-j\omega^3$，只有$(j\omega)^4=\omega^4$ 只差一个比例常数(可归一化地取为1)，不改变正负。原来为正的依然为正，原来为负的仍然为负，所以时间的本质涉及对空间的四阶时间导数。这就是特别提及“皮”与“毛”的关系的原因。“皮”既然是“皮”，也就更能反映本质才能是“皮”，以前黎曼、牛顿、爱因斯坦用的“皮”都具有历史意义，将来可能以加速度为“皮”才能解释时空何以可能！感谢杨本洛教授将问题尖锐化和明确化。我的一个好朋友，在英国《Nature》上发表过论文，最近准备再在此刊发表论文，一看见我写的前言，立即觉得我可能是自夸，有点黑格尔所说自命不凡的味道，表示对我成就的拒绝。我想这是他思想的自由，完全可以理解。但行与不行，不是凭主观，凭感觉，任何人不从哲学和科学层面先搞懂作者的思想，仅凭主观和感觉是无法否认作者思想正确性的。正如当年爱因斯坦的朋友告诉他有100个教授签名反对相对论，爱因斯坦说，只要有一个人反对就能反对了，何需100个教授。我想10 000个教授的签名也是否定不了的。作者的说法是以实力和真实研究为基础的，有预言性质，但绝不是空穴来风。让我们再次记起歌德的佳言，面对他人伟大的成就，我们唯有敬佩。只有在人格上相互尊重，在学术上相互欣赏才有助于学术的长进，孙正聿老师多次说。

我的一个好学生有一次类似于爱因斯坦的朋友对爱因斯坦的关切，好意地对我说，有人在背地里议论我。我想议论是可以的，只要是本着学术正义的善意的批评指正，有利于学术本身的发展，作者都是理解和愿意接受的，应表示感激；但对一些不怀好意的挑剔和歪曲，作者也会像斯宾诺莎和康德一样泰然处之。条条大道通罗马，科学研究做到后来完全是艺术性的，没有既定目标，也没有固定的方法，是技术理性，不能也无能座架的。创造性劳动并无规则可循。任何一个哲学家在建立自己的哲学体系时，都必须付出艰辛的努力，而且有前无古人后无来者的自信和豪迈。比如康德就认为在他之后哲学只是在他基础之上的修修补补而已(典型的后无来者)，海尔格尔也担心他老师胡塞尔有没有一分钟是哲学家(别人当然就更不是了，我想。典型的前无古人)。希望读者多少能习惯于这种夸张的笔调。据说在现实生活中，尼采都并不狂妄，但他的文字有时却是挺狂妄的。如果这种诗性哲学的叙事方式令读者难受，作者特别在此道歉。按海德格尔的说法，不是此在说话而是大道让此在说。以前我也不理解尼采“我为什么这么智慧”的语言，现在发现行文至此只能这么说，体现了哲学家的真诚。海德格尔哲学有无限的丰富性，但也可以作简化理解。例如矩量法，可直接解也可用特征模理论求解，这样做的优点是可用奇异值分解，丢掉一些不重要的特征模。比如人，有好几十亿，在强调大家共在的前提下，也可以按存在方式，也就是按阶级、阶层来划分为不同的类(各种常人)，这样来研究存在者的存在，就比较容易。对每一类人，又可按其一生分成不同的时段。不是用自然的日历表上的时间，而是用生存方式上的不同时间段来研究人。不仅是研究存在的状态，更突出存在的方式，也就是说线性方程组的不同特征值对应不同的时间因子，具有不同时域的存在方式。

从本后记的“皮”的理论来重审本书的工作与狄拉克的工作，从黎曼几何的以速度为“皮”来审查，出发点(“皮”)也就是能量(作为时间的函数)E，作用量(能量对时间的积分，乘积求和)和加速度对应的是$\frac{\partial E}{\partial t}$，积分算符和微分算符在将时间奔腾向前与永恒轮回统一之后对消，如从作者的“皮”(加速度)出发，就是能量变化率$\frac{\partial E}{\partial t}$($\frac{\partial E}{\partial t}=0$ 对应于定态，$\frac{\partial E}{\partial t}$

$\neq 0$ 对应于跃迁)，两重积分算符与两次微分算符在将时间奔腾向前与永恒轮回以作者的方式统一以后也是对消的。也就是说从三种“皮”出发，能量都是自旋为零的标量，但从 $E=mc^2$ 导出 $\frac{\partial E}{\partial t}=\frac{\partial m}{\partial t}c^2$ 来看，只有作者的“皮”是洛伦兹协变的，最合理，而且具有前述可描述定态与跃迁的物理意义。从上述讨论可见，能量的可正可负，或者 $\frac{\partial E}{\partial t}$ 的可正可负是客观存在，并不能通过不同时强制同时(狭义相对论)来人为改变。因此狄拉克在这个问题上虽有革命性贡献，但仅就理论描述物理实在而论是有问题的，但作用量是可以通过左旋右旋的(定义了等于没定义的)对称性来实现人为可正可负的。我们认为反粒子应该用反粒子的理论。因为正反粒子对应不同的逻辑主体，应该有不同的物理理论。作者的学说对正反粒子的不同理论作出了不同的区分，狄拉克的学说有的时候能歪打正着，但本质上是混乱的。这是作者自己比较满意的工作，这就是前面提到的物理学是几句话的含义。比如我 1993 年在美国《物理学评论》上发表的文章，13 页，浩浩荡荡的公式体系，五点结论性特色，但真正重要的是前言中的几句话，那是任何书上和文章中没有的，是作者思想的高度提炼，花了好几年的时间才写出来。所以看文章，我一般只看几句话，什么公式、数据、实验结果、曲线都是可看可不看的。依此类推，这本书虽然篇幅巨大，其实读者可以选择性阅读，唯有前言和后记中的几句话是最重要的，诸如物理学就是几句话，绝对静止＝绝对运动之类，希望读者不至于忘记。还有对他人的成就唯有敬佩等。

作者的物理学思想来源于哲学而归于哲学。作者最近哲学上的工作就是用四维空间中的列向量(也就是四个分量)来统一描写自然、世界、历史、社会。大致的对应关系是，人类活动对应于 $\boldsymbol{E}(t)$ 这一列向量，四个分量自然、世界、历史、社会分别对应于速度、加速度、以加速度为“皮”的速度、以加速度为“皮”的加速度，即 $\int_{t_1}^{t_2}\boldsymbol{E}(t)\mathrm{d}t$、$\frac{\partial \boldsymbol{E}(t)}{\partial t}$、$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(t)}{\partial t^2}$、$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}(t)}{\partial t^3}$，这是对本书第八章工作的深化。这些将是作者另一本书的论题。这里必须向读者暗示由于后记的性质不允许论题过度展开，四个分量的说法只是过渡性的，真正的理论还得回到 Hamilton-Jacobi 体系中去，这样与空间对应的就是作用量，与空间的四阶时间导数对应的就是作用量对时间的四阶导数，如只看后记中的论述，则有一阶导数的错位，这在作者写太阳系的五个方程一节中有所暗示，这是一个困难的问题，后记中采用了便于理解的方式而牺牲了一些严格性。这一问题与海德格尔哲学，特别是海德格尔后期思想有很大关联。海德格尔终其一生的努力，终于没有完成他的体系，这是与他的时代、知识结构所决定的工具局限性相关的。海德格尔知道一些控制论，但似乎并不懂得信息论。作者则不一样，1983 年研究生的第一年就学信息论且是必修课，并以 90 分的好成绩名列全班第二。

其实海德格尔的哲学关键是要用信息论的目光来审视。人生是定在与信息的并存(同时存在)。什么是信息的哲学定义？作者的答案是仍应回归数学家香农的定义，不确定性的排除，只是在解释上或者说理解上要从主体方面去理解。人的存在，包括每天的存在，都是在消除存在的不确定性，这是从生存论上讲的，不是存在者作决定的知识论立场。昨天已经定在，今天有各种可能性。今天的定在(实在)遮蔽着今天的信息化(不确定性，有待消除的不确定性)存在(不实在)，而此在今天的所作所为(实在的与不实在的，显现)

和遮蔽着的存在都以昨天整个人类的定在为依据。而整个人类的所作所为只有明天才能成为定在,而这种定在是以定在和信息化的定在(消除了的不确定性)二重性(对偶变量,两个变量)来刻画的。这种不确定性是由不同时强制同时引起的,本质的不可消除的不确定性,时间区间无论如何缩短都消除不了,体现为海森堡的不确定性原理。用电磁学的语言,电场可以描写电磁场,磁场也可以描写电磁场,也可以用电场和磁场两个变量来描写电磁场,电场是磁场的依据,磁场是电场的依据,电场遮蔽着磁场,磁场也遮蔽着电场,电场敞开磁场,磁场也敞开电场,作者认为这就是世界的显隐运作。物理学家 Bohm 有不同的显隐运作哲学。

从电磁场方程的 FDTD 方法最能看清这一点。电场和磁场在时间上本不同步,在空间上也是错位的。海德格尔哲学从黑格尔哲学而来,黑格尔将不同时强制同时(圆圈实现永恒轮回,不同时强制同时,每一时刻不可区分),海德格尔却要让时间奔腾向前,源于生命的洪流(止不住的意欲之流)重新显现而不让对象化止住生命的洪流。也就是马克思说的认识世界与改变世界的区别。从亚里士多德的质料、形式、目的、动力四因学说来看,改变世界是要从动力也就是从加速度的目光来座架目的。飞机总是要先耗油才能产生速度,目的是有待消除的不确定性,是信息化的,而动力(耗油$\frac{\partial E}{\partial t}\neq 0$)是千真万确的定在,也就是用实在寻找不实在。从认识世界的角度,总是从生产实践出发,以目的(目标)为依归(定在)决定怎样利用动力(少耗油),动力却是信息化的,有待消除的不确定性。倪梁康教授有本《自识与反思》的书,综述了历史上 30 来个哲学家的观点,但是自识与反思的区别仍然晦暗不明。其实自识是以世界与我们(此在)来照面座架的,核心在加速度,也就是海德格尔说的在世界中存在,而认识论却是把本来在世界中存在的此在强制地变成主体,同时把本来在世界中存在的事物和他人变成客体和他者,忽略世界的无穷阶联系和关系,形成一个主客二分的简化模型,所以实践论也不可能不是形而上学的,因为无限变成有限是一种形而上学哲学的抽象和简化。实践是以目的座架的,信息化的是最小能耗。所谓目标管理,是以目标为依归,降低成本。反思是从个人走向世界,自识是从世界走向此在。作者的双螺旋哲学是本体论与认识论的统一,解决的是《自识与反思》中的“与”字,统一的基础是价值,或者通俗一点:利益。马克思说,人们奋斗所争取的一切都与他们的利益有关。同时用多重散射理论简化个人此在与人类此在的与时俱进(随时间变化,存在方式),这一点已在本书中通过语言和言语的时变规律澄明。社会意志也就是在世存在的根本,恩格斯将其归结为所有个人,此在的力的平行四边形法则构造出人类此在的合力,力当然是与加速度有关的量,所以作者的加速度座架世界暗合恩格斯的社会意志合力论。从时间上来考虑昨天($n-1$)、今天(n)、明天($n+1$),个人意志要得到社会承认,今天的个人此在意志要在明天才能被社会承认,而基础都是昨天的社会意志(海德格尔的被抛入世),每天个人此在都在被人类此在抛向世界,因而才产生出加速度。跨越两个时间区间,当然就是加速度。从昨天到今天产生速度,从今天到明天也产生速度,从昨天到明天就是加速度。回到马克思的经济学,社会意义上的加速度是明显的,比如作者上大学时(1979 年)看电影只要 5 分钱,现在要 50 元,当然有加速度。通货膨胀产生速度,但资本的逻辑是在通货膨胀的速度基础上加速,也就是相对于通货膨胀而增值。通常讲资本增值,有的人以为只是速度。从时间上看,资本增值是一个过程,对一个过程总可以言及加速度。扩大再

生产是生产剩余价值的主要手段。从社会总资本来看。如果只是速度，就没有工人阶级的相对贫困。加速度就是作者的意志论两头在外的意思。

作者的哲学对海德格尔哲学的改造主要是区分个人此在与人类此在，将物理解为非人，借用马克思的话是对人而言的存在着的无，放在空集里边，这样作者的世界总是人类世界，物变成了人的无机身体，因而个人此在与人类世界此在的关系仅仅是1与有限多(当前世界总人数)的关系，可以暗含过去的人，但过去的人还是非人，而仅仅是当下化的非当下，因而具有最简单的数学结构。在作了这样简化之后，论述就极大简单和便捷，很多事情就说得清楚了。国内邬焜教授的《信息哲学》一书主要阐述一种知识论立场，把信息理解为客观不实在。作者在这里简要阐述的信息哲学则是从主体方面来理解，信息论关注有待人来消除的不确定性，是对信息论现成性的解构和对信息论生成性的建构，将信息指向人的生存本质，更有哲学味道。这是作者作为电子信息学院教授特有的目光。信息作为一种存在，在时间性中敞开和遮蔽的本性得以澄明。在买股票的时候并不知道他人是怎么决定的，只有明天才知道今天他人的情况，而根据的又是昨天的定在，这是人的根本存在方式和社会(指所有个人、人类此在、人类世界)的根本游戏规则。叔本华的《作为意志和表象的世界》应这样理解，作为意志的世界重在世界(人类此在)的信息化生存，以加速度座架，而作为表象的世界重世界(个人作为人类的一员)的确定性生存。意志与表象都由利益来座架，基础是非人的物质世界，表现为空集，但空集中不空(非空)。所以作者区分个人此在与人类此在比较必要。意志和表象的完备论述也是四个世界，$2^2=4$。信息的本质就是遮蔽与敞开的运作。已经知道就不是信息，而是知识了，不可知道也不是信息，其实是一种能够排除的不确定性才是信息。只是现在计算机太快，计算机本身就在做不确定性的排除的工作，只是大家对此存在有所遗忘而已。信息也总是对人而言的，没有人，信息也就是存在着的无。信息是人排除不确定性的活动，活动的目的是要知道信息，活动的结果是排除了的不确定性。

第八章谈到周培源教授所说文献稍微看看就行了的语境是很多学生只知道查文献却不独立思考。从本书(特别是后记)可见作者看的东西也并不少，但挂一漏万也是在所难免的，因为毕竟是知识爆炸的时代，而且到处都藏龙卧虎。成天查文献本身就说明还没有厘清问题之所在，更不要说进入前沿。学问做到最前沿是没有文献可查的，只能自己拿话来说。本书与其说是著作，还不如说是道路的开启，按海德格尔的哲学。

说本书是道路的开启，是因为很多工作都还有待完成，本书只是开了个头。人的存在本来就是一种未完成状态，每个人都有未完成的使命。有的东西写在书里具有备忘录性质。现在就没有打算由本人去完成，只是看看对别人有没有启发作用。作者对毛泽东的实践论是做过用反思的方式重写的尝试的，至今没有公开发表。

李白的诗中形容胡子之长可以长到7000尺，这完全是实证主义者难以理解的，作者承认本书中包含少许类似的形容词。不是说不想当将军的士兵不是好士兵吗？有远大理想无可厚非，正如士兵只要是好兵就行，真能当将军与否并不重要。本书突出每个个人的非普遍性，有时用了夸张的手法。目的在于开启人类更多的创造能力。

作品是作者的"孩子"。家里老人都像爱护孙子一样关注着本书的出版，母亲突然问我本书标题中的"数学化的场论"到底是相对什么而言的。我三周以后才找到答案，原来数学化的场论是针对物理化和技术化的场论而言的，是对技术理性的一种客观上相悖和主

观上反动。最具代表性的是本书第十章对宇宙形状的论述。目前的宇宙学是基于地球表面附近人的观察,而这样的物理化和技术化的场论是无能论述宇宙的形状的。如果地球上每个人的活动半径只有一米,而所有人之间又不能沟通和理解,如何知道地球的形状呢?

作者最近10年没有在英文期刊发表论文,原因是多方面的:

一、在作者与杭州电子科技大学的工作合同中有争取中国科学院院士的条文。根据杭州电子科技大学前党委书记方华的意见,不要为外面的诱惑所动,潜心从事原创性研究,文章一篇没有也没关系。

二、在美国的科研工作与美国军方有关,成果不能发表。在日本的工作与预期结果相反,不宜发表。在加拿大的工作因基础软件有误,不可发表。

三、回国后在时域压电学方面的工作等待着民间或国家的大笔经费资助,例如千人计划。欲开发有自主知识产权的应用软件,故选择暂不发表论文。

四、均匀各向异性介质波函数的工作,在一些细节和程序调试上还有待提高,考虑到将来报国家自然科学奖而严格把关,再做一点工作后可发表。

五、在无界均匀各向异性介质时谐并矢格林函数的工作中,如果承认数学分析的无限概念(潜无限)的正确性,可发表六篇以上论文。但留意到实无限与潜无限的区分,认真地追问到底,能否发表论文则说不清楚(因涉及整个数学基础的重建,新的东西往往不一定马上被承认和接受)。

六、对电大尺寸典则几何的散射问题与浙江大学的合作走了弯路,现在虽然找出了解决方案,但数值实施和参数研究还没进行,有待将来发表。

七、对随机离散散射体的相干位位置表象的理论和计算,一直还没来得及对程序进行逐行逐行核实并亲自运行,将来可发表论文。

八、第四守恒定律已于2008年发现,该论文一旦发表就有到达当时科学顶峰的可能,但至今没有发表也有好处,有利于相关成果被作者“独霸”,如2012年春节证明的刚尺和原时的不变性,并最终找到了惯性系的根在哪里。这就是作者所说不为外面的诱惑所动的真实含义。想做大事和想做文章在方法上是不一样的。

九、作者的空间相对论和时空相对论暂时没有在美国发表,因为还有两个后续的重要问题有待研究,彻底打通牛顿的绝对时空和爱因斯坦的相对时空是作者坚定不移的目标。

十、没有发表期刊论文并不等于作者的工作没有发表,本专著本身就有版权,就是发表。代表哥白尼革命的《天体运行论》等哥白尼死后才发表,完全没有功利性。作者也不为外面的诱惑所动,为科学而科学,力争为人类作出更大的贡献。

人生是欢乐的涌泉,偶尔也有深沉的悲痛。这段时间作者不断自勉。好在林为干院士早就使我不致忘记:如此恩典,让我敬畏。后记只有提及在患难之际伸出援手的浦东新区区委副书记吴信宝博士(包括他的秘书瞿磊、马学杰和王晓科博士)的再次帮助才能结束。杭州电子科技大学的方华书记和金海学弟也是不可不感激的。

作者有幸得到祖国和人民多年的哺育,特别是杭州电子科技大学10年的培养。研究做得还很不够,阶段性地将其写下来,也许可以有少许作为备忘录或者将来研究者的参考资料。感谢任维君同志协助作者撰写本书,没有他的大量付出,本书是不可能完成的。特别感谢吴信宝博士,2002年作者回国,吴博士亲自到机场迎接,给我爱的温暖,此外还亲

自修改我的简历，亲自引荐作者来到杭州电子科技大学任教。李晓梅和吴菲也关注着我们全家的命运。最为重要的是，吴博士替我做出的在杭州电子科技大学工作的决断幸运地促成了我学术生涯的哲学转向，并最终成就了我在物理学上超出意料的发展。十分感谢孙玲玲老师对作者的关照和宽容。感谢李凯博士多年的合作，我们一起度过了许多快乐的时光。十分感谢林为干和金亚秋院士对作者多年的鼓励和指导。感谢我的恩师成孝予、赵家升教授以及方华书记，是他们带我进入数学、物理和哲学殿堂。感谢徐建华、徐建芬、杨义先、谢良国、任玲慧、徐国连、沈菊香、潘威炎、代水华、吴君茹、钱梦禄、朱建华、水永安、吴学英、向伯先、刘淑芳、熊世雪、刘翠华、王正权、任金涛、黎帮华，杨本洛、李志刚、肖德一、刘远华、张志勇、杨庆轩、马兴启、樊荣茂、向中贵、文舸一、郭飞、郭旗、祝宁华、刘元安、万长华、肖开奇、袁本涛、潘锦、王清源、李陟、平本林华、平本林美，龚光、章毅、王晓军、石果、何忆红、任晓庆、唐颂，立居场光生、Norris、Smith、王庆明、Strom、Fishman、马君岭、张业荣、刘志旺和王志良等的帮助，他们在我人生有困难的时候，向我提供了极大的帮助，作者终生不忘。特别感谢郭林松校长助理，给予我经常性的指导和无微不至的关怀。记得2011年在科研上取得重大突破之时，我已身心疲惫，许多人鼓励我趁热打铁，尽快发表论文，只有郭助理建议，任何突破都来之不易，重大突破更是难上加难，应该注意身体，好好调养一段时间后再考虑发表论文，这体现了党对知识分子的关怀。感谢杭州电子科技大学科技处的秦燕娟和汪海燕老师，他们对本书的出版给予了多方面的支持。感谢我的学生徐广成、杜铁钧、焦志伟、张永刚、潘伟良、王丹、董志龙、姚军烈、朱合、郑洲官、刘宁、肖刘琴、刘松柏、曲恒、高洪涛、顾婷婷、张丽艳、张书俊等，他们都为本书的完成贡献了自己的力量。感谢父母（任志钦和刘淑霞）的养育之恩以及妻子（张敏）和儿子（任韫灵）的爱。感谢居安多娜老师在英语语音校正和西方文化方面对我的特别指导，奇异恩典，何等甘甜，永远感激不尽。感谢庄佳妮爱上我的儿子任韫灵，使我有了即将当爷爷的喜乐，更有助于本书的完成。